ŒUVRES

DE FERMAT.

20660 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

ŒUVRES

DE FERMAT

PUBLIÉES PAR LES SOINS DE

MM. PAUL TANNERY ET CHARLES HENRY

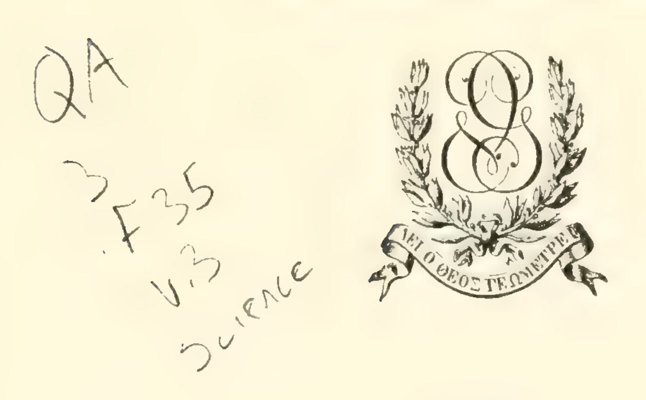
SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME TROISIÈME.

Traductions par M. Paul TANNERY :

1° DES ÉCRITS ET FRAGMENTS LATINS DE FERMAT; 2° DE L'*Inventum novum* DE JACQUES DE BILLY; 3° DU *Commercium epistolicum* DE WALLIS.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

MDCCCXCVI

TABLE DES MATIÈRES

DU TROISIÈME VOLUME.

PREMIÈRE PARTIE.

TRADUCTION DES ÉCRITS LATINS DE FERMAT.

SECONDE PARTIE.

TRADUCTION DES LETTRES ET DES FRAGMENTS EN LATIN DE LA CORRESPONDANCE DE FERMAT.

TROISIÈME PARTIE.

TRADUCTION DE L'*INVENTUM NOVUM* DU PÈRE JACQUES DE BILLY.

QUATRIÈME PARTIE.

TRADUCTION DU *COMMERCIUM EPISTOLICUM* DE WALLIS.

APPENDICE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME TROISIÈME.

AVERTISSEMENT.

I.

Comme il a été dit dans l'Avertissement, en tête du Tome I de cette édition, page xxxiv, la Commission de publication des *Œuvres de Fermat* a décidé qu'un Volume spécial serait consacré à des traductions des Écrits et Fragments latins de Fermat, de l'*Inventum novum* du P. de Billy, enfin du *Commercium epistolicum* de Wallis.

Si j'ai accepté la tâche ainsi déterminée, il ne m'en sera pas moins permis, je l'espère, de réclamer d'autant plus l'indulgence pour mon travail, que j'aurais désiré personnellement, pour une traduction des Écrits de Fermat, la publication en regard du texte. J'estimais, en effet, que, dans ces conditions, il eût été plus aisé de faire une œuvre plus utile et moins sujette à critique.

Une traduction d'un auteur mathématique peut être faite de deux façons, très différentes l'une de l'autre : ou bien elle sera rigoureusement conforme à la lettre et aux notations du texte, en sorte qu'elle puisse, au point de vue historique, le remplacer absolument pour ceux qui ignorent la langue originaire; ou bien elle reproduira seulement, avec toute la fidélité possible, l'ordre des idées de l'auteur, mais en transcrivant ses notations et ses expressions techniques d'après le système courant; elle servira alors plus utilement le mathématicien qui ne s'attache qu'au fond du raisonnement, sans se préoccuper de la forme des symboles.

Le premier mode est naturellement le seul auquel on puisse penser quand il s'agit d'un auteur contemporain; il n'exige d'ailleurs, de la part du traducteur, qu'une connaissance suffisante de la langue de cet auteur : il est donc de beaucoup le plus facile à suivre. Au contraire, si l'auteur à traduire est ancien ou déjà assez éloigné de nous pour que son système de notations soit essentiellement différent du nôtre, le second mode doit, en principe, être préféré.

S'il s'agit, en effet, du point de vue historique, aucune traduction ne peut, quoi qu'on fasse, équivaloir au texte, quand il est l'œuvre d'un génie véritablement créateur, tel que ceux qui méritent d'être traduits. Car il n'y a pas à

considérer que les notations, il faut tenir compte des concepts; or ceux-ci sont intimement liés à la langue dans laquelle ils sont formulés. Et ce n'est pas parce qu'un mathématicien, comme Fermat, se sera servi de deux langues, qu'on aurait raison de penser que la maternelle a dû, pour lui, être naturellement l'instrument de ses conceptions; à une époque où l'instruction se faisait en latin, où la presque totalité des Ouvrages mathématiques étaient composés dans cette langue, c'était celle-là qui servait principalement à penser en Mathématiques, et il ne me paraît pas douteux que Fermat n'ait conservé jusqu'à la fin de sa vie une habitude qui est évidente pendant la féconde époque de sa jeunesse [1].

D'autre part, si l'on vise à avoir un texte réellement intelligible, si l'on veut faire œuvre véritable de traducteur, il faut bien remplacer par les termes techniques en usage ceux qui sont tombés en désuétude, il faut bien traduire aussi sous la forme moderne les notations obsolètes; sans quoi la traduction ne présente, pour ainsi dire, aucun avantage sur le texte, surtout lorsqu'il est en latin, puisque la connaissance de cette langue est encore assez répandue, même parmi les mathématiciens, auxquels il suffit d'en savoir les premiers éléments et de posséder un vocabulaire très restreint.

Mais, dans ce mode d'interprétation, la tâche du traducteur, s'il veut rester fidèle, présente de sérieuses difficultés; l'emploi de nouveaux termes techniques, surtout leur substitution, souvent indiquée, à des périphrases qui alourdissent le style, tendent à faire attribuer à l'auteur des concepts qui lui sont réellement étrangers et dont il peut être nécessaire de bien marquer le défaut pour rendre compte de la véritable marche des idées; d'un autre côté, il arrive souvent que l'emploi des notations modernes fait apparaître immédiatement une conclusion qui, avec les anciennes, exige encore des développements plus ou moins longs. On se trouve ainsi amené à des suppressions plus ou moins graves.

Il y a donc, et cela pour ainsi dire à chaque instant, à choisir entre deux tendances, dont ni l'une ni l'autre ne peut être sacrifiée en principe : Chercher à être le plus clair possible en tenant compte des habitudes modernes; suivre assez fidèlement le texte pour ne pas en donner une simple paraphrase. J'estime que, dans une traduction en regard du texte, ces difficultés disparaissent en grande partie; il est possible alors de prendre plus de libertés et de viser

[1] Descartes, tout au contraire, comme mathématicien, travailla en français, sinon dès le début, au moins de très bonne heure, tandis qu'en Métaphysique, il trouve certainement plus commode d'écrire ses *Méditations*, par exemple, en latin, de se servir d'une langue toute faite, plutôt que d'en créer une.

avant tout à la clarté; le lecteur est immédiatement averti, par le voisinage du texte, de l'importance des modifications apportées, et il est, pour ainsi dire, invité, toutes les fois que la question peut l'intéresser, à comparer l'interprétation avec les expressions de l'auteur.

Dans une traduction publiée séparément, et surtout dans un Volume susceptible d'être vendu isolément, j'ai cru devoir tenir un plus grand compte du texte de Fermat, et refondre par suite une traduction déjà complètement faite pour mon usage personnel. Je ne me dissimule pas que, du compromis que j'ai essayé entre les deux tendances indiquées plus haut, il ne pouvait résulter une œuvre complètement satisfaisante au point de vue de l'un et de l'autre des deux buts cherchés. Suivant ce que chacun désirera trouver dans cette traduction, il me reprochera nécessairement, soit d'avoir trop conservé des formes anciennes, soit, au contraire, de ne pas les avoir assez respectées. Je ne pourrai répondre qu'une chose, c'est que j'ai fait de mon mieux et que je suis le premier à reconnaître les imperfections inhérentes au système suivi ou plutôt à l'absence d'un système précis et rigoureusement observé.

Les remarques que je viens de présenter ne s'appliquent pas entièrement aux autres traductions qui suivent dans ce Volume celles des Écrits de Fermat. En particulier, pour l'*Inventum novum* du P. de Billy, je ne crois guère que personne attache un intérêt spécial à l'étude des notations (¹) et des formes de langage de cet auteur. Je n'ai donc conservé que les expressions typiques, comme celles de nombres *vrais* ou *faux* (au lieu de positifs ou négatifs). Je n'ai eu, au contraire, aucun scrupule, par exemple, à traduire *terminus* au moyen de l'expression toute moderne de *forme* (algébrique), qui lui correspond assez exactement.

L'*Inventum novum* a, en tout cas, une importance réelle; il fait connaître, d'une façon bien détaillée, toute cette partie des recherches arithmétiques de Fermat, qui intéressait le plus ses contemporains, tandis qu'aujourd'hui elle est à peu près complètement négligée. L'*Inventum* est donc un complément d'autant plus essentiel des *Œuvres de Fermat* qu'il donne la clef de nombre des *Observations sur Diophante*, et présente la solution de plusieurs problèmes numériques réellement difficiles. Pour un Ouvrage secondaire de ce genre, que sa forme rend assez malaisément abordable dans le texte original, une réédition de ce texte eût été sans objet, une traduction peut rendre de véritables services.

(¹) Ce sont celles de Fermat dans ses *Observations sur Diophante*, c'est-à-dire celles que Bachet avait adoptées dans sa traduction latine de l'auteur grec.

En ce qui concerne le *Commercium* de Wallis, il ne s'agissait que de faire mieux connaître en France une série de lettres très importantes au point de vue historique, mais qui est suffisamment répandue soit dans l'édition princeps, soit dans celle des *Œuvres de Wallis*, pour qu'une réimpression fût sans intérêt; d'un autre côté, ces lettres sont assez faciles à lire, les notations n'y jouent qu'un rôle tout à fait secondaire, et d'ailleurs se rapprochent déjà beaucoup des nôtres. Il me suffira de remarquer que qui voudra réellement connaître toutes celles qu'employait Wallis devra recourir aux sources; c'est ainsi, pour ne citer qu'un exemple, qu'au symbolisme : $a \backsim b$ pour désigner la différence, prise en valeur absolue, des deux nombres a et b, j'ai substitué le suivant : $|a - b|$.

II.

J'ai à remercier les mathématiciens qui ont bien voulu m'indiquer quelques fautes d'impression dans les deux premiers Tomes; elles sont signalées dans l'Errata à la fin de ce Volume. J'ai l'espoir que le même concours bénévole ne me fera pas défaut pour le Tome III, qui sera suivi d'un *Supplément* d'une vingtaine de feuilles d'impression, renfermant, avec divers extraits concernant Fermat et tirés des écrits de Mersenne et des Lettres de Descartes et de Huygens, les index annoncés dans l'Avertissement du Tome I, index qu'il sera plus commode de manier dans un fascicule séparé.

Comme pièces nouvelles et inédites, je ne puis, jusqu'à présent, en annoncer que deux pour ce *Supplément* : 1° la lettre à Mersenne de Cavalieri, contenant les questions auxquelles Fermat a répondu par la Pièce insérée Tome I, pages 195 à 198; cette lettre de Cavalieri est datée du 23 novembre 1641; 2° une lettre sans date, mais postérieure à 1651, adressée à Fermat par un M. de Magnas et décrivant une aurore boréale. Je voudrais espérer qu'avant la fin de l'année 1896 quelque découverte plus importante permettra de combler une des nombreuses lacunes qui subsistent malheureusement dans la correspondance du géomètre de Toulouse.

Avant de terminer, j'ai à signaler deux rectifications concernant les deux premiers Volumes, et qui sont assez importantes pour être mentionnées en dehors de l'Errata.

Tout d'abord dans le second Volume, nous avons omis, pour la lettre de Fermat à Digby, du 15 août 1657 (n° 84 de la Correspondance), un long postscriptum que Wallis n'a inséré que dans la réédition de son *Commercium*. On le trouvera ci-après pages 421-422.

En second lieu, dans l'Avertissement, en tête du premier Volume (p. XIX-

XX), pour reproduire le billet autographe de Fermat conservé dans le Volume $\frac{183}{E}$ de la Bibliothèque de la Ville de Toulouse, je m'étais servi du texte déjà publié par Libri, en prenant soin de le faire collationner sur l'original; cette précaution, on le verra, était insuffisante. D'autre part, sur la foi de M. Charles Henry qui affirmait ([1]) l'identité des écritures d'après un facsimile que lui avait adressé le bibliothécaire de Toulouse et non, il est vrai, d'après l'original, j'ai indiqué Carcavi comme ayant écrit la note au bas du billet, comme étant par conséquent le destinataire. J'ai même, dans cette hypothèse, essayé d'expliquer l'éloge hyperbolique dont Fermat a gratifié ce destinataire, en lui offrant les *Massimi Sistemi* de Galilée.

Des doutes m'étant survenus à ce sujet en raison de la nature des relations entre Galilée et Carcavi ([2]), j'ai demandé et obtenu la communication du Volume de Toulouse, et j'ai tout d'abord reconnu que le texte de Fermat n'avait pas été exactement reproduit. En dehors des différences orthographiques, il y en a une autre assez importante (parce qu'elle prouve une singulière intimité entre Fermat et celui auquel il s'adresse); la véritable lecture est indiquée en italique dans le texte nouveau que je donne ci-après :

« Peust estre croirés uous que pour me mettre en reputation et per purgar, » comme on dit, la mala fama, ie pretens m'eriger en donneur de liures. Vous » en croirés ce qu'il uous plairra, mais si c'estoit par hasard uostre pensée, » *asseurés uous, mon cher*, que uous n'aués pas touché au but. Ie ne songe » en uous offrant les dialogues Italiens du systeme de Galilée qu'a faire une » action de iustice, et a uous rendre maistre de l'ouurage d'un autheur qui » ne passeroit, s'il uiuoit, que pour uostre disciple. Receués, donc, ce pre- » sent, comme uous estant deu, et ne me considerés point en ce rencontre » comme un adroit negotiateur mais comme un bon iuge, qui rejette comme » une tentation lidée de uostre grande et fameuse bibliotheque et ne se » souuient que de la passion qu'il a d'estre tout à uous. »

Suit, d'une écriture inconnue, la note :

« Ce billet est de Monsieur de fermat coer au parlemant qui ma fait presant » de ce liure. »

([1]) *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat*, page 10.

([2]) Avant même de quitter Toulouse, Carcavi avait formé le projet de donner une édition des Œuvres de Galilée, et il a entretenu, dans ce but, avec ce dernier, une Correspondance qu'il a poursuivie étant à Paris. Il est dès lors presque certain qu'il a possédé de bonne heure le Dialogue des *Massimi Sistemi* et que Fermat ne l'ignorait pas; d'autre part, l'éloge hyperbolique, adressé à un éditeur ou traducteur, aurait été une maladresse

Le Volume qui contient ce billet ne présente aucun indice qui puisse faire reconnaître par qui il a été possédé après 1642, date de la mort de Galilée; il porte au contraire la marque de la bibliothèque du célèbre érudit Peiresc, mort en 1637. Cette circonstance, et tout aussi bien la rareté de cette édition de l'Ouvrage condamné par l'autorité ecclésiastique, peuvent expliquer l'expression « adroit négociateur » dans le texte du billet de Fermat.

Quant à l'écriture de la note au bas du billet, elle offre avec celle de Carcavi des différences assez marquées, ainsi que j'ai pu le constater en comparant une lettre autographe écrite par lui à Mersenne le 17 mars 1648 et actuellement conservée à la Biblothèque nationale (français nouv. acq. 6204, p. 296). Mais, pour identifier avec certitude cette écriture inconnue avec celle d'un ami intime de Fermat, possédant une bibliothèque d'une certaine importance, j'ai fait de nombreuses tentatives qui sont restées infructueuses; je ne puis donc soumettre au lecteur que des probabilités.

Je dois en tout cas témoigner ma profonde reconnaissance à deux amis qui m'ont secondé avec ardeur dans cette recherche et m'ont procuré des photographies de spécimens d'écritures difficiles à trouver, M. Baillaud, directeur de l'Observatoire de Toulouse, et M. Hochart, de Bordeaux.

La circonstance que d'une part, après la mention « conseiller au parlement », le siège de la cour ne se trouve pas indiqué; que d'un autre côté le Volume offert par Fermat se retrouve actuellement dans la bibliothèque de Toulouse, font présumer *a priori* que l'ami du grand géomètre habitait cette ville. Mais dans ce cas, il faut admettre que l'éloge hyperbolique est en fait une plaisanterie adressée à un intime pour un motif dont nous n'avons pas le secret, et d'autre part, à moins de supposer que l'écriture ne soit celle d'un secrétaire (ce qui rendrait le problème à peu près insoluble), on ne peut la rapprocher que de celle d'un seul personnage, Gaspard de Fieubet, qui fut nommé en 1653 premier président du parlement de Toulouse, où il était auparavant procureur général.

L'écriture de Fieubet est bien, au premier aspect, du même genre que celle des deux lignes au bas du billet de Fermat; toutefois, dans le détail, pour la forme de certaines lettres, il y a des différences sensibles; Fieubet a possédé, de fait, une bibliothèque importante; mais il est plus que douteux qu'il ait jamais été assez intime avec Fermat pour que celui-ci, s'adressant à un procureur général, ait pu lui écrire « mon cher ». Et même un rapport secret de l'intendant de Toulouse, adressé à Colbert en 1663 (*Correspondance administrative sous le règne de Louis XIV*, Tome II, page 853) signale Fermat comme n'étant pas des amis du premier président.

Si l'on écarte les motifs qui font croire que le donataire devait être Toulousain, il est un ami certainement très intime de Fermat auquel on peut penser. C'est Etienne d'Espagnet, conseiller au parlement de Bordeaux, et fils du président Jean d'Espagnet, avec lequel on l'a parfois confondu, et qui avait commencé à former une bibliothèque considérable. Érudit en toute science, Etienne d'Espagnet ne s'est pas seulement occupé, entre autres choses, comme son père, de philosophie hermétique, il réussit assez bien dans la fabrication des verres de lunettes astronomiques, pour que, dans une lettre inédite à Boulliau du 2 décembre 1667 (Bibl. nat. fr. 13044, f° 244 verso) Tito-Livio Burattini mentionne Auzout et lui comme étant ceux qui ont particulièrement réussi en France à obtenir des verres « esquisitissimi ». Ne serait-ce pas là précisément la clef de l'éloge hyperbolique?

Les spécimens de son écriture dont M. Hochart a pu me procurer une photographie remontent à 1635, c'est-à-dire à une époque sensiblement antérieure à celle du cadeau de Fermat. Il n'y a pas de différences sensibles dans le détail, mais l'écriture est notablement moins grosse, ce qui peut s'expliquer par la différence de l'âge.

En résumé, je considère la question comme n'étant pas résolue, mais j'estime que la probabilité penche pour l'identification avec Etienne d'Espagnet, et je serais tenté de rapprocher la date du billet des dernières années de Fermat ([1]).

([1]) *P.-S.* Je dois à l'obligeance de M. Favaro le renseignement suivant : D'après une lettre de Heinsius à Léopold de Médicis, en date du 4 mars 1661 (publiée par Targioni Tozzetti dans ses *Notizie degli aggrandimenti delle scienze fisiche accaduti in Toscana*, Florence, 1780, page 301), Golius, interrogé sur les manuscrits inédits de Viète, dont la communication avait été promise aux Elzevirs par Espagnet, aurait répondu que ce dernier, tombé en disgrâce, avait été exilé de Bordeaux, et qu'il ne savait plus où le trouver — Cet exil dut être la conséquence du rôle assez important joué par Espagnet pendant la Fronde. Se serait-il, pendant plus ou moins longtemps, retiré à Toulouse? En 1662, cependant, il était rentré à Bordeaux, et, en 1666, son fils aîné, Jean, le remplaçait dans sa charge (indications que je dois à un jeune érudit bordelais, M. Dast de Boisville, et qu'il a tirées des Archives départementales de la Gironde).

Paris, le 25 février 1896.

PAUL TANNERY.

TRADUCTION

DES

ÉCRITS LATINS DE FERMAT.

RESTITUTION

DES

DEUX LIVRES DES LIEUX PLANS

D'APOLLONIUS DE PERGE.

LIVRE I.

Ce que sont les lieux plans est chose bien connue; ce sujet fut traité en deux livres par Apollonius, au témoignage de Pappus qui, au début de son Livre VII, en donne les diverses propositions, mais dans un langage passablement obscur ou du moins mal compris du traducteur (il ne m'a pas été possible d'examiner le manuscrit grec). C'est cette théorie, la plus belle, semble-t-il, de toute la Géométrie, que nous arrachons à l'oubli, pour opposer fièrement Apollonius traitant des Lieux plans, aux Apollonius français, bataves et illyriens; car nous avons la confiance assurée qu'il n'y a pas d'ouvrage où resplendissent plus vivement les merveilles de la Géométrie; pour le faire avouer aussitôt, je commence immédiatement.

Les propositions du Livre I sont les suivantes :

Proposition I.

« *Si on mène deux lignes, soit d'un point donné, soit de deux, et soit en ligne droite, soit parallèles, soit sous un angle donné, enfin ayant*

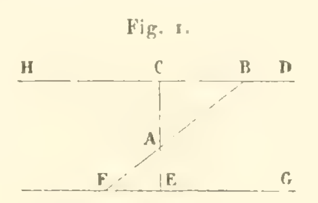
entre elles un rapport donné, ou comprenant un rectangle donné; si l'extrémité de l'une est sur un lieu plan donné de position, l'extrémité de l'autre sera également sur un lieu plan donné de position, tantôt du même genre, tantôt d'un genre différent, tantôt situé de même par rapport à la ligne droite, tantôt de façon contraire. »

On peut facilement diviser cette proposition en huit autres et chacune de celles-ci en cas nombreux. Le défaut de ponctuation semble au reste avoir embarrassé le traducteur, et Pappus lui-même paraît être tombé dans l'obscurité par trop de concision. Voici comment nous éclaircissons le tout, par notre division en huit parties.

I. Proposition. — *Si d'un point donné on mène en ligne droite deux lignes dans un rapport donné, et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position (c'est-à-dire une droite ou une circonférence de cercle donnée de position), l'extrémité de l'autre sera sur une droite ou une circonférence de cercle donnée de position.*

Soit A le point donné (*fig.* 1), par lequel on mène en ligne droite AB et AF dans un rapport donné. Soit par exemple le point B sur la

Fig. 1.



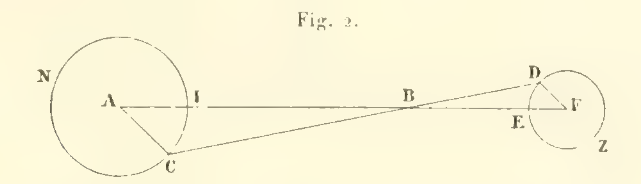
ligne droite HCBD donnée de position, je dis que le point F est aussi sur une droite donnée de position.

Du point A, j'abaisse sur la droite HD la perpendiculaire AC, le point C sera donné; je prolonge CA jusqu'en E, en prenant $\frac{CA}{AE}$ dans le rapport donné; AE sera donné, donc le point E. Par le point E je mène GEF parallèle à la droite HD; elle sera donnée de position et passera par le point F, car toutes les droites, passant par un point donné et coupant deux parallèles, sont divisées dans le même rapport.

Il est donc clair que toute droite passant par le point A et terminée aux parallèles données de position sera partagée dans le rapport donné.

Soient maintenant donnés le point B (*fig.* 2) et le cercle ICN dont

Fig. 2.



le centre est A. Menez BA qui coupe la circonférence en I, et prolongez IB suivant BE, en sorte que le rapport $\frac{IB}{BE}$ soit égal au donné. Continuez le prolongement jusqu'en F en sorte que $\frac{AI}{EF} = \frac{IB}{BE}$, et de F comme centre, avec FE comme rayon, décrivez la circonférence de cercle EDZ qui, d'après la construction, sera évidemment donnée de position. Je dis que toutes les droites passant par le point B et terminées de part et d'autre aux circonférences des cercles donnés de position seront partagées dans le rapport donné.

Soit menée par exemple CBD; joignez CA, DF. On a

$$\frac{IB}{BE} = \frac{AI}{EF}; \quad \text{donc, par somme,} \quad \frac{BA}{BF} = \frac{AI(=AC)}{EF(=FD)}.$$

D'ailleurs les angles ABC, FBD opposés par le sommet sont égaux. Les triangles sont donc semblables et par conséquent

$$\frac{CD}{BD} = \frac{BA}{BF}, \quad \text{c'est-à-dire le rapport donné.}$$

Si donc du point donné B on mène deux droites, par exemple BC, BD, en ligne droite et dans le rapport donné, et que BC se termine à une circonférence donnée de position, BD se terminera aussi à une autre circonférence donnée de position.

Si les droites sont prolongées jusqu'aux arcs concaves des cercles, la proposition reste vraie.

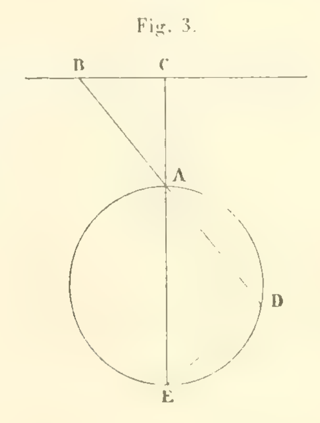
Nous avertissons que dans nos démonstrations nous n'insistons pas

sur les détails évidents d'eux-mêmes, et que nous n'examinons pas les différents cas qui peuvent se déduire sans difficulté de ce que nous avons dit.

2. PROPOSITION. — *Si d'un point donné on mène dans le prolongement l'une de l'autre deux droites dont le rectangle soit donné, et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'extrémité de l'autre.*

Soit A le point donné (*fig.* 3), et en premier lieu une droite BC donnée de position; abaissez sur elle la perpendiculaire AC; le point C

Fig. 3.



sera donné. Prolongez cette perpendiculaire et soit CA × AE égal au rectangle donné. Sur AE comme diamètre, décrivez le cercle ADE. Je dis que toutes les droites menées par le point A et terminées d'un côté à la droite, de l'autre à la circonférence du cercle (qui est évidemment donné de position), seront partagées au point A en sorte que le rectangle de leurs segments soit égal à l'aire donnée.

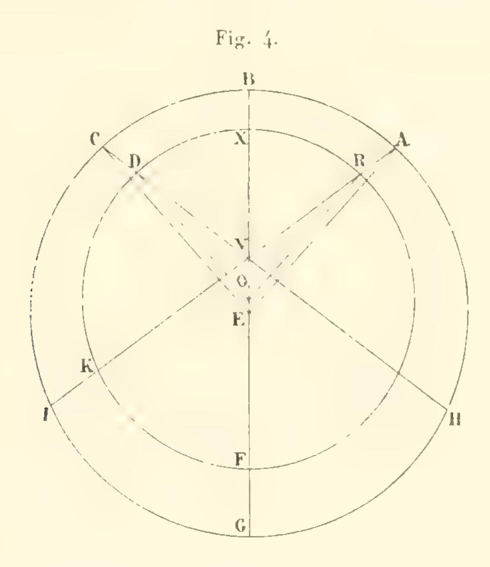
Soit en effet, par exemple, la droite DAB; joignez DE. L'angle ADE inscrit dans un demi-cercle est droit et les angles BAC, DAE, opposés par le sommet, sont égaux. Les triangles DAE, ACB seront donc semblables et par conséquent BA × AD = CA × AE qui est donné.

Si donc par le point A on mène, dans le prolongement l'une de l'autre, les deux droites AB, AD, et que l'extrémité de l'une, à savoir

AB, se trouve sur la droite BC donnée de position, l'extrémité de l'autre se trouvera sur un lieu plan, c'est-à-dire le cercle ADE, donné de position.

Soit maintenant donné le point V (*fig.* 4), avec le cercle BIGH de centre E; joignez EV; prolongez jusqu'en B, VB sera donné; prolon-

Fig. 4.



gez de l'autre côté jusqu'en F en sorte que $BV \times VF$ soit égal au rectangle donné. Soit encore $GV \times VX$ égal à ce rectangle. Sur XF comme diamètre, décrivez le cercle XKF qui est évidemment donné de position. Je dis que les droites, passant par le point V et terminées aux deux cercles, sont partagées au point V en sorte que le rectangle de leurs segments soit égal au rectangle donné.

Soit par exemple menée AVKI, je dis que $AV \times VK$ est égal au rectangle donné.

Soit pris le centre O du petit cercle, que nous supposerons coupé en R par la droite AVKI; joignez RO, AE. Nous avons supposé $GV \times VX = BV \times VF$. Par conséquent $\frac{GV}{VB} = \frac{FV}{VX}$. *Componendo,* prenant la moitié des antécédents, et *convertendo,*

$$\frac{EB\,(=EA)}{EV} = \frac{OX\,(=OR)}{OV}.$$

Les deux triangles OVR, VEA ont de plus l'angle EVA commun, ils seront donc semblables.

Par conséquent : $\frac{AV}{RV} = \frac{AE}{RO}\left(\text{ou } \frac{EB}{OX}\right) = \frac{VE}{VO}$. Mais $\frac{EB}{OX} = \frac{VE}{VO}$; donc, par différence, $\frac{EB}{OX} = \frac{VB}{VX}$. Donc $\frac{AV}{RV} = \frac{BV}{XV}$.

Nous prouverons de même que $\frac{GV}{VF} = \frac{IV}{KV}$ ou *vicissim* $\frac{GV}{VI} = \frac{FV}{VK}$. Mais $\frac{FV}{VK} = \frac{VR}{VX}$ (les rectangles $KV \times VR$, $FV \times VX$, dans le cercle, étant égaux), et nous avons prouvé que $\frac{VR}{VX} = \frac{VA}{VB}$. Donc, d'un côté, $\frac{FV}{VK} = \frac{VA}{VB}$. Donc $KV \times VA = FV \times VB$, rectangle donné.

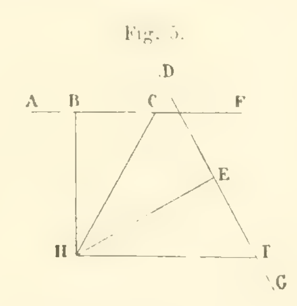
D'autre part, $\frac{GV}{IV} = \frac{VR}{VX}$, et par suite $IV \times VR = GV \times VX$, rectangle donné.

Par conséquent, si par le point V on mène dans le prolongement l'une de d'autre deux droites AV, VK, dont le rectangle soit donné, et que l'extrémité de l'une, soit VA, se trouve sur un cercle donné de position, l'extrémité de l'autre se trouvera sur un lieu plan (le cercle XKF) donné de position.

3. Proposition. — *Si d'un point donné on mène sous un angle donné deux lignes dans un rapport donné, et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'extrémité de l'autre.*

Soit H le point donné (*fig.* 5) et, en premier lieu, une droite AF

Fig. 5.



donnée de position. La perpendiculaire HB abaissée sur elle sera donnée.

Soit l'angle BHE égal à l'angle donné, et $\frac{BH}{HE}$ dans le rapport donné.

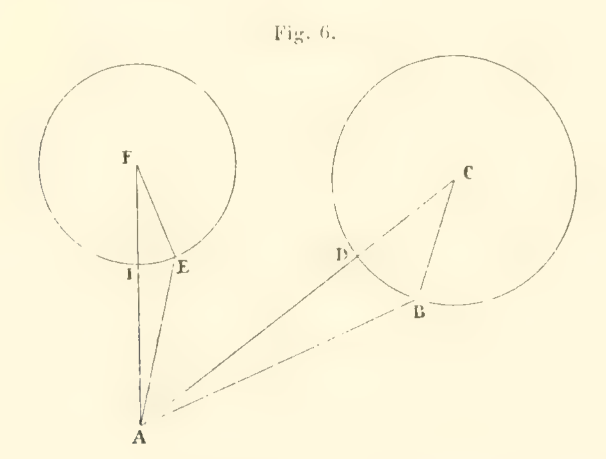
La droite HE sera donnée de position, ainsi que le point E. De ce point E j'élève sur la droite HE la perpendiculaire indéfinie DEG; elle sera donnée de position. Prenant sur AF un point C quelconque, et joignant HC, je fais l'angle CHI égal au donné : je dis que $\frac{HC}{HI}$ est dans le rapport donné.

En effet, les angles BHE, CHI étant égaux, si je retranche la partie commune CHE, les angles BHC, EHI seront égaux. Ceux en B et E sont droits; donc les triangles HBC, HEI sont semblables. Donc $\frac{HB}{HC} = \frac{HE}{HI}$, et *vicissim* $\frac{HB}{HE} = \frac{HC}{HI}$: c'est le rapport donné.

Si donc du point donné H on mène deux droites HC, HI sous un angle donné CHI et dans un rapport donné, et si le point C de l'une HC se trouve sur une droite donnée de position, l'extrémité de l'autre se trouve sur un lieu plan, la droite DG, dont la position est donnée, comme il a été prouvé.

Si la première extrémité se trouve sur un cercle, soit A le point

Fig. 6.



donné (*fig.* 6), IE le cercle donné de position, F son centre. Joignez FA qui coupe le cercle en I; soit un angle IAD égal au donné, et $\frac{IA}{AD}$ dans le rapport donné. AD sera donnée de position ainsi que le point D. Prolongez et soit $\frac{IA}{AD} = \frac{IF}{DC}$. De C comme centre, décrivez le cercle DB,

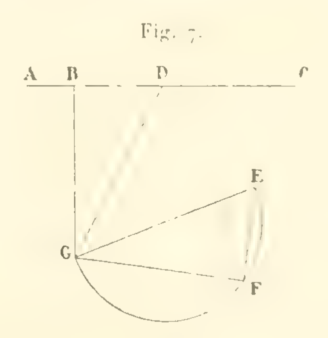
qui est évidemment donné de position. Soit pris sur le premier cercle un point E quelconque; joignez EA; soit l'angle EAB égal au donné, et le point B sur le second cercle, je dis que $\frac{AE}{BA}$ est le rapport donné.

Joignant FE, BC, on prouvera, comme ci-dessus, que les angles FAE, CAB sont égaux et, en raisonnant comme dans la proposition 1 (2e figure), que les triangles FAE, CAB sont semblables. Donc $\frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB}$, et *vicissim* $\frac{AF}{AC}$, c'est-à-dire $\frac{AI}{AD} = \frac{AE}{AB}$. Donc le rapport $\frac{AE}{AB}$ est le donné et le sens de la proposition est évident, aussi bien que la conséquence.

4. Proposition. — *Que d'un point donné on mène deux lignes sous un angle donné et telles que leur rectangle soit donné; si l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'autre.*

Soit G le point donné (*fig.* 7) avec la droite AC donnée de position, sur laquelle j'abaisse la perpendiculaire GB; soit BGE l'angle donné

Fig. 7.



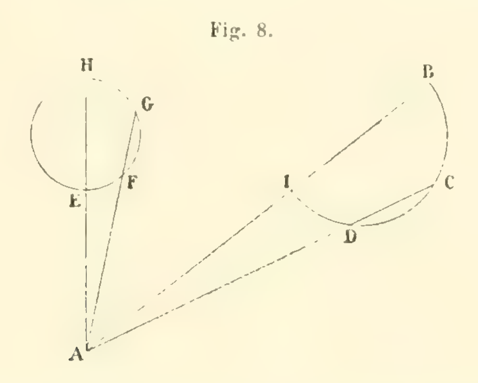
et BG × GE l'aire donnée. Sur GE, je décris le demi-cercle GEF. Prenant sur la droite donnée de position un point quelconque D, je joins DG, et fais l'angle DGF égal au donné; je dis que DG × GF est égal à l'aire donnée.

Joignant FE, je prouverai, comme dans la proposition précédente, l'égalité des angles BGD, EGF; mais ceux en B, F sont égaux comme droits; on conclura la similitude des triangles BGD, EGF, l'égalité

des rectangles BG × GE, GD × GF, et la vérité de la proposition. Si donc, etc.

Soit maintenant A (*fig.* 8) le point donné, avec le cercle HGE donné de position. Je mène par son centre la droite AEH qui coupe la

Fig. 8.



circonférence aux points E, H. Soit HAB l'angle donné, et HA × AI, aussi bien que EA × AB, égal à l'aire donnée. Le demi-cercle décrit sur IB (lequel est évidemment donné de position) satisfera à la question. En effet, menons par exemple GFA, et faisons l'angle GADC égal au donné. Je dis que les rectangles GA × AD et FA × AC sont égaux à l'aire donnée.

Car, comme HA × AI = EA × AB, on a $\frac{HA}{AE} = \frac{AB}{AI}$. Mais, d'après le raisonnement de la proposition précédente, l'égalité des angles HAG, BAC est évidente ; aussi bien, comme dans la proposition 2, on déduira facilement $\frac{HA}{GA} = \frac{BA}{AC}$. Mais $\frac{HA}{GA} = \frac{FA}{AE}$, donc

$$\frac{FA}{AE} = \frac{BA}{AC}, \quad \text{d'où} \quad FA \times AC = BA \times AE, \text{ le rectangle donné,}$$

D'autre part :

$$\frac{BA}{AC} = \frac{AD}{AI}, \quad \text{d'où} \quad GA \times AD = HA \times AI, \text{ le rectangle donné.}$$

La proposition est ainsi entièrement établie ; si donc, etc.

Dans ce cas, j'ai pris le point A en dehors du cercle donné de posi-

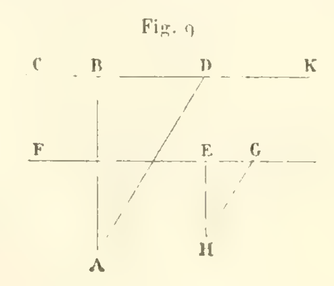
tion; mais on peut le prendre au dedans, comme dans le second cas de la proposition 2.

Les quatre propositions précédentes supposent un seul point donné, les suivantes deux.

5. Proposition. — *Si par deux points donnés on mène deux lignes parallèles dans un rapport donné, et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'autre.*

Soient A, H (*fig.* 9) les deux points, CBDK une droite donnée de po-

Fig. 9



sition, sur laquelle on abaissera la perpendiculaire AB. Soit HE parallèle à cette dernière, et $\frac{AB}{HE}$ le rapport donné; le point E sera donné. Menez par ce point FEG perpendiculaire à HE et parallèle à la droite donnée de position. Je dis que toutes les parallèles, menées par les points A, H et terminées aux droites CD, FG données de position, seront dans le rapport donné $\frac{AB}{HE}$.

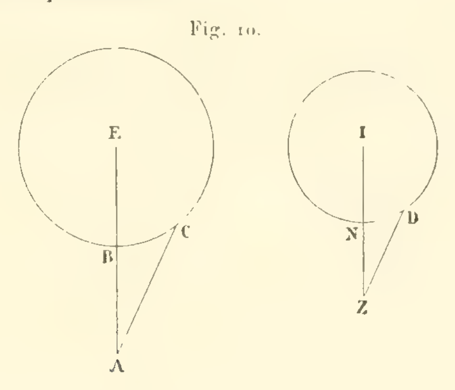
En effet, les angles BAD, EHG seront égaux, comme les droits en B, E; donc les triangles BAD, EHG seront semblables. Le reste est facile.

Si donc des deux points A, H, on mène les parallèles AD, HG dans le rapport donné, et que AD se termine à une droite donnée de position, HG se terminera aussi à une droite donnée de position, par conséquent à un lieu plan.

Dans la figure ci-contre (*fig.* 10), soient donnés les points A, Z et, de position, le cercle BC de centre E. Joignez AE coupant le cercle en B; menez à AE la parallèle ZN et soit $\frac{AB}{ZN}$ dans le rapport donné. Pro-

longez ZN jusqu'en I, $\frac{BE}{NI}$ étant aussi dans le rapport donné. Le cercle décrit de I comme centre, avec IN comme rayon, sera donné de position et satisfera à la question.

Fig. 10.

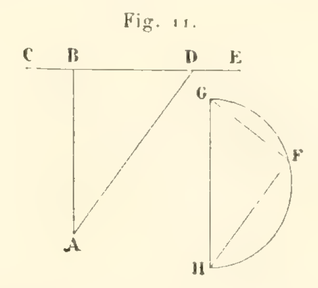


En effet, si l'on mène les parallèles AC, ZD, rencontrant les cercles aux points C, D, $\frac{AC}{DZ}$ sera dans le rapport donné; car l'égalité des angles BAC, NZD ressort du premier cas de cette proposition; le reste résulte du second cas de la proposition 3.

6. Proposition. — *Si par deux points donnés on mène deux parallèles dont le rectangle soit donné, et que l'extrémité de l'une soit sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'autre.*

Soient donnés les deux points A, H (*fig.* 11), et de position la droite CE, sur laquelle on abaissera la perpendiculaire AB. Menez à

Fig. 11.

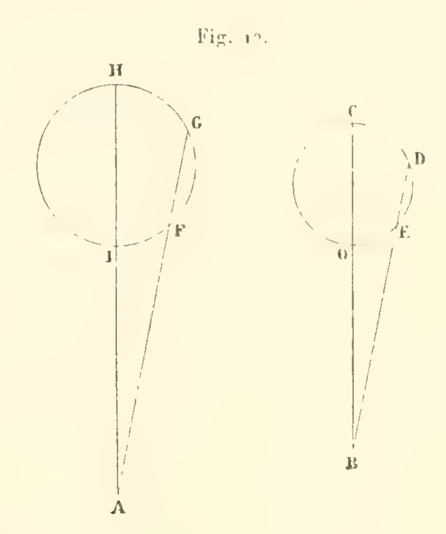


cette dernière la parallèle HG, et soit AB × HG égal au rectangle donné. La droite HG sera donnée et le demi-cercle HGF décrit sur elle satisfera à la question.

En effet, qu'on mène les parallèles quelconques AD, HF, et qu'on joigne GF, en reprenant les démonstrations précédentes, on conclura la similitude des triangles BAD, GHF et l'égalité de AD × HF au rectangle donné BA × HG. Si donc par deux points, etc.

Dans le second cas, soient donnés les points A, B (*fig.* 12), et de position le cercle IFGH. Soient menées AIH par son centre et la parallèle BC; soient AI × BC et AH × BO égaux au rectangle donné; le demi-cercle décrit sur la droite OC satisfait à la question.

Fig. 12.



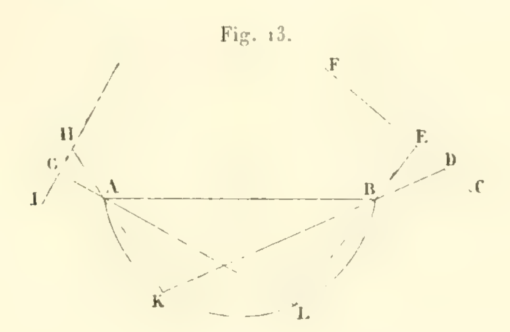
En effet, si l'on mène les parallèles AFG, BED, les angles HAG, CBD seront égaux et l'on démontrera l'égalité au rectangle donné de AG × BE et de AF × BD, comme dans le second cas de la proposition 4.

7. Proposition. — *Si par deux points donnés on mène sous un angle donné deux droites dans un rapport donné, et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'extrémité de l'autre.*

Soient donnés les points A, B (*fig.* 13), et de position la droite IGH. Sur BA décrivez le segment de cercle ALB capable de l'angle donné. Du point A abaissez sur la droite IH la perpendiculaire AG, que vous prolongerez jusqu'à sa rencontre avec la circonférence en L. Menez

LBE, et soit $\frac{AG}{BE}$ dans le rapport donné. Menez FEDC perpendiculaire à BE, et prenez sur l'arc de cercle un point quelconque K, duquel vous mènerez, par A et B, les droites KAH, KBD rencontrant en H et D les droites IH, FC. Je dis que $\frac{AH}{BD}$ est dans le rapport donné $\frac{AG}{BE}$.

Fig. 13.



Car, s'il en est ainsi, les triangles AGH, BED seront semblables : donc les angles GAH, EBD seront égaux, ainsi que leurs opposés par le sommet KAL, KBL. Mais cette dernière égalité a lieu, puisque ces angles sont inscrits dans le même segment, et il est facile de remonter de l'analyse à la synthèse.

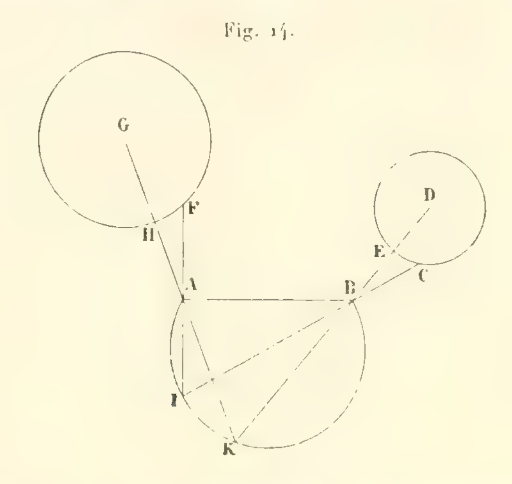
Si donc, par deux points A, B, on mène deux droites AH, BD, sous l'angle donné HKD $<$ et ayant entre elles un rapport donné $>$, si l'extrémité de AH est sur la droite IH donnée de position, l'extrémité de BD sera sur la droite FC, donnée aussi de position, d'après la construction.

Soient maintenant donnés les points A, B (*fig.* 14), et de position le cercle HF; sur AB décrivez le segment de cercle AKB capable de l'angle donné. Soit G le centre du cercle HF; joignez AHG, prolongez-la jusqu'à sa rencontre en K avec l'arc de cercle, menez KBE, et soit $\frac{AH}{BE}$ dans le rapport donné. Prolongez BE jusqu'en D, en sorte que $\frac{HG}{DE}$ soit aussi dans le rapport donné. Le cercle décrit de D comme centre sera donné de position et donnera la solution de la question.

Si en effet on mène IAF, IBC, les angles en A et B seront égaux, et le reste de la démonstration est facile; on voit aussitôt que $\frac{AF}{BC}$ est dans

le rapport donné, et qu'il en est de même si l'on prolonge les droites jusqu'aux arcs concaves. Si donc, etc.

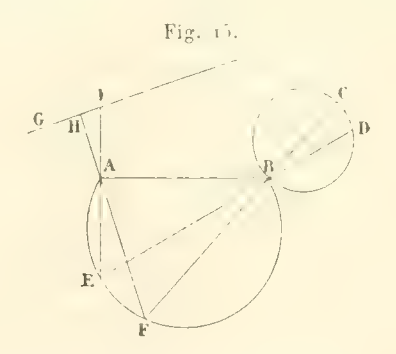
Fig. 14.



8. Proposition. — *Si par deux points donnés on mène deux lignes sous un angle donné et dont le rectangle soit donné, que l'extrémité de l'une soit sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'extrémité de l'autre.*

Soient donnés les deux points A, B (*fig.* 15), et de position la droite GI. Sur AB décrivez le segment de cercle capable de l'angle

Fig. 15.



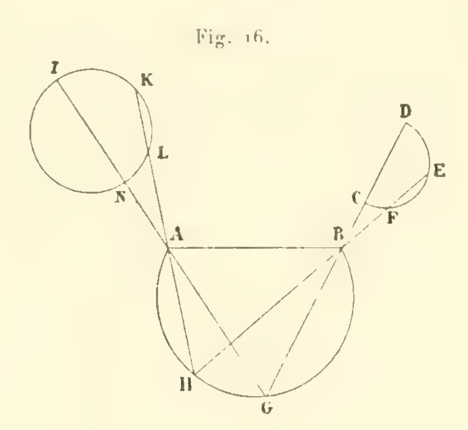
donné; menez AH perpendiculaire sur GI et prolongez-la jusqu'en F. Joignez FB, à prolonger jusqu'en C en sorte que AH × BC soit égal à l'aire donnée. Le cercle décrit sur la droite BC satisfera à la question.

En effet, si l'on prend sur l'arc un point quelconque E, et qu'on joigne EAI, EBD, AI × BD sera égal au rectangle donné.

La démonstration est la même que dans les cas qui précèdent.

Soient maintenant donnés les points A, B (*fig.* 16), et de position le cercle IKL. Sur AB décrivez le segment de cercle capable de l'angle

Fig. 16.



donné. Menez par le centre la droite ANI, à prolonger jusqu'en G; joignez GB, et prolongez en sorte que AI × BC et AN × BD soient égaux à l'aire donnée. Le demi-cercle décrit sur CD satisfera à la question; c'est-à-dire que si l'on prend un point quelconque comme H et qu'on achève la construction de la figure, comme ci-dessus, AK × BF et AL × BE seront égaux au rectangle donné. La démonstration est la même que dans les cas précédents.

Ainsi la proposition est établie, et le premier théorème d'Apollonius ou de Pappus est éclairci.

Il faut remarquer que les cas pour lesquels nous avons indiqué seulement des demi-cercles donnent en fait les cercles entiers; d'ailleurs les diverses situations des données engendrent des cas multiples qu'on pourra, à loisir, déduire facilement des précédents par des raisonnements immédiats.

Pappus ajoute que le lieu plan, sur lequel se trouve l'extrémité de la seconde droite, est *tantôt du même genre, tantôt d'un genre différent*. Ce qui est clair : par exemple, dans la proposition I, il est du même genre; car, si la première droite se termine à une droite, la seconde se termine aussi à une droite; et de même un cercle conduit

à un cercle. Dans la première partie de la proposition 2, au contraire, et dans plusieurs autres cas, le lieu est d'un genre différent.

Pappus ajoute aussi que le lieu est *tantôt situé de même par rapport à la ligne droite, et tantôt de façon contraire*. Ces mots *par rapport à la ligne droite* n'offrent aucun sens et je pense qu'il faut les supprimer. J'explique ainsi ce passage : tantôt le second lieu est placé d'une manière contraire au premier; par exemple, si le premier est la partie convexe de la circonférence, le second sera la partie concave, etc. Des exemples de cette opposition sont donnés dans les propositions ci-dessus.

PROPOSITION II.

« *Si l'on donne une extrémité d'une ligne droite donnée de position, l'autre sera sur une circonférence concave donnée de position.* »

Avec une pareille leçon, la proposition est fausse; il faut, par exemple, aux mots *donnée de position*, substituer ceux-ci : *donnée de grandeur*, et le sens sera : *si l'on donne le diamètre et le centre d'un cercle, l'extrémité du diamètre sera sur un cercle donné de position.* Ce qui est évident de soi et ne mérite pas qu'on s'y arrête davantage.

PROPOSITION III.

« *Si, de deux points donnés, on mène deux droites qui se coupent sous un angle donné, leur point commun sera sur une circonférence concave donnée de position.* »

Cette proposition est évidente de soi, car le segment capable de l'angle donné et décrit sur la droite joignant les deux points est donné, comme l'a enseigné Euclide dans les *Éléments*.

PROPOSITION IV.

« *Si, d'un triangle d'aire donnée, on donne la base de grandeur et de position, le sommet sera sur une droite donnée de position.* »

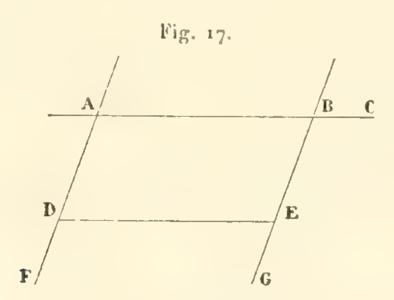
Cette droite sera une parallèle à la base; sa construction et tout le reste se tirent immédiatement du Livre I des *Éléments*.

Proposition V.

« *Si une droite est donnée de grandeur et parallèle à une droite donnée de position, et qu'une de ses extrémités soit sur une droite donnée de position, l'autre extrémité sera aussi sur une droite donnée de position.* »

Soit DE (*fig.* 17) une droite donnée de grandeur et parallèle à la droite AC donnée de position. L'extrémité D est supposée sur une

Fig. 17.



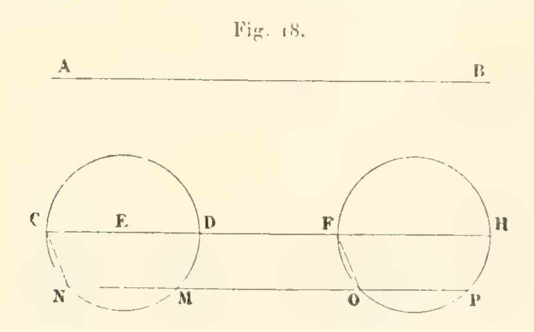
droite AF donnée de position. Si par E vous menez BEG parallèle à AF, elle résout la question.

En effet, toutes les droites, comprises entre ces deux parallèles et parallèles elles-mêmes à la droite AC donnée de position, sont égales entre elles; ce qui est clair d'après la construction même.

Si donc une extrémité de l'une d'elles est sur AF, l'autre sera sur BG, comme le veut la proposition. Il est facile de l'étendre à des cercles.

Soit en effet AB (*fig.* 18) une droite donnée de position, à laquelle

Fig. 18.



est parallèle NO donnée de grandeur. Soit le point N sur la circonfé-

rence du cercle CNM donné de position. Je dis que le point O est sur un cercle donné de position.

Soit E le centre du cercle CNM; je mène le diamètre parallèle à AB et je le prolonge jusqu'en F, en sorte que CF = NO, la droite donnée. La droite CF sera donnée de position et de grandeur; je la prolonge en faisant FH = CD. Le cercle décrit sur FH résout la question, car le point O sera sur sa circonférence.

En effet, soit le point O sur la circonférence du cercle FOP : les droites CN, FO, joignant les extrémités des parallèles égales CF, NO, seront égales et parallèles : donc les angles NCD, OFH seront égaux; mais il en est ainsi, puisque les droites CD, FH, égales entre elles, sont parallèles aux droites NM, OP.

La proposition de Pappus peut donc être conçue plus généralement comme suit :

Si une droite est donnée de grandeur et parallèle à une droite donnée de position, et qu'une de ses extrémités soit sur un lieu plan donné de position, l'autre extrémité sera aussi sur un lieu plan donné de position.

Proposition VI.

« *Si d'un point on mène, à deux droites parallèles ou concourantes données de position, deux droites sous des angles donnés, et dans un rapport donné ou bien dont l'une, plus une droite dans un rapport donné avec l'autre, fait une somme donnée, le point sera sur une droite donnée de position.* »

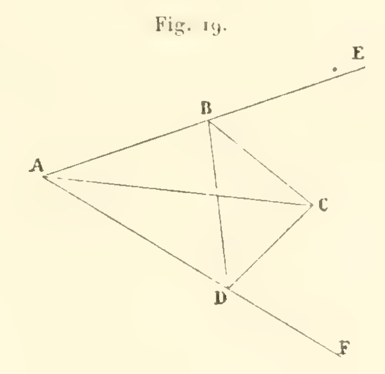
Cette proposition comprend deux parties, dont voici la *première :*

Soient deux droites AE, AF (*fig.* 19) données de position et se coupant en A. Du point C, je leur mène deux droites CB, CD sous les angles donnés CBA, CDA. Soit donné le rapport $\frac{BC}{CD}$. Je dis que le point C est sur une droite donnée de position.

Joignez AC, BD; dans le quadrilatère ABCD, on a trois angles donnés : ABC, ADC, BAD; l'angle BCD est donc donné. Le rapport $\frac{BC}{CD}$ est

aussi donné par hypothèse, donc le triangle BDC est donné d'espèce, donc les angles CBD, CDB, donc par différence les angles ABD, ADB. Donc le triangle ABD est donné d'espèce, donc le rapport $\frac{AB}{BD}$; mais $\frac{BD}{BC}$ l'est aussi (puisqu'il est prouvé que le triangle BDC est donné d'espèce), donc $\frac{AB}{BC}$ le sera. Mais BA est donnée de position, ainsi que le point A; donc AC est donnée de position, et si sur cette droite on

Fig. 19.

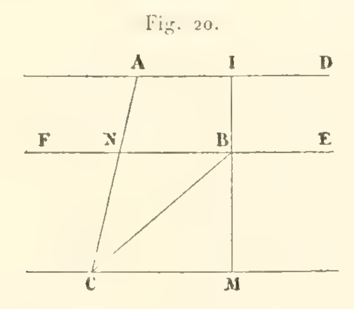


prend un point quelconque, et qu'on mène de ce point aux droites données des droites sous les angles donnés, on prouvera que les menées sont toujours dans le rapport donné.

Second cas, lorsque les droites données sont parallèles :

Soient les droites CA, CB (*fig.* 20), sous les angles donnés CAD, CBF, et dans le rapport donné. L'angle CNB est donné, comme égal.

Fig. 20.



à cause des parallèles, au donné CAD; donc le triangle CNB est donné d'espèce, donc le rapport $\frac{CN}{CB}$; mais, par hypothèse, $\frac{CB}{CA}$ est donné; donc

$\frac{CN}{CA}$ le sera, et il est dès lors facile de prouver que C est sur une droite donnée de position.

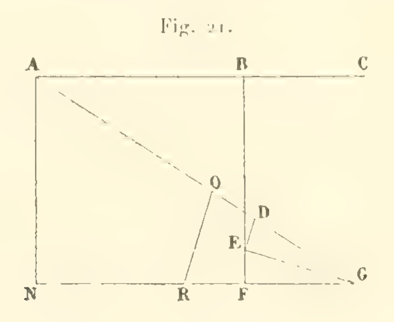
Construction : Par le point B quelconque, je mène la perpendiculaire IBM; IB est donné. Soit $\frac{AN}{NC} = \frac{IB}{BM}$. Par le point M je mène aux deux données une parallèle qui satisfera à la question, comme il est facile de le démontrer.

Si donc d'un point l'on mène, à deux droites parallèles ou concourantes données de position, des droites sous des angles donnés et dans un rapport donné, le point sera sur une droite donnée de position.

Voici maintenant la *seconde* partie de la proposition :

Soient données les droites AC, AG (*fig.* 21), concourant en A. Menez AN faisant avec la droite AC l'angle donné CAN, et égale à la

Fig. 21.



droite donnée. Menez NG parallèle à AC, et soit ROG l'autre angle donné. D'après la première partie de cette proposition, menez GE telle que si, d'un point quelconque E pris sur cette droite, on mène ED, EF parallèles à RO, AN, elles soient dans le rapport donné; GE sera donnée de position, d'après ce qui a été démontré. Prolongez FE jusqu'en B, FB sera donnée de grandeur, comme égale à la donnée AN, à cause des parallèles. Quel que soit donc le point E pris sur la droite GE, si l'on mène de ce point aux droites AC, AG les droites ED, EB sous les angles donnés, BE plus EF, à qui ED est dans le rapport donné, fait la somme donnée, comme le veut la proposition.

Si donc d'un point on mène, à deux droites concourantes données de position, deux droites sous des angles donnés et telles que l'une,

plus une droite dans un rapport donné avec l'autre, fasse une somme donnée, le point sera sur une droite donnée de position.

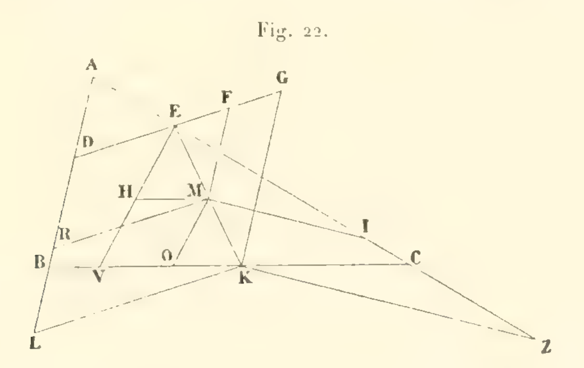
Proposition VII.

« *Soient en nombre quelconque des droites données de position, auxquelles on mène d'un point des lignes droites sous des angles donnés; si le produit d'une ligne donnée et d'une des menées, avec le produit de la ligne donnée et d'une autre menée, etc., est égal au produit d'une donnée et de la dernière des menées, le point sera sur une ligne droite donnée de position* (¹). »

Cette proposition est une extension de la précédente; ce qui a été plus haut démontré pour deux lignes dans la première partie de la proposition VI est proposé ici comme ayant lieu pour un nombre quelconque.

Soient AB, BC, CA (*fig.* 22) trois droites données de position et formant un triangle; il faut trouver une droite, EK par exemple, sur

Fig. 22.



laquelle prenant un point quelconque M, et menant de ce point les droites MR, MO, MI, sous les angles donnés MRA, MOB, MIA, on ait $\frac{OM + MI}{MR}$ dans un rapport donné.

D'après la première partie de la proposition précédente, on trouvera une droite sur laquelle prenant un point quelconque et menant

(¹) La traduction est accommodée au sens admis par Fermat (*voir* t. I, p. 24, note 1).

de ce point des droites sur AB, BC, les menées soient dans le rapport donné. Cette droite est donnée de position, donc le point où elle rencontre AC, soit E. Si l'on mène de ce point EV, ED, parallèles à MO et MR, d'après la construction, $\frac{VE}{ED}$ sera dans le rapport donné. Prenant ensuite les droites AC et AB, par le même procédé, on trouvera un point K, tel que les droites KL, KZ, issues de ce point et sous les angles donnés, c'est-à-dire parallèles à MR, MI, soient dans le rapport donné. On aura donc aussi $\frac{KZ}{KL}$ dans le rapport donné. Si l'on joint EK, un point quelconque pris sur cette droite satisfera à la question.

Soit pris M par exemple, pour profiter de la construction déjà faite; menez MF parallèle à BA, et MH parallèle à BC. Il faut prouver que $\frac{OM + MI}{MR} = \frac{VE}{ED}$, c'est-à-dire le rapport donné.

Menons encore KG parallèle à BA et supposons vrai ce que nous voulons prouver. Nous aurons *vicissim* $\frac{MR}{ED} = \frac{MI + MO}{EV}$; *dividendo :* $\frac{MR - DE}{DE} = \frac{MI + MO - EV}{EV}$. Mais MF étant parallèle à BA, on a $EF = MR - DE$; MH étant parallèle à BC, $EH = EV - MO$. Donc $IM - EH = MO + MI - VE$.

Par conséquent, $\frac{EF}{DE} = \frac{IM - EH}{EV}$, *vicissim :* $\frac{EF}{IM - EH} = \frac{ED}{EV}$, *convertendo :* $\frac{IM - EH}{EF} = \frac{EV}{ED}$, le rapport donné.

Mais par construction, si nous prenons les trois droites EH, EF, IM, on a $\frac{VE}{EH} = \frac{KE}{EM}$, et l'on a aussi dans le même rapport $\frac{KZ}{MI} = \frac{KE}{EM}$, et encore, puisque KG est parallèle à BA, $\frac{GE}{EF} = \frac{KE}{EM}$.

Par conséquent, les trois droites VE, KZ, EG sont proportionnelles aux trois HE, MI, EF; donc $\frac{KZ - EV}{EG} = \frac{MI - EH}{EF}$. Mais nous avons prouvé que $\frac{MI - EH}{EF} = \frac{EV}{ED}$, le rapport donné. Donc $\frac{KZ - EV}{EG} = \frac{EV}{ED}$, le rapport donné, et *vicissim :* $\frac{KZ - EV}{EV} = \frac{EG}{ED}$; *componendo :* $\frac{KZ}{EV} = \frac{GD}{ED}$.

Mais, à cause des parallèles KG, BA, on a KL = DG. Donc *vicissim* : $\frac{KZ}{KL} = \frac{EV}{ED}$, ce qui avait déjà été donné par la construction.

Ainsi est établie la vérité d'une très belle proposition. Il est facile, en procédant de même, d'étendre la construction et la démonstration aux cas suivants, pour un nombre quelconque de lignes. Car, de même que la construction pour deux lignes donne la solution du problème pour trois, la construction pour trois lignes donne la solution pour quatre, la construction pour quatre donne la solution pour cinq, et l'application de la méthode se poursuit toujours de même indéfiniment.

Proposition VIII et dernière.

« *Si d'un point on mène sous des angles donnés, à des parallèles données de position, des droites qui interceptent, à partir de points donnés sur les premières, des longueurs dans un rapport donné, ou produisant une aire donnée, ou dont la somme des carrés ou bien la différence des carrés soit égale à une aire donnée, le point sera sur des droites données de position.*

Si cette proposition était vraie, elle aurait quatre parties, mais nous n'avons trouvé qu'elle fût exacte que pour le *rapport donné*. Écartons donc le reste, pour l'aire produite par les deux droites, pour la somme ou la différence de leurs carrés, et rejetons-le comme faussement inventé ou transporté d'ailleurs.

Je propose donc comme suit le théorème corrigé :

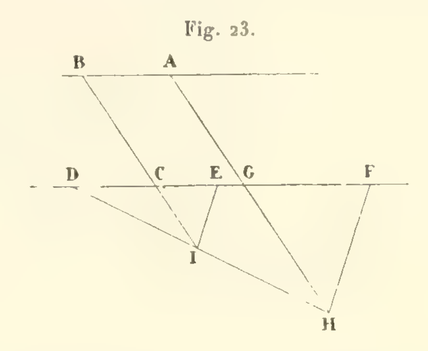
Si d'un point on mène sous des angles donnés, à des parallèles données de position, des droites qui interceptent, à partir de points donnés sur les premières, des longueurs dans un rapport donné, le point sera sur une ligne droite donnée de position.

Voici la construction :

Soient AB, GC (*fig.* 23) les parallèles données, A, F les points donnés sur ces droites, BAH l'un des angles donnés, GFH l'autre. Les points A et F étant donnés, avec les angles à ces sommets, les droites

AH, FH seront données de position, par suite leur point de rencontre H : donc le point G où AH coupe la parallèle GC. Partagez GF en D en sorte que $\frac{GD}{DF}$ soit dans le rapport donné ; D sera donné. Joignez DH, cette droite est donnée de position. Je dis que la droite DH satisfait

Fig. 23.



à la question, c'est-à-dire que si on prend sur elle un point quelconque I, qu'on mène de ce point IB, IE, sous les angles donnés, le rapport des abscisses à partir des points A et F, c'est-à-dire $\frac{AB}{EF}$, est égal au rapport donné, $\frac{GD}{DF}$.

Soit C le point de rencontre de BI et de la parallèle GF. Par construction, IB est parallèle à AH, comme menée sous l'angle donné égal à HAB. De même IE est parallèle à HF ; de plus, à cause des parallèles, $GC = AB$; il reste à prouver que $\frac{GC}{EF} = \frac{GD}{DF}$ ou *vicissim* $\frac{GC}{GD} = \frac{EF}{DF}$. Mais cela est évident, car d'une part $\frac{HI}{HD} = \frac{GC}{GD}$; de l'autre $\frac{HI}{HD} = \frac{EF}{FD}$. Donc $\frac{GC}{EF}$ est égal au rapport donné.

Il y a, tant pour cette proposition que pour les précédentes, de nombreux cas, qu'il est facile de trouver et d'ajouter ; pourquoi nous y arrêter plus longtemps ?

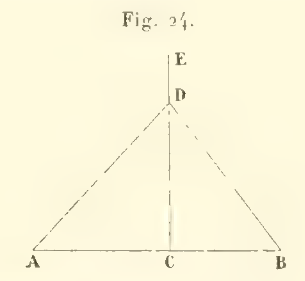
LIVRE II.

Proposition I.

« *Si des points donnés sont joints par des lignes droites à un même point, et que la différence des carrés de ces droites soit une aire donnée, le point de concours sera sur une droite donnée de position.* »

Soient A et B (*fig.* 24) les deux points donnés; soit une aire donnée quelconque plus petite que $\overline{AB}^2$. Partagez AB en C, en sorte que

Fig. 24.



$AC^2 - CB^2$ soit égal à l'aire donnée; élevez la perpendiculaire indéfinie CE. Prenez-en un point quelconque D. Joignez DA, BD. Je dis que $AD^2 - DB^2$ est égal à l'aire donnée.

C'est évident, puisque $AD^2 - DB^2 = AC^2 - CB^2$.

Si l'aire donnée était plus grande que AB^2, le point C tomberait en dehors de la droite AB.

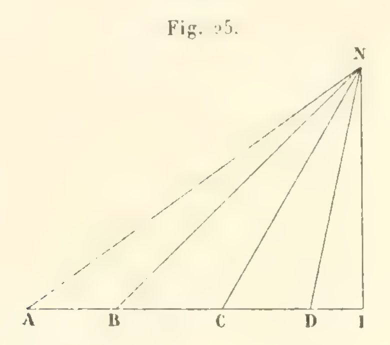
A cette proposition on peut rattacher les deux suivantes :

Soient donnés quatre points A, B, C, D (*fig.* 25) *en ligne droite, et soit* AB = CD. *Prenez un autre point quelconque* N; *menez les quatre droites* NA, NB, NC, ND. *Je dis que*

$$AN^2 + ND^2 - (BN^2 + NC^2) = 2AB \times BD.$$

En effet, menons la perpendiculaire NI, et supposons d'abord que le point I tombe en dehors de la droite AD. Il est clair que, en raison de

Fig. 25.



NI² commun à tous les termes,

$$AN^2 + ND^2 - (BN^2 + NC^2) = AI^2 + ID^2 - (BI^2 + CI^2).$$

Mais (II, 4) (¹) $AI^2 + DI^2 = 2DI^2 + AD^2 + 2AD \times DI$, et par le même théorème $BI^2 + CI^2 = 2DI^2 + BD^2 + CD^2 + 2BD \times DI + 2CD \times DI$.

Aux deux derniers termes de cette égalité, puisque $AB = CD$, on peut substituer $2AD \times DI$.

Donc

$$AI^2 + ID^2 - (BI^2 + CI)^2 = AD^2 - (BD^2 + CD^2) = AD^2 - (BD^2 + AB^2).$$

Mais (II, 4) (¹) $AD^2 - (AB^2 + BD^2) = 2AB \times BD$.

La proposition est donc établie.

Je n'ajoute pas les autres cas pour cette proposition, ni pour les suivantes, car ce serait aussi fastidieux que facile.

Si l'on joint un point à trois autres donnés en ligne droite, et que la somme des carrés de deux droites ainsi menées surpasse le carré de la troisième d'une aire donnée, le point sera sur une circonférence donnée de position.

Soient A, B, C (*fig.* 26) les trois points donnés en ligne droite. Soit donnée une aire supérieure à $2AB \times BC$. Prenez $AI = BC$, et soit l'aire donnée égale à $2AB \times BC + IV^2$. De I comme centre, avec IV pour

(¹) Renvoi aux *Éléments* d'Euclide.

rayon, décrivez le cercle VNO. Soit un point N quelconque sur sa circonférence; joignez-le aux points donnés, par les droites NA, NB, NC. Je dis que $AN^2 + NC^2 - NB^2$ est égal à l'aire donnée.

Fig. 26.

En effet, joignez IN; d'après la proposition précédente :

$$AN^2 + NC^2 = IN^2 + BN^2 + 2AB \times BC.$$

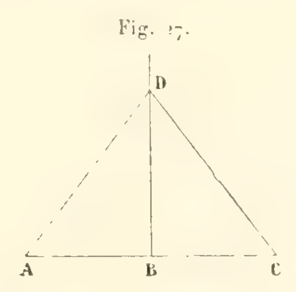
Donc $AN^2 + NC^2 - NB^2 = IN^2 + 2AB \times BC$ et la proposition est établie.

Proposition II.

« *Si l'on joint un point à deux autres donnés et que les droites ainsi menées soient dans un rapport donné, le premier point sera, soit sur une droite, soit sur une circonférence.* »

Soient donnés les deux points A, C (*fig.* 27), et supposons d'abord le rapport d'égalité. Prenez en B le milieu de AC; élevez BD perpen-

Fig. 27.



diculaire; il est clair que, si l'on en prend un point quelconque D, on aura AD = DC.

Supposons maintenant un rapport d'inégalité; soient A, B (*fig.* 28) les deux points donnés, $\frac{R}{S}$ le rapport donné. Soit $\frac{R^2}{S^2} = \frac{AN}{NB}$. Entre AN

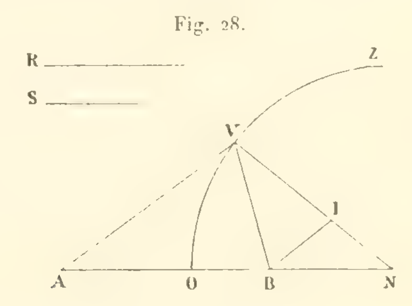
et NB prenez la moyenne proportionnelle NO, et avec ce rayon décrivez le cercle OVZ. Soit un point quelconque V sur la circonférence; joignez VA, BV. Je dis que ces droites sont dans le rapport $\frac{R}{S}$.

En effet, joignons VN, et menons BI parallèle à VA. On a

$$\frac{AN}{NO(=NV)} = \frac{NV}{NB}.$$

Ce sont les côtés qui comprennent un même angle ANV dans les deux triangles ANV, BVN; ces triangles sont donc semblables et les

Fig. 28.



angles VAB, BVI égaux. Mais AVB, VBI le sont à cause des parallèles; donc les triangles AVB, VBI sont semblables et $\frac{AV}{VB} = \frac{VB}{BI}$ avec $\frac{VB}{BI} = \frac{NV}{NB} = \frac{AN}{NV}$. Donc $\frac{VB^2}{BI^2}\left(= \frac{AN}{NB} = \frac{R^2}{S^2}\right) = \frac{AV^2}{VB^2}$. Donc $\frac{AV}{VB} = \frac{R}{S}$, et la proposition est établie.

Proposition III.

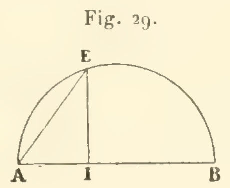
« *Si une droite est donnée de position en même temps qu'un point sur elle, si de ce point l'on mène une droite limitée, que de l'extrémité de celle-ci on abaisse une perpendiculaire sur la ligne donnée de position, et que le carré de la menée soit égal au produit d'une donnée et de l'abscisse à partir soit du point donné, soit d'un autre donné sur la ligne donnée de position, l'extrémité de la menée sera sur une circonférence donnée de position.* »

Soit AB (*fig.* 29) la droite donnée de position, A le point donné sur elle. Il faut trouver une circonférence de cercle telle que, si l'on prend

sur elle un point quelconque E, et qu'on abaisse la perpendiculaire EI, AE^2 soit égal au produit d'une donnée et de AI (c'est ainsi qu'on doit ici entendre *l'abscisse à partir du point donné*).

Soit AB la longueur donnée; sur AB je décris un demi-cercle; il est clair d'après la construction que $AB \times AI = AE^2$.

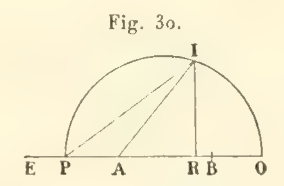
Fig. 29.



Il y a plus de difficulté pour le second cas, à savoir quand l'abscisse part d'un autre point que A, comme dans l'exemple suivant :

Soient donnés les deux points A, B (*fig.* 30), et en outre un point E sur la même ligne droite. Soit AB la longueur donnée. Il faut trouver

Fig. 30.



une circonférence de cercle, soit PIO, telle que si d'un point quelconque I de cette circonférence l'on abaisse la perpendiculaire IR. $AI^2 = AB \times ER$, AB étant la donnée.

Appliquons $BA \times AE$ sur la droite BA en excès d'un carré : soit la largeur $AP = BO$ (¹). Le demi-cercle décrit sur PO satisfera à la question.

En effet, $AI^2 = AR^2 + RI^2$. Mais $RI^2 = PR \times RO$ et, comme on le prouvera tout à l'heure,

$$PR \times RO = AR \times RB + OA \times AP \ (= BP \times PA = BA \times AE).$$

Donc $AI^2 = AR^2 + AR \times RB + BA \times AE$, ou puisque

$$AR^2 + AR \times RB = BA \times AR, \qquad AI^2 = BA \times AR + AB \times AE.$$

(¹) C'est-à-dire construisons AP d'après la condition : $AB \times AP + AP^2 = BA \times AE$.

soit, réduisant encore ces deux rectangles en un seul, $AI^2 = BA \times ER$.

Il reste à prouver que $PR \times RO = AR \times RB + PB \times BO$.

En effet, en multipliant entre elles les parties :

$$PR \times RO = PA \times RB + PA \times BO (= BO^2) + AR \times RB + AR \times BO (= PA \times AR).$$

Mais $PA \times AR + PA \times RB = PA \times AB = AB \times BO$. Ajoutant BO^2, on a $AO \times OB$, c'est-à-dire $PB \times BO$. Donc

$$PR \times RO = AR \times RB + PB \times BO. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Je ne poursuis pas les différents cas, désormais rendus très faciles. Cependant je ne crois pas devoir omettre celui où le point E ne se trouve pas au delà de A, comme ci-dessus.

Soient donnés les deux points A et E (*fig.* 31), et la droite AB ; il faut trouver une circonférence de cercle comme NOR, telle qu'en prenant sur elle un point quelconque O, et abaissant la perpendiculaire OI, $AO^2 = BA \times EI$.

Fig. 31.

Appliquons $BA \times AE$ sur la droite BA, en défaut d'une figure carrée ([1]). Nous aurons le point R; soit $BN = AR$. Le demi-cercle décrit sur RN satisfera à la question. La démonstration sera semblable à celle que nous avons donnée pour le premier cas.

Proposition IV.

« *Si de deux points donnés on mène des droites à un point, et que le carré de l'une soit d'une aire donnée plus grand que dans un rapport donné avec le carré de l'autre, le point d'intersection sera sur une circonférence donnée.* »

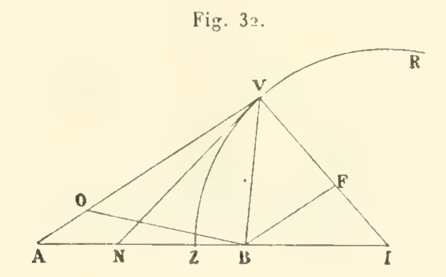
([1]) C'est-à-dire construisons AR par la condition : $AB \times AR - \overline{AR}^2 = BA \times AE$.

Soient A, B (*fig.* 32) les deux points, $\frac{AI}{IB}$ le rapport donné, $BA \times AN$ l'aire donnée. Soit IZ moyenne proportionnelle entre NI et IB; avec ce rayon décrivez le cercle ZVR, prenez-en un point quelconque V, joignez VA, VB. Je dis que $AV^2 - \frac{IA}{BI} \times VB^2 = BA \times AN$ (rapport et aire donnés).

Soit en effet $VA \times AO = BA \times AN$; joignez OB, NV, VI et menez BF parallèle à AN. Il faut prouver que $\frac{AV \times VO}{VB^2} = \frac{AI}{IB}$.

Or $\frac{NI}{IZ(=VI)} = \frac{VI}{IB}$; ce sont les côtés d'un même angle dans les triangles NIV, VBI, qui sont donc semblables; donc les angles VNB, BVF

Fig. 32.



sont égaux. Mais les angles VNB, VOB le sont comme inscrits dans le même segment (car puisque $BA \times AN = VA \times AO$, les quatre points N, B, V, O sont sur un cercle); donc les angles VOB, BVF sont égaux. Mais les angles OVB, VBF le sont aussi à cause des parallèles. Donc les triangles OBV, VBF sont semblables. Donc $\frac{OV}{VB} = \frac{VB}{BF}$: multipliant de part et d'autre par le rapport $\frac{AV}{VB}$, on a

$$\frac{AV}{VB} \times \frac{VB}{BF} \quad \text{ou} \quad \frac{AV}{BF} \quad \text{ou} \quad \frac{AI}{IB} = \frac{AV}{VB} \times \frac{OV}{VB} = \frac{AV \times VO}{VB^2} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Pappus paraît avoir omis ici la proposition suivante qui est analogue :

Si de deux points donnés on mène des droites à un point, et que le carré de l'une soit d'une aire donnée plus petit que dans un rapport donné avec

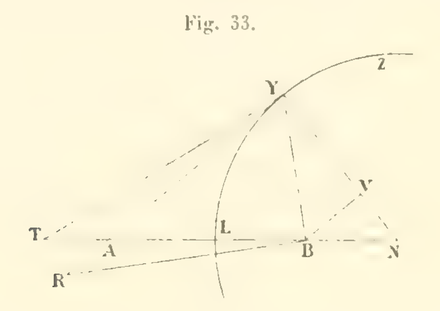
le carré de l'autre, le point d'intersection sera sur une circonférence donnée.

Soient donnés les deux points A et B (*fig.* 33), le rapport $\frac{AN}{BN}$, l'aire $BA \times AT$. Soit, entre TN, NB, la moyenne proportionnelle NL; avec ce rayon, décrivez la circonférence de cercle LYZ; prenez sur elle un point quelconque Y, joignez YA, YB. Je dis que

$$\frac{YA^2 + BA \times AT(\text{donné})}{YB^2} = \frac{AN}{NB}.$$

Soit en effet $YA \times AR = BA \times AT$; joignez TY, RB, YN; menez BV

Fig. 33.



parallèle à AY; comme suite de l'égalité $YA \times AR = BA \times AT$, on prouvera que les angles YTB, YRB sont égaux et on achèvera comme ci-dessus.

Proposition V.

« *Si de points donnés en nombre quelconque on mène des droites à un même point et que la somme des carrés de toutes ces droites soit égale à une aire donnée, le point sera sur une circonférence donnée de position.* »

Soient d'abord deux points A, B (*fig.* 34); menez la droite AB, prenez son milieu en E; de E comme centre, avec un rayon quelconque EI, décrivez le cercle ION. Je dis que, quelque point O que l'on prenne sur la circonférence : $AO^2 + OB^2 = 2(IE^2 + AE^2)$.

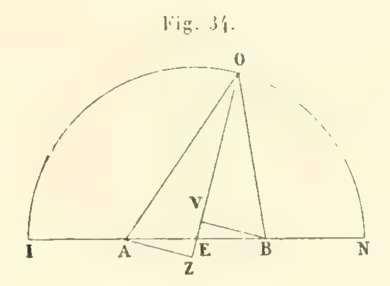
En effet, joignez EO, abaissez sur elle les perpendiculaires BV, AZ. Dans le triangle AEO, $AO^2 = AE^2 + EO^2 + 2OE \times EZ$. Dans le triangle

OEB, $OE^2 + EB^2 = OB^2 + 2OE \times EV (= 2OE \times EZ)$, car $EV = EZ$, puisque $AE = EB$.

Ajoutant membre à membre :

$$AO^2 + OB^2 + 2OE \times EZ = (AE^2 + EB^2)(= 2EA^2) + 2EO^2 (= 2IE^2) + 2OE \times EZ.$$

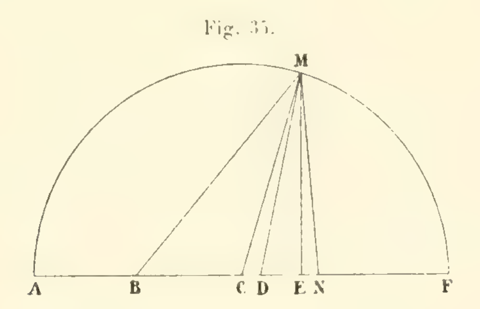
Fig. 34.



Retranchant de part et d'autre $2OE \times EZ$, il reste l'égalité annoncée, et la proposition est établie pour le premier cas.

Soient donnés en ligne droite trois points B, D, E (*fig.* 35) et soit $BD > DE$. Prenez $CD = \frac{1}{3}(BD - DE)$. De C comme centre avec un

Fig. 35.



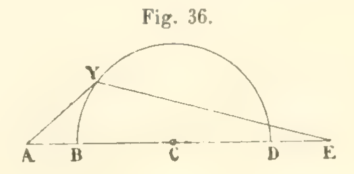
rayon quelconque CA, décrivez le demi-cercle AMF, je dis que, quelque point M que l'on prenne sur sa circonférence, $MB^2 + MD^2 + ME^2$ sera une somme constante.

En effet, joignez MB, MC, MD, ME; prenez $EN = CD$ et joignez MN. Puisque $BD - DE = 3CD = 3EN$, on a $DN + 2CD = BD$ ou $CN + CD = BD$. Retranchez CD de part et d'autre : $CN = BC$. Puisque, d'autre part, $CD = EN$, d'après la seconde proposition de ce livre, $CM^2 + MN^2 - (DM^2 + ME^2)$ est constant. Mais CM^2 est constant. Donc $DM^2 + ME^2$ fera une somme égale à MN^2 ou plus grande ou plus petite

d'une quantité constante. Ajoutez de part et d'autre MB^2; d'une part, $MB^2 + MD^2 + ME^2$, de l'autre $BM^2 + MN^2$ feront des sommes égales ou différentes d'une quantité constante soit dans un sens soit dans l'autre. Mais, d'après la proposition précédente, $BM^2 + MN^2$ est constant, puisque $BC = CN$, donc $BM^2 + DM^2 + EM^2$ est constant. C. Q. F. D.

Démonstration générale de la même proposition. — Soient d'abord deux points A, E (*fig.* 36); joignez AE, prenez son milieu en C. Soit donnée une aire Z qui ne devra pas être plus petite que $AC^2 + CE^2$; car si elle est égale à cette somme, il est clair que le point C seul satisfait à la question, et qu'il n'y en aura pas d'autre tel que la somme des carrés des droites le joignant aux points A, E soit égale à Z.

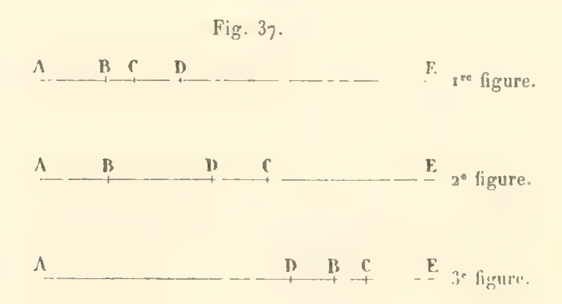
Fig. 36.



Si $Z > AC^2 + CE^2$, soit BC^2 égal à la moitié de la différence; de C comme centre, avec CB comme rayon, je décris un cercle qui satisfait à la question. J'omets la démonstration qui est trop simple et a été donnée par Pappus et autres. Il ne faut pas s'arrêter trop longtemps aux choses faciles.

Lemme pour la méthode générale. — Soient (*fig.* 37) des points donnés

Fig. 37.



A, B, C, E en nombre quelconque. Prenons une fraction AD de la somme des droites terminées d'une part au point A, de l'autre aux

autres points donnés, fraction conditionnée par le nombre des points, à savoir le quart dans l'exemple choisi. Soit donc

$$AD = \tfrac{1}{4}(AB + AC + AE).$$

La position du point D varie suivant les cas. *Je dis que la somme des droites terminées par le point* D *et par les points donnés du côté du point* A *sera égale à la somme des droites terminées par le point* D *et par les points donnés du côté du point* E. C'est-à-dire que l'on aura

Dans la 1[re] figure : $ED = AD + BD + CD$.
Dans la 2[e] figure : $ED + CD = BD + AD$.
Dans la 3[e] figure : $ED + CD + BD = AD$.

D'abord dans la 3[e] figure, par hypothèse, $4AD = AB + AC + AE$; retranchez de part et d'autre 3AD, il restera d'un côté AD; de l'autre, retrancher 3AD de $AB + AC + AE$ est la même chose que de retrancher AD de chacune des droites AB, AC, AE : il restera donc

$$BD + CD + ED = AD. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si l'on avait donné cinq points, on aurait d'un côté 5AD, de l'autre 4 droites terminées à A et aux points donnés, etc.; la méthode est toujours la même et s'applique indéfiniment.

Dans la 2[e] figure, $4AD = AB + AC + AE$; retranchez de part et d'autre 3AD et ajoutez BD, vous aurez $AD + BD = ED + CD$.

Dans la 1[re] figure, $4AD = AB + AC + AE$; ajoutez de part et d'autre $BD + CD$ et retranchez 3AD; vous aurez $AD + BD + CD = DE$.

La méthode est la même pour un nombre quelconque de points jusqu'à l'infini, et la même conclusion sera tirée de quelque manière que l'on fasse varier les cas.

Second lemme. — Soit faite sur la 1[re] figure (*fig.* 38) la construction précédente; je prends sur la même droite un point N quelconque. *Je dis que la somme des carrés des droites terminées par les points donnés et par* N *dépasse la somme des carrés des droites terminées par les points donnés et par le point* D, *du carré* DN *pris autant de fois qu'il y a de*

points donnés, soit 4 dans l'exemple choisi. Les 2e et 3e figures représentent des cas différents.

Fig. 38.

A B C D N E 1re figure.

A B D N C E 2e figure.

A N D B C E 3e figure.

Sur la première figure, en comparant chaque carré à chaque autre, on a

$$AN^2 + BN^2 + CN^2 - (AD^2 + BD^2 + CD^2) = 3DN^2 + 2AD.DN + 2BD.DN + 2CD.DN$$

ou

$$AN^2 + BN^2 + CN^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2 + 3DN^2 + 2AD.DN + 2BD.DN + 2CD.DN;$$

cela ressort évidemment de la formation du carré du binome avec le signe $+$.

D'autre part :

$$EN^2 = ED^2 + ND^2 - 2ED.DN,$$

ce qui ressort de la formation du carré du binome avec le signe $-$.

Par conséquent

$$AN^2 + BN^2 + CN^2 + EN^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DN^2 + 2AD.DN + 2BD.DN + 2CD.DN - 2ED.DN.$$

Si donc nous prouvons que la somme des rectangles en plus est égale à celle des rectangles en moins, la vérité de la proposition sera établie, à savoir que :

$$AN^2 + BN^2 + CN^2 + EN^2 - (AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2) = 4DN^2.$$

Il faut donc prouver que $2ED.DN = 2AD.DN + 2BD.DN + 2CD.DN$, ou, en divisant tous les termes par $2DN$, que l'on a l'égalité

$$ED = AD + BD + CD.$$

Or c'est ce qui a été démontré par le lemme précédent.

Je ne m'arrête pas aux divers cas. — Si l'on donne cinq points, la somme des carrés des distances des points donnés au point N dépasse de $5\,DN^2$ la somme des carrés des distances des points donnés au point D : la démonstration est la même.

Il ressort de là que la somme des carrés des distances au point D est minima.

Dans cet exposé, je n'ajoute pas une trop scrupuleuse observation des différents cas. La conclusion du second lemme se ramènera toujours à prouver que la somme des rectangles en plus est égale à celle des rectangles en moins, et la question sera ainsi ramenée au premier lemme.

Première proposition générale. — Soient, sur la même figure, toujours donnés quatre points A, B, C, E sur la droite AE, et

$$AD = \tfrac{1}{4}(AB + AC + AE),$$

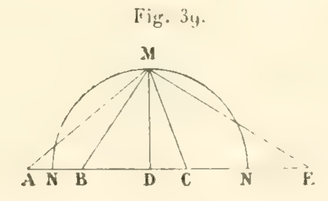
fraction conditionnée. On propose, étant donnée une aire Z, de *trouver un cercle, tel qu'en prenant sur la circonférence un point quelconque, la somme des carrés de ses distances aux points donnés soit égale à l'aire donnée.*

Pour que le problème soit possible, il faut, d'après ce qui a été démontré, que l'aire $Z > AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2$.

Soit donc $4\,DN^2$ égal à l'excès de Z sur la somme des quatre carrés; le cercle décrit de D comme centre avec DN pour rayon satisfera à la question.

En effet, prenons d'abord le point N (*fig.* 39) de l'un et de l'autre

Fig. 39.



côté. Il a été prouvé par le second lemme que

$$AN^2 + NB^2 + CN^2 + EN^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4\,DN^2;$$

mais $AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DN^2 = Z$. Donc

$$AN^2 + BN^2 + CN^2 + EN^2 = Z \text{ l'aire donnée.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Élevez maintenant la perpendiculaire DM et joignez AM, BM, CM, EM. Je dis que la somme de leurs carrés est égale à l'aire donnée Z.

En effet

$$AM^2 = AD^2 + DM^2,$$
$$BM^2 = BD^2 + DM^2,$$
$$CM^2 = CD^2 + DM^2,$$
$$EM^2 = ED^2 + DM^2.$$

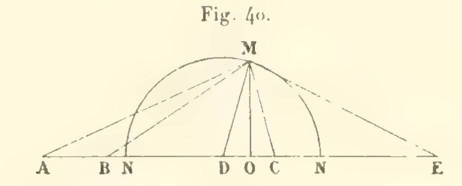
Donc

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + EM^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DM^2 (= 4DN^2).$$

Mais $AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DN^2 = Z$ (l'aire donnée). Donc $AM^2 + BM^2 + CM^2 + EM^2 =$ l'aire donnée. C. Q. F. D.

Menons maintenant le point M (*fig.* 40) quelconque, et abaissons

Fig. 40.



la perpendiculaire MO. On prouvera de même que

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + EM^2 = 4OM^2 + AO^2 + BO^2 + CO^2 + EO^2.$$

D'après le second lemme, la somme de ces quatre derniers carrés est égale à la somme $AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4OD^2$. Donc

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + EM^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4OD^2 + 4OM^2.$$

Mais $4OD^2 + 4OM^2 = 4DM^2 = 4DN^2$, les rayons DM et DN étant égaux. Donc

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + EM^2$$
$$= AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DN^2 = Z \text{ (l'aire donnée).} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

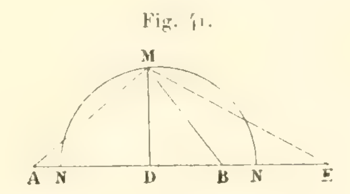
Si l'on achève les cercles, la même démonstration s'appliquera pour

les autres demi-cercles, et elle s'étendra à un nombre de points quelconques avec la même facilité de raisonnement; car les carrés DM^2, DN^2, DO^2 sont toujours pris autant de fois qu'il y a de points et la conclusion est toujours juste.

D'où suit un corollaire qui servira pour la proposition suivante :

Soient des points donnés en nombre quelconque, par exemple trois, A, B, E (*fig.* 41); trouver un cercle NM, tel qu'en prenant un point

Fig. 41.

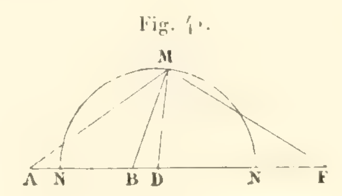


quelconque M sur ce cercle, et joignant AM, BM, EM, on ait par exemple $2AM^2 + BM^2 + EM^2$ égal à une aire donnée.

Dans ce cas, on construira $AD = \frac{1}{4}(AB + AE)$, car le point A joue ici le rôle de deux points et c'est comme si l'on disait : étant donnés quatre points A, A, B, E, trouver un cercle NM, tel qu'en prenant sur ce cercle un point quelconque M on ait $AM^2 + AM^2 + BM^2 + EM^2$ égal à une aire donnée.

Il faut entendre ceci de même de tout autre point et de tout autre rapport de multiplicité. — Soit par exemple proposé (*fig.* 42)

Fig. 42.



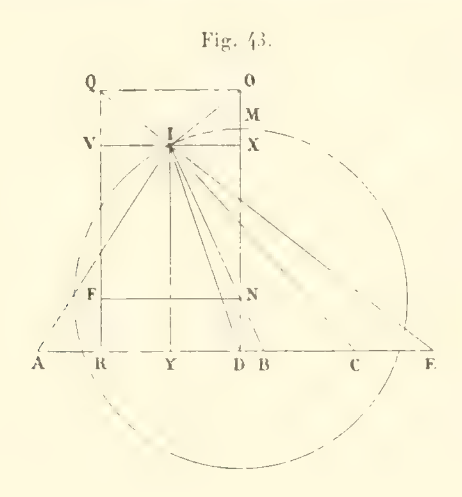
$AM^2 + 2BM^2 + EM^2$ égal à une aire donnée; on prendra

$$AD = \frac{1}{4}(2AB + AE).$$

Il fallait faire cette remarque, mais elle n'a pas besoin d'une plus longue explication.

Seconde proposition. — Soient sur la droite AE (*fig.* 43) des points donnés en nombre quelconque, quatre par exemple, A, B, C, E, et un point Q en dehors de la droite AE; on cherche un cercle, comme MI, tel qu'en prenant sur ce cercle un point quelconque I, on ait $AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 + QI^2$ égal à une aire donnée.

Fig. 43.



Abaissez sur la droite AE la perpendiculaire QR et prenez AD, fraction conditionnée de la somme AR + AB + AC + AE (le cinquième dans ce cas où l'on donne cinq points). Élevez la perpendiculaire DO et abaissez sur elle la perpendiculaire QO. Prenez RF = DN, fraction conditionnée (ici le cinquième) de la droite QR, et soit l'espace donné égal à la somme $AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + Z$.

Faisons $Z = 4DN^2 + ON^2 + 5NM^2$ (4 étant le nombre des points donnés sur la droite AE, et 5 le nombre total des points donnés). Je dis que le cercle décrit de N comme centre, avec NM comme rayon, satisfait à la question.

En effet, prenez sur ce cercle un point quelconque I, joignez AI, BI, CI, EI, QI. Menez VIX parallèle à AE et IY parallèle à OD; il est clair, d'après le corollaire de la proposition précédente, que $4DI^2 + OI^2 = Z$, car le point D joue le rôle de quatre points; et puisque $DN = \frac{1}{5} OD$, il est évident que $4DI^2 + OI^2 = 4DN^2 + ON^2 + 5NM^2$. Mais $4DN^2 + ON^2 + 5NM^2 = Z$ par construction. Donc $4DI^2 + OI^2 = Z$.

Mais $4DI^2 = 4DX^2 + 4XI^2$ et $OI^2 = OX^2 + XI^2$. Donc

$$Z = 4DX^2 (= 4IY^2) + XO^2 (= VQ^2) + 5XI^2.$$

Ajoutez de part et d'autre $AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2$, vous aurez, dans le premier membre, l'espace donné, car, par hypothèse, il est égal à la somme de ces cinq carrés et de Z; dans le second membre : $AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 + QI^2$, somme qui sera donc égale à l'espace donné.

En effet, d'après le second lemme :

$$AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 5DY^2 = AY^2 + RY^2 + BY^2 + CY^2 + EY^2;$$

donc

$$AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4IY^2 + VQ^2 + 5DY^2$$
$$= AY^2 + RY^2 + BY^2 + CY^2 + EY^2 + 4IY^2 + VQ^2.$$

Si, à chacun des carrés AY^2, BY^2, CY^2, EY^2, on ajoute IY^2, on aura

$$AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 = AY^2 + BY^2 + CY^2 + EY^2 + 4IY^2.$$

Donc

$$AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4IY^2 + VQ^2 + 5DY^2$$
$$= AI^2 + BI^2 + CI^2 + IE^2 + RY^2 + VQ^2.$$

Mais $RY^2 (= VI^2) + QV^2 = QI^2$. Donc

$$AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4IY^2 + VQ^2 + 5DY^2$$
$$= AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 + QI^2.$$

Mais on a prouvé que le premier membre est égal à l'aire donnée; donc

$$AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 + QI^2 = \text{l'aire donnée}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On en déduira facilement que l'aire donnée est égale à

$$AN^2 + BN^2 + CN^2 + EN^2 + QN^2 + 5NM^2,$$

ce que nous avons omis comme évident.

Bien plus le même artifice peut s'appliquer à un nombre quelconque de points.

Si par exemple on donne deux points Q, L (*fig.* 44) en dehors de la ligne, la construction s'achèvera comme on le voit, en prenant

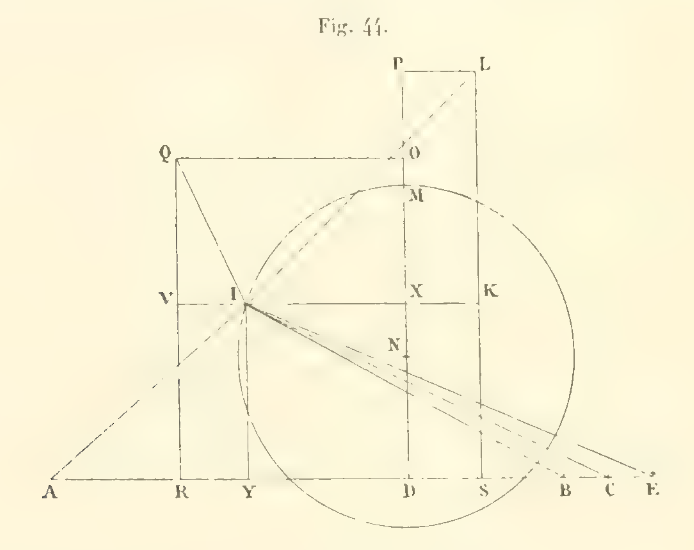
$$\mathrm{AD} = \tfrac{1}{6}(\mathrm{AR} + \mathrm{AS} + \mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{AE}), \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{DN} = \tfrac{1}{6}(\mathrm{QR} + \mathrm{LS}),$$

et en faisant

$$\text{l'aire donnée} = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{RD}^2 + \mathrm{SD}^2 + \mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2 + \mathrm{ED}^2 + 4\mathrm{DN}^2 + \mathrm{NO}^2 + \mathrm{NP}^2 + 6\mathrm{NM}^2.$$

On terminera de la même manière, le point D jouant toujours le rôle

Fig. 44.



de tous les points donnés sur la droite AE, et les points P, O jouant le rôle des points Q, L.

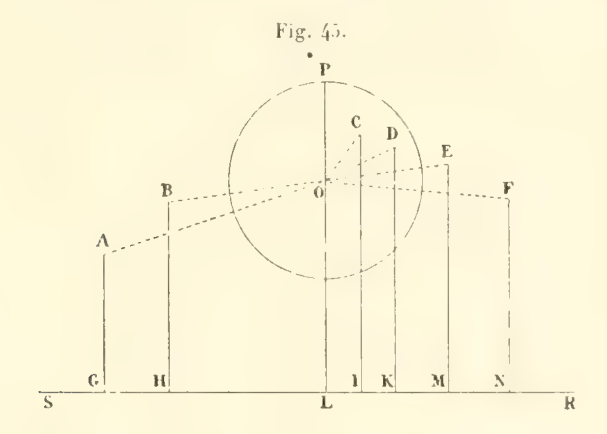
La méthode de construction et de démonstration est indéfiniment la même.

Mais, comme des cas multiples découlent de la différente position de la droite prise et passant par deux ou plusieurs points, mais pouvant laisser les autres dans diverses positions de chacun de ses côtés, quoique pour chaque cas il y ait des abréviations spéciales, je préfère, comme spécimen du procédé, montrer plus généralement la construction.

Soient des points donnés en nombre quelconque A, B, C, D, E, F

(*fig.* 45) sur la même droite ou sur des droites différentes. Prenez dans le même plan une droite quelconque SR, qui laisse tous les points

Fig. 45.



donnés du même côté; abaissez les perpendiculaires AG, BH, CI, DK, EM, FN, prenez GL fraction conditionnée (dans ce cas, $\frac{1}{6}$) de

$$GH + GI + GK + GM + GN;$$

élevez la perpendiculaire LO, et prenez LO fraction conditionnée (ici $\frac{1}{6}$) de AG + BH + CI + KD + EM + FN.

Soit l'aire donnée égale à

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 + EO^2 + FO^2 + 6OP^2;$$

le carré décrit de O comme centre, avec OP pour rayon, satisfera à la question; la démonstration est facile pour qui a étudié ce qui précède.

Proposition VI.

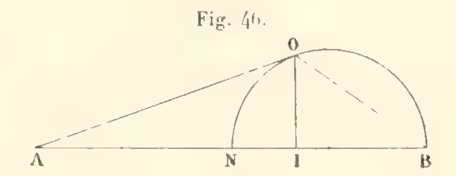
« *Si, de deux points donnés, on mène deux droites qui se coupent, et de leur rencontre une droite interceptant une abscisse à partir d'un point donné sur une droite donnée de position, si la somme des carrés des premières menées est égale au produit d'une donnée et de l'abscisse, le point de rencontre sera sur une circonférence donnée de position.* »

Je donne la proposition comme on la trouve dans Pappus d'après la version de Fédéric Commandin, mais je ne doute pas qu'il n'y ait une

faute, soit dans le texte grec, soit dans la traduction. Voici le sens de la proposition :

Soient deux points A, B (*fig.* 46); il faut trouver une circonférence comme NOB, sur laquelle on prendra un point quelconque O; en joi-

Fig. 46.



gnant OA, OB et en abaissant la perpendiculaire OI, on devra avoir l'égalité entre le produit de AI par une donnée et la somme AO^2+OB^2.

Supposons d'abord que AB soit la droite donnée, cas assez simple.

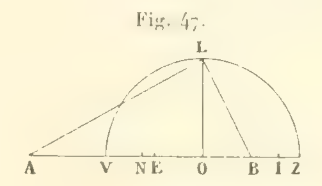
Prenez $BN=\frac{1}{2}AB$, et décrivez sur BN un demi-cercle; il résoudra le problème, c'est-à-dire que si on y prend, par exemple, le point O, on aura $BA\times AI = AO^2 + OB^2$.

En effet, $AO^2=AI^2+IO^2$. Si donc de $BA\times AI$ on retranche $AI^2+IO^2 (= BI.IN)$, il reste $BI\times AN$ ou $BI\times NB$ à prouver égal à OB^2, ce qui est évident d'après la construction.

Second cas : la droite donnée est plus grande que AB, mais plus petite que 2AB. Nous allons donner la construction :

Soient donnés les deux points A et B (*fig.* 47) et la droite $AI<2AB$, par hypothèse; il faut résoudre le problème proposé.

Fig. 47.



Prenez en N le milieu de AB : soit $NE=\frac{BI}{2}$ (E restera compris entre A et B). Appliquez sur la droite BE le rectangle IB.BN en excédent d'une figure carrée [1]; soit trouvée la largeur EV, prenez $BZ=EV$, et sur VZ décrivez le demi-cercle VLZ, je dis qu'il résout le problème.

[1] C'est-à-dire : construisez EV d'après la condition $IB.BN = BE.EV + EV^2$.

En effet, joignez LA, LB et abaissez la perpendiculaire LO que nous supposerons, comme premier cas, tomber entre E et B. Il est clair, d'après la démonstration de la proposition III d'Apollonius [dans ce même Livre], que $EO.OB + VE.EZ (= NB.BI) = OL^2$.

Ajoutez de part et d'autre OB^2, il vient

$$EB.BO + NB.BI = OL^2 + OB^2.$$

Doublez : $2EB.BO + 2NB.BI (= AB.BI) = 2(LO^2 + OB^2)$. Ajoutez de part et d'autre $2NE.OB$, il vient

$$(2EB.BO + 2NE.OB)(= AB.BO) + AB.BI$$
$$= 2(LO^2 + OB^2) + 2NE.OB (= IB.BO),$$

d'après la construction.

Retranchant de part et d'autre OB^2, il reste

$$AO.OB + AB.BI = 2LO^2 + OB^2 + IB.BO.$$

Retranchant de part et d'autre IB.BO, c'est-à-dire dans le premier membre de AB.BI, il reste AO.OB + AO.BI ou en tout

$$IO.OA = 2LO^2 + OB^2.$$

Ajoutez AO^2 de part et d'autre :

$$IA.AO = AO^2 + OB^2 + 2LO^2 = AL^2 + LB^2.$$ C. Q. F. D.

Je passe les autres cas.

Proposition VII.

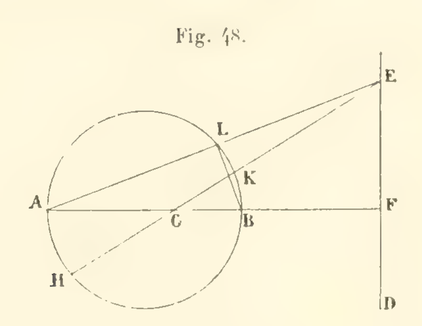
« *Si, à l'intérieur d'un cercle donné de position, on a un point donné, par lequel on mène une droite ; si l'on prend sur cette droite un point extérieur, et que le carré de la menée jusqu'au point donné à l'intérieur soit égal au produit de la droite totale et de sa partie extérieure, seul ou augmenté du produit des deux segments intérieurs au cercle, le point pris à l'extérieur sera sur une droite donnée de position.* »

Cette proposition comprend deux parties : la première est dans Pappus (Livre VII, prop. 159) ; la seconde se déduit facilement de la

première en ajoutant des termes égaux. Je donnerai seulement la démonstration de Pappus.

Soit un cercle de diamètre AB (*fig.* 48); prolongez AB jusqu'à une droite quelconque DE qui lui soit perpendiculaire.

Fig. 48.



Soit $AF.FB = FG^2$. Je dis que, quel que soit le point E, si on le joint à G par une droite prolongée jusqu'en H, on aura $HE.EK = EG^2$.

Joignez AE, BL, l'angle en L est droit comme celui en F. Donc $AE.EL = AF.FB + FE^2$.

En effet $\widehat{ALB}$, comme droit, est égal au droit $\widehat{AFE}$; donc les quatre points L, B, F, E sont sur une circonférence; donc $FA.AB = EA.AL$. Mais $AE^2 = AF^2 + FE^2$, et aussi $AE^2 = AE.EL + EA.AL$; de même $AF^2 = AF.FB + FA.AB$. Donc $AE.EL + EA.AL = AF.FB + FA.AB + FE^2$. Mais comme $EA.AL = FA.AB$, il reste $AE.EL = AF.FB + FE^2$. Mais $AE.EL = HE.EK$ et $AF.FB = FG^2$. Donc $HE.EK = EF^2 + FG^2 = EG^2$.

PROPOSITION VIII ET DERNIÈRE.

« *Et si le même point est sur une droite donnée de position, et que le cercle ne soit pas dans les positions, les points des deux côtés du point donné seront sur une circonférence donnée de position.* »

Cette proposition est réciproque de la précédente, et la démonstration peut en être facilement déduite en suivant une marche inverse.

Je n'ajoute pas la distinction des différents cas ni les conditions de limites pour les données; tout cela ressort assez clairement de la construction et de la démonstration.

DES CONTACTS SPHÉRIQUES.

La théorie des contacts d'Apollonius de Perge a été élégamment restituée par l'Apollonius Gallus, masque sous lequel se cachait ce François Viète de Fontenay dont les admirables travaux en Mathématiques ont fourni de si heureux suppléments à la Géométrie ancienne. Mais cette théorie des contacts a jusqu'à présent été bornée aux plans, et personne, que je sache, ne l'a poussée plus loin et ne s'est hasardé à l'élever aux problèmes sphériques.

On va voir qu'on arrive dans cette voie à de brillants problèmes et qu'on peut facilement obtenir une élégante construction pour les questions les plus ardues.

Il s'agit en général de chercher une sphère passant par des points donnés ou touchant des sphères et des plans donnés. Tout le sujet sera épuisé en quinze problèmes.

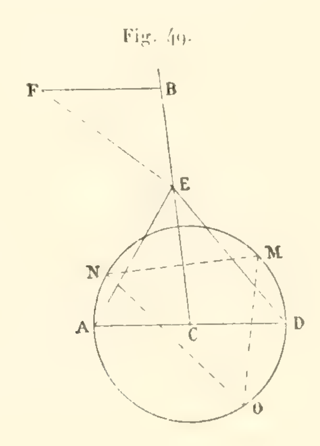
Problème I.

Étant donnés quatre points, trouver une sphère passant par ces points.

Soient donnés quatre points N, O, M, F (*fig.* 49), par lesquels il faut mener une sphère. Prenant *ad libitum* trois de ces points N, O, M, au triangle NOM (qui est dans un même plan, d'après les Éléments), je circonscris un cercle NAOM, qui sera évidemment donné de grandeur et de position. Il est clair que ce cercle NAOM est sur la surface de la sphère cherchée, puisque, si une sphère est coupée par un plan, la section est un cercle, et que, par les trois points N, M, O, il ne passe

qu'un cercle, celui que j'ai construit. Les points N, M, O étant sur la surface de la sphère cherchée, le plan du triangle NMO coupera la sphère cherchée suivant le cercle NAOM; nous en concluons donc que ce cercle est sur la surface de la sphère.

Fig. 49.



Soit C le centre de ce cercle, j'y élève au plan du cercle la perpendiculaire CEB; il est clair que le centre de la sphère cherchée est sur cette droite CB. Du point F j'abaisse sur CB la perpendiculaire FB qui sera évidemment donnée de grandeur et de position; par C je mène, parallèlement à FB, la droite ACD. L'angle BCA sera droit, mais, la droite BC étant perpendiculaire au plan du cercle, ACD sera dans ce plan et donnée de position. Donc ses points de rencontre A, D avec le cercle sont donnés.

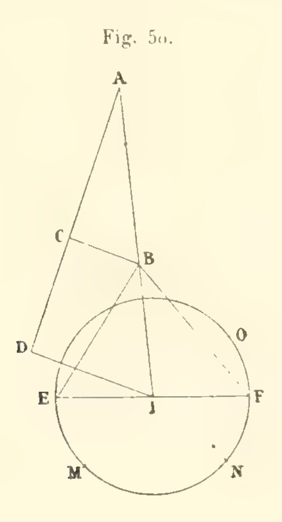
Supposons maintenant le problème résolu, et E le centre de la sphère cherchée, point qui se trouve sur la droite CB, comme nous l'avons déjà dit d'après Théodose. Je joins FE, AE, ED; ces droites seront égales, puisque par hypothèse F et par démonstration A et D sont sur la surface de la sphère. Mais ces trois droites FE, AE, ED sont dans un même plan, puisque FB, ACD, parallèles, sont dans un même plan qui comprend aussi CB et par conséquent les trois droites FE, AE, DE. Si donc par les trois points donnés A, F, D on fait passer un cercle, son centre E sera sur la droite CB, et on aura dès lors le centre de la sphère cherchée, et la sphère elle-même.

Problème II.

Étant donnés trois points et un plan, trouver une sphère passant par les points donnés et tangente au plan donné.

Soient donnés les trois points N, O, M (*fig.* 50); le cercle MEON passant par ces points sera, comme il a été démontré, sur la surface

Fig. 50.



de la sphère cherchée, et le centre de cette sphère sera sur la perpendiculaire IBA au plan de ce cercle. Soit A le point de rencontre de IBA avec le plan donné; ce point A sera donné de position. Du centre du cercle MEON, j'abaisse sur le plan donné la perpendiculaire ID; le point D sera donné, donc la droite AD de grandeur et de position, donc de même les droites ID, IA. Donc le plan du triangle ADI est donné de position; mais celui du cercle MON est également donné de position, donc l'intersection FIE de ces deux plans sera donnée de position, donc les points E, F sur le cercle.

Supposons maintenant le problème résolu et B le centre de la sphère cherchée; je joins BE, BF et je mène BC parallèle à ID; le triangle ADI et la droite EIF étant dans un même plan, les droites EB, BF, BC y seront également. Mais ID est perpendiculaire au plan donné; donc BC, qui lui est parallèle, sera aussi perpendiculaire au plan donné.

De plus, comme la sphère cherchée doit être tangente à ce plan donné AD, la perpendiculaire BC, abaissée de son centre sur ce plan, donnera le point de contact C. Donc les droites BC, BE, BF seront égales, et il est prouvé qu'elles sont dans un même plan donné de position, plan qui comprend aussi la droite AD.

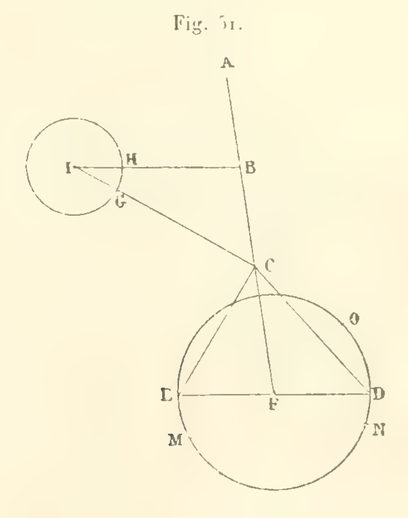
Le problème est donc ramené, étant donnés dans un même plan deux points E, F et une droite AD, à trouver un cercle passant par les deux points donnés et tangent à la droite donnée; ce problème a été résolu par Apollonius Gallus; donc le centre de la sphère B est donné, et tout est clair.

Problème III.

Étant donnés trois points et une sphère, trouver une sphère passant par les points donnés et tangente à la sphère donnée.

Soient donnés les trois points M, N, O (*fig.* 51) et la sphère IG; on a comme donné le cercle MON de la sphère cherchée. La perpendi-

Fig. 51.



culaire FCB au plan de ce cercle contiendra encore le centre de la sphère cherchée. De I, centre de la sphère donnée, j'abaisse sur FB la perpendiculaire IB, qui sera donnée de position et de grandeur. Par le centre F, je lui mène la parallèle ED; d'après ce qui a été démontré, elle sera dans le plan du cercle et les points E, D seront donnés.

Supposons maintenant le problème résolu et C le centre de la sphère cherchée. Les droites IC, CE, CD seront dans un même plan donné, puisque I, E, D sont donnés. Le point de contact des deux sphères est d'ailleurs sur la droite qui joint leurs centres; donc la sphère cherchée sera tangente à la sphère donnée au point G, et IC sera supérieur du rayon IG à la droite CE ou CD. De I comme centre, avec le rayon de la sphère donnée, je décris dans le plan donné des droites IC, CE, CD, un cercle qui passera par le point G et sera donné de grandeur et de position. Mais les points E, D sont dans son plan. La question est donc ramenée à chercher, dans Apollonius Gallus, le procédé pour, étant donné dans un même plan deux points et un cercle, trouver un cercle passant par les deux points donnés et tangent au cercle donné.

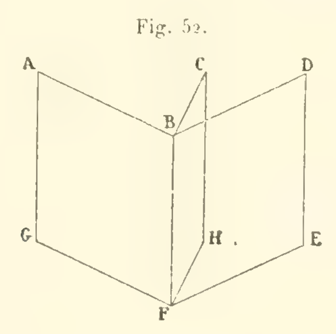
Problème IV.

Étant donnés quatre plans, trouver une sphère qui soit tangente à ces quatre plans donnés.

Soient donnés les quatre plans AH, AB, BC, HG (*fig.* 53) que doit toucher la sphère cherchée.

Soient deux plans AF, FD (*fig.* 52) tangents à la même sphère;

Fig. 52.

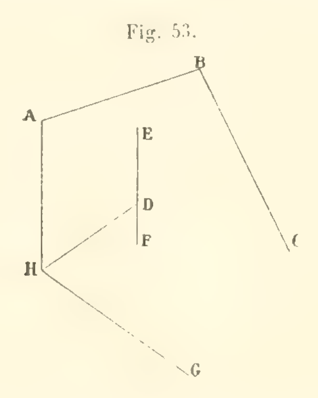


menons le plan BFHC qui bissecte leur angle; il est assez clair que le centre de la sphère tangente aux deux plans AF, FD se trouve sur le plan bissecteur, pour qu'il soit inutile de s'arrêter plus longtemps sur une chose si simple. Si les deux plans AF, FD étaient parallèles,

le centre de la sphère serait sur le plan parallèle coupant par moitié leur intervalle.

Cela posé, puisque les deux plans CB, BA (*fig.* 53) sont donnés de position, le centre de la sphère cherchée est sur un plan donné de position, à savoir le bissecteur de l'angle des deux plans donnés CB, BA.

Fig. 53.



Mais, en raison des deux plans BA, AH, le même centre de la sphère cherchée est sur un autre plan également donné de position, et l'intersection des deux plans donnés de position, qui bissectent, l'un l'angle des plans CB, BA, l'autre l'angle des plans BA, AH, donne une droite donnée de position qui passe par le centre de la sphère cherchée. Soit FE cette droite; en raison des deux plans AH, HG, le centre de la sphère cherchée est encore sur un autre plan donné de position, dont l'intersection avec la droite donnée de position FE, donnera un point D qui est évidemment le centre de la sphère cherchée. Le reste est clair.

Problème V.

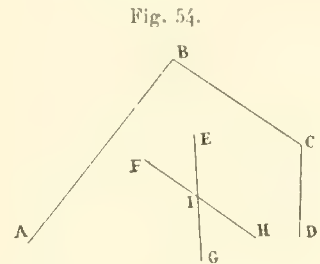
Étant donnés trois plans et un point, trouver une sphère tangente aux plans donnés et passant par le point donné.

Soient donnés les trois plans AB, BC, CD (*fig.* 54) et le point H; il faut trouver une sphère tangente aux trois plans donnés et passant par le point H. Supposons le problème résolu.

Les trois plans donnés, d'après le raisonnement de la proposition précédente, donneront de position une droite qui passe par le centre

de la sphère cherchée. Soit GE cette droite. J'abaisse sur elle, du point donné H, la perpendiculaire HI, qui sera donnée de position et de grandeur; je la prolonge jusqu'en F, en sorte que IF = IH; le point F sera donné.

Fig. 54.



Le centre de la sphère cherchée est sur la droite GE, laquelle est perpendiculaire en I sur le milieu de la droite HF, dont l'extrémité H est, par hypothèse, sur la surface de la sphère. L'autre extrémité F sera donc également sur la surface de la sphère; bien plus le cercle, décrit de I comme centre, avec IH comme rayon, dans le plan perpendiculaire à GE, sera sur la surface de la sphère; or ce cercle est donné de grandeur et de position. Mais si un cercle de la sphère est donné de grandeur et de position, en même temps qu'un certain plan comme AB, d'après un corollaire facile de notre proposition II, la sphère passant par le cercle donné et tangente au plan donné sera donnée. La question est en effet ramenée au problème II, et la solution est dès lors évidente.

Problème VI.

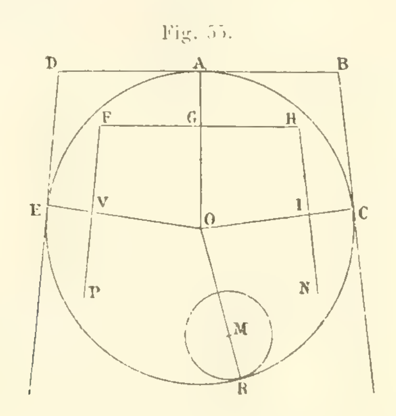
Étant donnés trois plans et une sphère, trouver une sphère tangente à la sphère donnée et aux plans donnés.

Soient donnés les trois plans ED, DB, BC (*fig.* 55) et la sphère RM; il faut construire une sphère tangente à la sphère donnée et aussi aux trois plans donnés.

Supposons le problème résolu et la sphère ERCA satisfaisant aux conditions, c'est-à-dire touchant la sphère en R et les plans aux points E, A, C. Soit O le centre de cette sphère ERCA; joignez RO, EO, AO, CO; ces droites seront égales. D'ailleurs OR passera par le centre M

de la sphère donnée, et les droites EO, OA, OC seront perpendiculaires aux plans donnés DE, DB, BC. Prenons OV = OG = OI = OM, et par les points V, G, I, imaginons menés les plans VP, GH, IN parallèles aux plans donnés ED, DB, BC.

Fig. 55.



Puisque OR = OE et OM = OV, par différence, RM = VE. Mais RM, rayon de la sphère donnée, est donnée de grandeur; donc VE est aussi donnée de grandeur. D'ailleurs OE, perpendiculaire au plan DE, le sera au plan VP parallèle au plan DE; donc VE sera la distance des plans DE, PV. Mais il a été démontré que VE est donnée de grandeur, donc l'intervalle des plans parallèles DE, PV est donné, ainsi que la position de l'un d'eux DE, par hypothèse. Donc PV est aussi donné de position. On prouvera de même que les plans GH, IN sont donnés de position. Or les droites OV, OG, OI sont perpendiculaires à ces plans et égales à OM. Donc la sphère décrite de O comme centre, avec OM pour rayon, sera tangente aux plans PV, GH, IN donnés de position. Mais le point M est donné aussi, comme centre de la sphère donnée. Ainsi la question est ramenée à celle-ci : Étant donnés trois plans PV, GH, IN et un point M, trouver une sphère passant par le point donné M et tangente aux plans donnés PV, GH, IN, c'est-à-dire que le problème est ramené au précédent.

J'userai dans la suite du même artifice quand il n'y aura pas de points parmi les données, mais seulement des sphères et des plans, pour substituer un point donné à une des sphères.

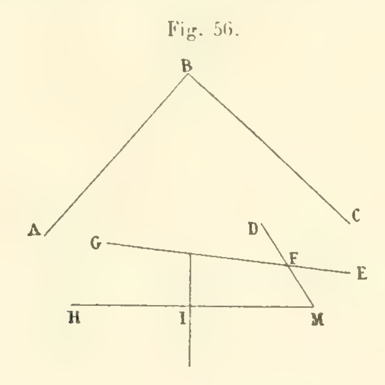
Problème VII.

Étant donnés deux points et deux plans, trouver une sphère passant par les points donnés et tangente aux plans donnés.

Soient donnés les deux plans AB, BC (*fig.* 56) et les deux points H, M; il faut trouver une sphère passant par les points H, M et tangente aux plans AB, BC.

Je joins HM, je prends son milieu en I; par le point I, qui est donné, je fais passer un plan normal à la droite HM. Les points H, M étant

Fig. 56.



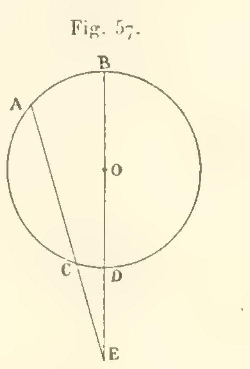
sur la surface de la sphère, il est clair que le centre de la sphère est sur ce plan normal à HM et passant par I, plan qui est donné de position, puisque la droite HM et le point I le sont.

Ainsi, à cause des points H et M, le centre de la sphère est sur un plan donné de position. Mais, à cause des plans AB, BC, par une démonstration déjà faite, il est aussi sur un autre plan donné, donc sur une droite donnée de position, soit GE. J'abaisse sur cette droite, de l'un des points donnés M, la perpendiculaire MF; elle sera donnée de grandeur et de position. Je la prolonge jusqu'en D en sorte que FD = MF. Le point D sera donné et, d'après une démonstration déjà faite, se trouvera sur la surface de la sphère. On a donc comme données : trois points H, M, D par lesquels passe la sphère cherchée, et le plan AB auquel elle est tangente; la question est donc ramenée au problème II.

Avant d'aller plus loin, il faut établir quelques lemmes faciles.

Lemme I. — Soit le cercle BCD (*fig.* 57) en dehors duquel je prends un point quelconque E; par ce point et le centre je mène la droite EDOB, puis une autre quelconque ECA. Il est clair, d'après les Éléments, que AE.EC = BE.ED.

Fig. 57.

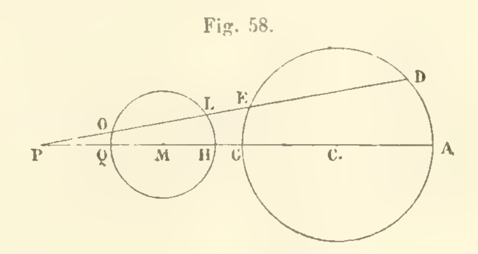


Soit maintenant la sphère de centre O et de grand cercle ACDB; si du même point E, par un point quelconque de la surface de la sphère, je fais passer une droite ECA jusqu'à sa seconde rencontre avec la surface sphérique, on aura encore AE.EC = BE.ED.

Si en effet on imagine qu'autour de la droite BDE immobile tournent et le cercle et la droite ECA, les droites EC, EA restent invariables, puisque les points C, A décriront des cercles normaux sur l'axe. Par conséquent, dans tous les plans on aura AE.EC = BE.ED.

Lemme II. — Soient dans un même plan deux cercles ADE, HLO

Fig. 58.



(*fig.* 58); par leur centre je fais passer la droite ACMP et je suppose $\frac{\text{rayon AC}}{\text{rayon HM}} = \frac{\text{CP}}{\text{MP}}$. Par le point P je mène *ad libitum* une droite POLED

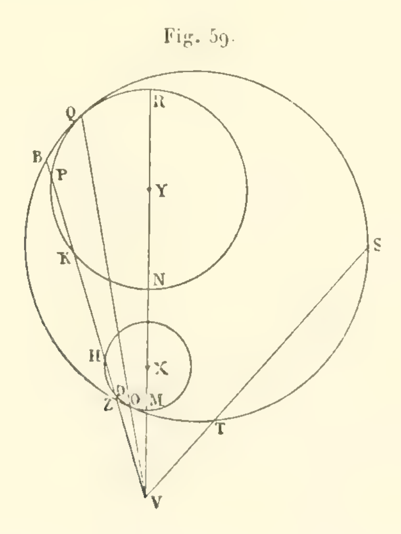
coupant les deux cercles, aux points O, L, E, D. Apollonius Gallus a démontré que l'on a

$$AP.PQ = GP.PH = DP.PO = EP.PL.$$

La vérité de cette proposition en sphérique importe pour les problèmes suivants. Mais elle est évidente; car si, autour de l'axe AP immobile, on fait tourner en même temps les deux cercles et la droite POLED, les droites PO, PL, PE, PD resteront invariables pour la raison donnée dans le lemme précédent; les rectangles restent donc aussi invariables et la proposition est vraie dans un plan quelconque.

Lemme III. — Soient données deux sphères YN, XM (*fig.* 59), par

Fig. 59.



les centres desquelles on fait passer la droite RYNXMV; je pose $\frac{\text{rayon YN}}{\text{rayon XM}} = \frac{YV}{VX}$. Du point V, je mène VTS dans un plan quelconque, et je pose SV.VT = RV.VM. Si l'on décrit une sphère quelconque passant par les points T, S et touchant une des deux sphères, elle touchera également l'autre.

Supposons la sphère OTS, passant par les points T, S et tangente en O à la sphère MX; je dis que la sphère YN sera également touchée par la sphère OTS.

Je prolonge VO jusqu'à sa seconde rencontre en Q avec la sphère OTS. D'après le premier lemme : QV.VO = SV.VT. Mais par construction : SV.VT = RV.VM. Ce dernier rectangle, d'après le second lemme, est égal au produit de VO et de la droite passant par V, O et prolongée jusqu'à la rencontre de la sphère YN. Donc le point Q est sur la surface de la sphère YN : il est donc commun aux surfaces des deux sphères YN, OTS.

Je dis maintenant que les deux sphères se touchent en ce point Q. Menons en effet par le point V et un point quelconque de la sphère OTS, une droite quelconque dans un plan quelconque, soit VZ qui, prolongée, coupe les trois sphères aux points Z, D, H, K, P, B. D'après les lemmes I et II :

ZV.VB (sphère OTS) = DV.VP (sphères XM, YN).

Mais DV > VZ, puisque la sphère OTS touche extérieurement la sphère XM en O, et que la droite qui coupe la sphère OTS la rencontrera dès lors avant de rencontrer la sphère XM. Puis donc que DV.VP = ZV.VB et que ZV < DV, on aura PV < BV. Donc le point B est extérieur à la sphère YN.

On prouvera, par un raisonnement pareil, que tous les points de la sphère enveloppante sont extérieurs, sauf le point Q. Donc la sphère OTS y est tangente à la sphère YN. C. Q. F. D.

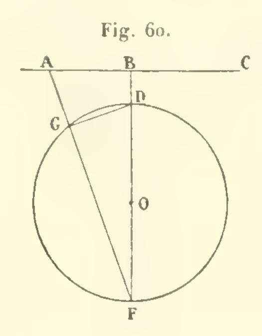
La démonstration sera la même et aussi facile pour les contacts intérieurs et dans tous les cas.

Lemme IV. — Soient le plan AC (*fig.* 60) et la sphère DGF, dont le centre est O; par le centre O, je mène FODB perpendiculaire au plan, puis, par le point F, une droite quelconque coupant la sphère en G et le plan en A. Je dis que AF.FG = BF.FD.

En effet, coupons la sphère et le plan donné suivant le plan du triangle ABF; soient, comme intersections, le cercle GFD sur la sphère, la droite ABC dans le plan. FB, perpendiculaire au plan AC, le sera à la droite AC. On a donc, dans un même plan, le cercle DGF et la droite AC, avec FDB passant par le centre du cercle et perpendicu-

laire à AC. Si l'on joint GD, les angles en G, B sont droits; donc le quadrilatère ABDG est inscriptible.

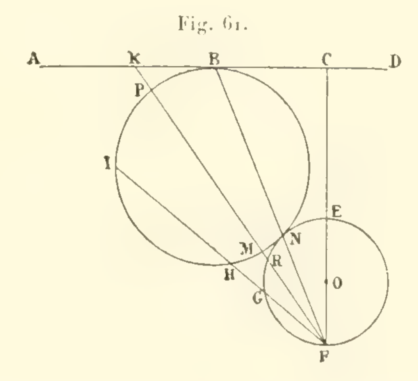
Fig. 60.



Donc AF.FG = BF.FD, et la même démonstration peut se faire pour toute autre section de la sphère.

Lemme V. — Soient le plan ABD (*fig.* 61) et la sphère EGF de centre O; par ce centre O, je fais passer la droite FOEC perpendi-

Fig. 61.



culaire au plan, et, dans un autre plan quelconque, je mène la droite FGHI. Soit IF.FH = CF.FE. Si, par les points I, H, je décris une sphère qui touche le plan AC, elle sera également tangente à la sphère EGF.

Imaginons construite la sphère IHB, passant par les points I, H, et tangente en B au plan AC; je dis que les sphères EGF, IHB sont tangentes.

Je joins FB; soit CF.FE = BF.FN; d'après le lemme qui précède, le point N sera sur la surface de la sphère EGF. Mais, par construction,

CF.FE = IF.FH; donc IF.FH = BF.FN. Donc le point N est sur la surface de la sphère IBH.

Il faut maintenant prouver que les sphères EGF, IBH sont tangentes en N, ce qui est facile. Par le point F et un point quelconque de la sphère EGF, je mène FR qui rencontre la sphère IBH en M et en P, et le plan AC en K. D'après le lemme précédent,

$$KF.FR = CF.FE = IF.FH \text{ (par construction)} = PF.FM.$$

Mais si KF.FR = PF.FM, comme KF > FP (la sphère IBH étant tangente en B au plan AC), FR < FM; donc le point R est extérieur à la sphère IBH. Il en sera de même pour tout autre point de la sphère EGF dans un plan quelconque des deux côtés du point N. Donc les sphères EGF, IBH sont tangentes en N.

Ces lemmes quoique faciles sont très beaux, surtout III et V. Dans le lemme III, en effet, on a une infinité de sphères tangentes à la sphère XM et passant par les points T, S, mais il est prouvé que toutes ces sphères en nombre infini sont tangentes à la sphère YN. Dans le lemme V, on a de même une infinité de sphères passant par les points I, H et tangentes au plan AC, et toutes ces sphères en nombre infini touchent la sphère EGF.

Ceci posé, il est facile de résoudre les autres problèmes.

Problème VIII.

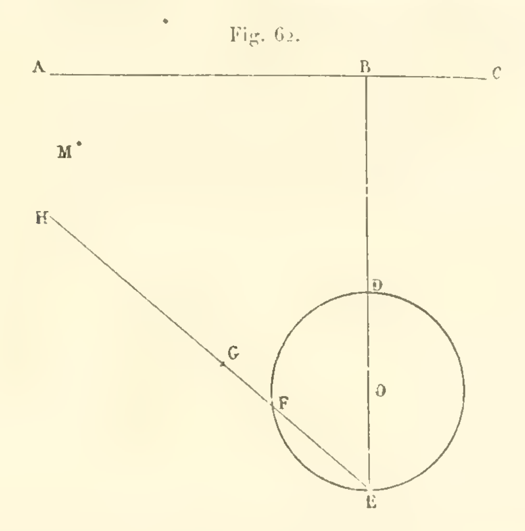
Étant donnés deux points, un plan et une sphère, trouver une sphère passant par les points donnés et tangente au plan donné et à la sphère donnée.

Soient donnés le plan ABC (*fig.* 62), la sphère DFE, et les points H, M. Par le centre O de la sphère donnée, j'abaisse sur le plan donné ABC la perpendiculaire EODB; je joins HE, et je pose BE.ED = HE.EG. Le point G sera donné.

Étant donnés trois points H, G, M et un plan, on cherchera (problème II) une sphère passant par les trois points donnés et tangente au plan donné. Elle résoudra le problème.

Elle passe en effet par les deux points donnés H, M, et est tangente au plan ABC par construction et à la sphère DFE d'après le lemme V;

Fig. 62.

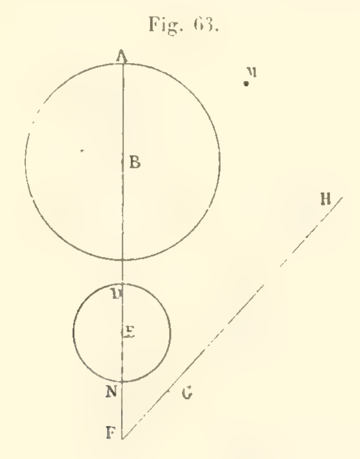


en effet, puisque HE.EG = BE.ED, toute sphère passant par les deux points H et G et tangente au plan ABC touchera aussi la sphère DEF.

Problème IX.

Étant donnés deux points et deux sphères, trouver une sphère passant par les deux points donnés et tangente aux sphères données.

Fig. 63.



Soient données les deux sphères AB, DE (*fig.* 63) et les deux

points H, M. Je mène AF par les centres des sphères données, et je pose $\frac{\text{rayon AB}}{\text{rayon DE}} = \frac{\text{BF}}{\text{FE}}$; le point F sera donné; soit encore NF.FA = HF.FG, le point G sera donné.

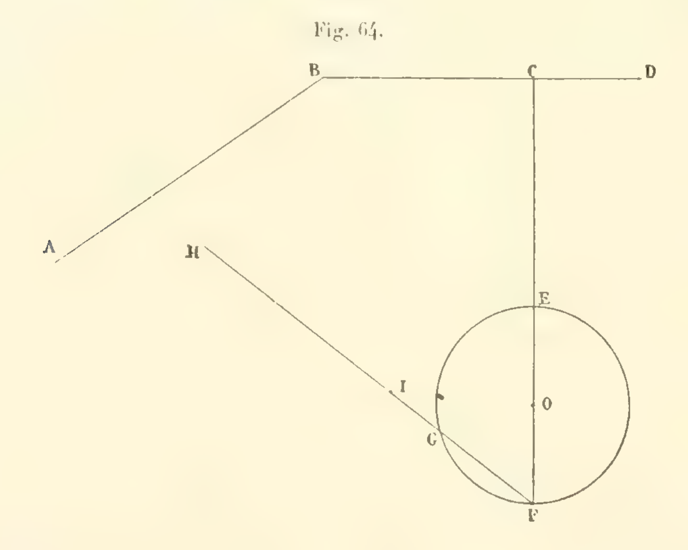
Étant donnés trois points M, G, H et une sphère DN, on cherchera (problème III) une sphère passant par les trois points donnés et tangente à la sphère donnée DN; elle touchera aussi la sphère AB, d'après le lemme III, et ainsi le problème sera résolu.

Problème X.

Étant donnés un point, deux plans et une sphère, trouver une sphère passant par le point donné et tangente à la sphère et aux deux plans donnés.

Soient donnés les deux plans AB, BD (*fig.* 64), la sphère EGF et le point H. Du point O, centre de la sphère donnée, j'abaisse sur un des

Fig. 64.



deux plans donnés la perpendiculaire CEOF, et je pose CF.FE=HF.FI. Les deux points H, I étant donnés avec les deux plans AB, BD, je cherche (problème VII) une sphère passant par les deux points donnés et tangente aux deux plans donnés; elle touchera aussi la sphère (lemme V) et le problème sera résolu.

Problème XI.

Étant donnés un point, un plan, et deux sphères, trouver une sphère passant par le point donné, et tangente au plan donné ainsi qu'aux deux sphères données.

Un raisonnement semblable aux précédents ramènera la question au problème VIII, où l'on donne deux points, un plan et une sphère, et cela par le moyen du lemme V. On peut aussi se servir du lemme III pour ramener de même la question à ce problème VIII, mais par une autre construction.

Problème XII.

Étant donnés un point et trois sphères, trouver une sphère qui passe par le point donné et touche les sphères données.

Je ne fais pas non plus la figure; car le lemme III ramène immédiatement la question au problème IX où l'on donne deux points et deux sphères.

Problème XIII.

Étant donnés deux plans et deux sphères, trouver une sphère qui touche les plans donnés et les sphères données.

Supposons le problème résolu. Si nous imaginons, concentrique à la surface sphérique trouvée, une autre surface sphérique parallèle à une distance égale au rayon de la plus petite des sphères données, cette nouvelle surface sphérique sera tangente à des plans distants des donnés d'un intervalle égal à ce rayon de la plus petite sphère, et tangents également à une sphère concentrique à la plus grande et dont le rayon différera de celui de la plus grande du rayon de la plus petite.

Cette dernière sphère est donc donnée, de même que les plans menés parallèlement aux donnés à une distance égale au rayon de la moindre sphère. Enfin la nouvelle surface sphérique passe par le centre de la moindre des sphères données, centre qui est donné.

Ainsi, par ce même artifice que nous avons déjà employé dans le problème VI, la question est ramenée au problème X : Étant donnés un point, deux plans et une sphère, trouver etc.

Problème XIV.

Étant donnés trois sphères et un plan, trouver une sphère tangente aux sphères et au plan donné.

Par le même moyen que dans le problème VI et dans le précédent, on ramènera la question au problème XI : Étant donné un point, un plan et deux sphères, etc.

Problème XV.

Étant données quatre sphères, trouver une sphère qui leur soit tangente.

Supposons le problème résolu. Par la méthode qu'a employée Apollonius Gallus pour ramener le problème des trois cercles à celui d'un point et de deux cercles, méthode que nous avons déjà employée aussi dans les problèmes précédents, nous ramènerons ce bel et célèbre problème au problème XII, où l'on donne trois sphères et un point.

Ainsi nous avons achevé entièrement le travail proposé, et brillamment complété Apollonius Gallus; toutefois, pour ne pas allonger indéfiniment ce traité des contacts sphériques, nous avons négligé les cas divers, les limitations et les menus détails.

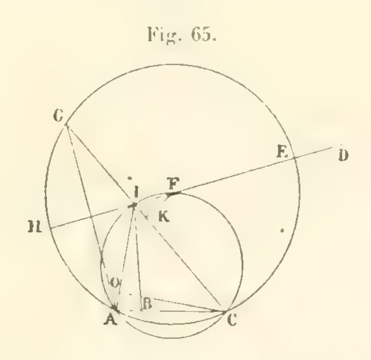
FRAGMENTS GÉOMÉTRIQUES.

SOLUTION D'UN PROBLÈME PROPOSÉ PAR M. DE PASCAL.

M. de Pascal a proposé : *Dans un triangle, étant donné l'angle au sommet et le rapport de la hauteur à la différence des côtés, trouver l'espèce du triangle.*

Soit AC (*fig.* 65) une droite donnée quelconque, sur laquelle on décrit le segment de cercle AIFC, capable de l'angle donné. La question est ramenée à chercher un triangle dont on donne la base AC, l'angle au sommet AIC et le rapport de la hauteur à la différence des côtés.

Fig. 65.



Supposons le problème résolu ; soit AIC le triangle cherché ; j'abaisse la hauteur IB, je prends le milieu F de l'arc AFC. Je joins FA, FC et FI, j'abaisse sur AI, IC les perpendiculaires CO, FK ; de F comme centre, avec AF pour rayon, je décris le cercle AHGEC, que les droites CI, FI

prolongées rencontrent aux points G, H, E. Enfin je joins GA. $\widehat{AFC}$ au centre est double de $\widehat{AGC}$ à la circonférence. Mais $\widehat{AIC} = \widehat{AFC}$ dans le même segment. Donc $\widehat{AIC} = 2\widehat{AGC}$. Mais $\widehat{AIC} = \widehat{AGC} + \widehat{IAG}$. Donc $\widehat{IGA} = \widehat{IAG}$. Donc IA = IG. Mais, FK étant perpendiculaire du centre F sur GC, on a GK = KC. Donc KI $= \frac{1}{2}(CI - IG) = \frac{1}{2}(CI - IA)$.

Mais le rapport $\frac{BI}{CI - IA}$ est donné, donc $\frac{BI}{IK}$, et en multipliant de part et d'autre par AC, $\frac{AC.BI}{AC.IK}$. Mais AC.BI = AI.CO, le triangle AIC étant la moitié de chacun de ces deux rectangles. Donc le rapport $\frac{AI.CO}{AC.IK}$ est donné.

Mais, par hypothèse, $\widehat{AIC}$ est donné, $\widehat{COI}$ est droit par construction. Donc ΔCOI est donné d'espèce. Donc le rapport $\frac{CO}{CI}$ est donné, donc $\frac{AI.CO}{AI.IC}$. Mais j'ai prouvé que $\frac{AI.OC}{AC.IK}$ est donné; donc $\frac{AI.IC}{AC.IK}$ est donné.

Maintenant dans le triangle isoscèle AFC, $\widehat{AFC}$ est donné par hypothèse, donc $\widehat{FAC}$, donc $\widehat{CIF}$ son égal; mais $\widehat{FKI}$ est droit, donc ΔFIK est donné d'espèce, donc $\frac{KI}{IF}$, donc $\frac{AC.IK}{AC.IF}$.

Mais j'ai prouvé que $\frac{AI.IC}{AC.IK}$ est donné, donc $\frac{AI.IC}{AC.IF}$ est donné. Mais CI.IA = CI.IG, puisque IG = IA, et CI.IG = HI.IE. Donc $\frac{HI.IE}{AC.IF}$ est donné.

Soit $\frac{ED}{AC}$ ce rapport donné : AC étant donnée, ED le sera; portons cette longueur sur le prolongement de HE, comme dans la figure. $\frac{HI.IE}{AC.IF} = \frac{ED}{AC}$ (rapport donné). Mais $\frac{DE}{AC} = \frac{DE.IF}{AC.IF}$. Donc $\frac{HI.IE}{AC.IF} = \frac{DE.IF}{AC.IF}$. Donc DE.IF = HI.IE.

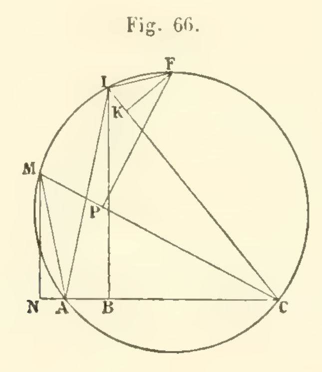
Mais j'ai prouvé que le triangle AFC est donné d'espèce; la base AC est donnée de grandeur; donc AF est donnée, donc son double HE.

Aux rectangles égaux DE.IF, HI.IE, ajoutons de part et d'autre

DE.IH. On aura DE.FH = DI.IH. Mais, DE, FH étant données, DE.FH le sera; donc DI.IH; et ce produit appliqué sur la droite DH donnée de grandeur est en défaut d'une figure carrée (¹); donc IH est donnée, et par différence IF. Mais F est donné de position, donc le point I et tout le triangle AIC. Il est facile de remonter de l'analyse à la synthèse.

Pour dissiper tous les doutes, il est aisé de prouver que le triangle cherché est semblable au trouvé AIC de la seconde figure (*fig.* 66)

Fig. 66.



(ce triangle peut au reste avoir son sommet des deux côtés du point F, à égale distance de part et d'autre du point F; il sera le même d'espèce et de grandeur, la position seule sera différente). Si le triangle cherché n'est pas semblable au trouvé, la base restant la même, son sommet tombera entre les points F, I, ou entre les points I, A (le côté n'importe pas, car du côté FC on peut faire la même démonstration avec le second triangle AIC.)

Soit d'abord le sommet entre A et I, et supposons, s'il est possible, le triangle cherché semblable au triangle AMC. Je joins FM, et j'abaisse la perpendiculaire FP; le rapport $\frac{MN}{MP}$ sera donné par hypothèse et par conséquent égal à $\frac{IB}{IK}$ que nous avons prouvé être égal au rapport donné; ce qui est absurde.

(¹) C'est-à-dire que $DI.IH = DH.IH - IH^2$.

En effet, dans les triangles rectangles FMP, FIK, $\widehat{M} = \widehat{I}$, donc ces triangles FIK, FMP sont semblables; mais FM > FI, donc MP > IK. Mais MN < IB, donc $\frac{MN}{MP}$ ne peut être égal à $\frac{IB}{IK}$.

Si le point M tombe entre I et F, on prouvera que la hauteur est plus grande et la différence des côtés plus petite et cela par le même raisonnement; donc le rapport est différent. Si M est du côté FC, on se servira du second triangle AIC, et la démonstration sera la même. Il est ainsi inutile de s'arrêter plus longtemps à ces cas, et il est constant que le triangle cherché est semblable au trouvé AIC. Le problème est donc résolu.

Je propose en revanche, s'ils le veulent bien, tant à M. de Pascal qu'à M. de Roberval, de résoudre ce problème :

En un point donné sur une spirale de Galilée, trouver la tangente.

M. de Roberval sait ce qu'est cette spirale.

J'ai résolu ce problème et j'en attends la solution d'hommes aussi savants qu'ils le sont; mais, s'ils le préfèrent, je leur communiquerai la mienne et même une méthode générale pour les tangentes des lignes courbes.

Toutefois, pour ne pas paraître quitter les mains vides ce sujet des triangles, je puis proposer les questions suivantes :

Étant donnés la base, l'angle au sommet et la somme de la hauteur et de la différence des côtés, trouver le triangle.

Étant donnés la base, l'angle au sommet et la différence de la hauteur et de la différence des côtés, trouver le triangle.

Étant donnés la base, l'angle au sommet et le produit de la hauteur par la différence des côtés, trouver le triangle.

Étant donnés la base, l'angle au sommet et la somme des carrés de la hauteur et de la différence des côtés, trouver le triangle.

ainsi que beaucoup d'autres questions semblables que mes savants correspondants résoudront toutefois plus facilement, je pense, que le

problème ou théorème proposé sur la tangente à la spirale de Galilée.

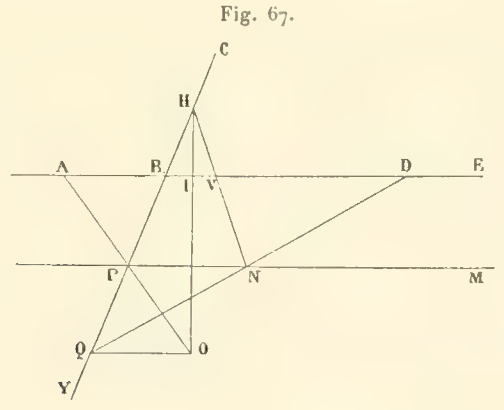
Il faut observer que, dans les questions sur les triangles, toutes les fois que le problème peut être résolu par les lieux plans, il ne faut pas recourir aux solides, mais mes savants correspondants le savent assez, et il était sans doute inutile de faire cette remarque.

DEUX PORISMES

(DE PIERRE DE FERMAT).

Porisme I. — *Étant données de position deux droites* ABE, YBC (*fig.* 67), *se coupant au point* B, *et deux points* A, D *sur la droite* ABE, *trouver deux points, par exemple* O, N, *tels que si l'on en mène, brisée sur un point quelconque* H *de la droite* YBC, *une ligne* OHN *coupant aux points* I *et* V *la droite* ABD, *on ait* AI × DV *égal à une aire donnée, savoir* AB × BD.

Fig. 67.



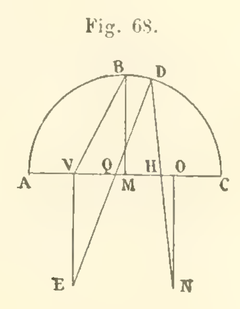
Voici la construction porismatique d'Euclide qui représente la solution la plus générale du problème.

Soit pris quelconque le point O; je joins AO qui coupe YBC en P, et, par O, je mène OQ parallèle à ABD et rencontrant YBC en Q. Je mène également, parallèle à ABD, l'indéfinie PNM. Je joins QD qui

coupe PNM en N. Je dis que les deux points O, N satisfont à la question, c'est-à-dire que si l'on prend n'importe où sur la droite YBC un point H, et qu'on joigne OH, NH, qui coupent la droite ABD aux points I, V, on aura dans tous les cas $AI \times DV = AB \times BD$.

Porisme II. — *Étant donné un cercle* ABDC (*fig.* 68) *de diamètre* AC, *de centre* M, *trouver deux points* E, N, *tels que si l'on en mène, brisée sur un point quelconque* D *de la circonférence, une ligne* EDN *coupant le diamètre aux points* Q, H, *la somme des carrés de* QD, DH *soit au triangle* QDH *dans un rapport donné et que cette relation subsiste toujours généralement, quelle que soit la ligne brisée.*

Fig. 68.



J'élève du centre M perpendiculairement au diamètre la droite MB. Je pose $\frac{4BV}{VM}$ égal au rapport donné. En V, j'élève VE perpendiculaire au diamètre et égale à VB; je prends $MO = MV$, et je mène ON égale et parallèle à VE. Je dis que les points cherchés sont les points E, N, c'est-à-dire que si l'on prend un point quelconque D de la circonférence, qu'on joigne ED, ND, qui coupent le diamètre aux points Q, H, on aura dans tous les cas le rapport $\frac{QD^2 + DH^2}{\text{triangle } QDH}$ égal au donné, savoir $\frac{4BV}{VM}$.

On ne propose pas seulement de trouver la démonstration de ce porisme. Que les mathématiciens plus subtils voient s'il n'y a pas en dehors de E et de N deux autres points qui puissent satisfaire au problème et s'il y a, comme dans le premier porisme, des solutions en

nombre indéfini. Si je n'ai pas de réponse, je ne dédaignerai pas de venir au secours de la Géométrie sur le point où elle se trouvera en défaut.

PORISMES D'EUCLIDE,

LEUR THÉORIE RENOUVELÉE ET PRÉSENTÉE AUX GÉOMÈTRES MODERNES SOUS FORME D'INTRODUCTION.

Au commencement de son Livre VII, Pappus a énuméré les Livres des géomètres anciens qui faisaient partie de l'ensemble analytique. Tous ces Livres sont perdus par l'effet du temps, sauf le seul Livre d'Euclide sur les *Données* et les quatre premiers des *Coniques* d'Apollonius; aussi les géomètres modernes ont-ils eu à faire de grands efforts pour réparer tant soit peu la perte d'Ouvrages, dont l'âge destructeur tendait à abolir jusqu'à la mémoire. Avant tous, François Viète, ce génie si subtil qu'on ne louera jamais assez, a heureusement restitué les Livres d'Apollonius *Sur les contacts* dans un Livre unique qu'il a intitulé l' « *Apollonius Gallus* ». Son exemple a excité Marino Ghetaldi et Willebrord Snellius à aborder des entreprises analogues, dans lesquelles ils ont assez réussi pour que, grâce à eux, nous ne regrettions plus guère les Livres d'Apollonius *De la section en rapport, De la section en produit, De la section déterminée, Des convergences*. Suivaient les *Lieux plans*, les *Lieux solides* et les *Lieux en surface*. Ces matières ont été traitées à leur tour par des géomètres dont le nom n'est pas inconnu, et, quoique manuscrits et encore inédits, leurs travaux ne sont pas restés ignorés.

Mais il reste encore, vierge de toute tentative et comme désespérante, la théorie des Porismes d'Euclide. Pappus a beau affirmer que c'était « une œuvre pleine d'art et de la plus grande utilité pour la solution des problèmes les plus obscurs », les géomètres de l'âge écoulé ou du temps actuel en ont ignoré jusqu'au nom, ou n'ont pas

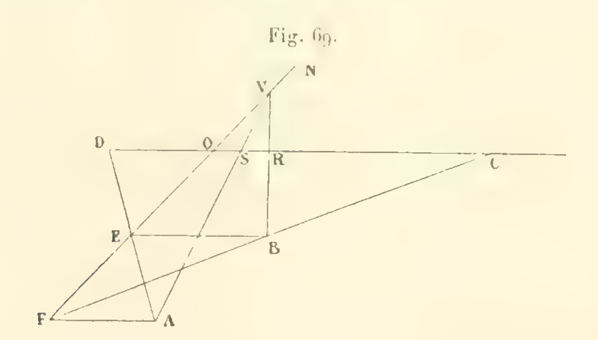
même soupçonné de quoi il s'agissait. J'ai longtemps tâtonné dans de profondes ténèbres, cherchant en vain comment relever la Géométrie de ce côté, jusqu'à ce qu'enfin « une lumière éclatante a frappé mes yeux et a dissipé pour eux l'obscurité de la nuit ». Je ne veux pas cacher jalousement à la postérité un spécimen de ma découverte à la fois ancienne et nouvelle, alors que l'astre de Suède brille sur toutes les sciences et que nous déroberions en vain comme des mystères les secrets des Mathématiques; il n'est en effet rien qui puisse échapper au clairvoyant génie de cette reine incomparable, et il ne nous est pas permis de cacher une théorie qui, nous pouvons à peine en douter, serait découverte au premier signe venu d'elle, comme inspiration ou comme ordre.

Pour jeter donc la lumière sur toute cette question des porismes, j'ai choisi un certain nombre des plus remarquables propositions porismatiques, et je les présente avec confiance à l'attention et à l'examen des géomètres, pour bien faire connaître ce qu'est un porisme et quel en est surtout l'usage.

Porisme I.

Soient deux droites ON, OC (*fig.* 69) formant un angle au point O et données de position. Soient donnés également les points A et B.

Fig. 69.



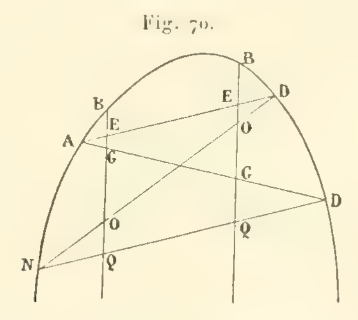
De ces points A, B, on mène les droites BE, AF, parallèles à OC et rencontrant NO prolongée aux points E, F. On joint AE qui rencontre CO prolongée en D, et on joint aussi FB qui rencontre en C cette même

droite CO. Si maintenant d'un point quelconque de la droite ON, V par exemple, on mène les droites AV, BV, soit S le point de rencontre de AV et de OC, R celui de BV et de la même droite OC, on aura toujours $CR \times DS = CO \times DO$, c'est-à-dire une aire donnée.

Porisme II.

Soit une parabole quelconque NAB (*fig.* 70) et un de ses diamètres quelconque BEO. Je prends sur la courbe deux points quelconques D

Fig. 70.

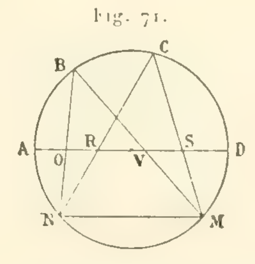


et N, desquels je mène des droites concourant en un autre point quelconque de la courbe, soit en D. Ces droites AD, DN couperont le diamètre en des points tels que E, O ou G, Q. Les abscisses sur un même diamètre seront toujours dans un même rapport, c'est-à-dire qu'on aura constamment $\frac{OB}{BE} = \frac{QB}{GB}$.

Porisme III.

Soit un cercle ayant pour diamètre une droite AD (*fig.* 71); je mène

Fig. 71.



à celle-ci une parallèle quelconque NM, rencontrant le cercle aux points N, M. Soient donnés ces points N, M; je mène arbitrairement de

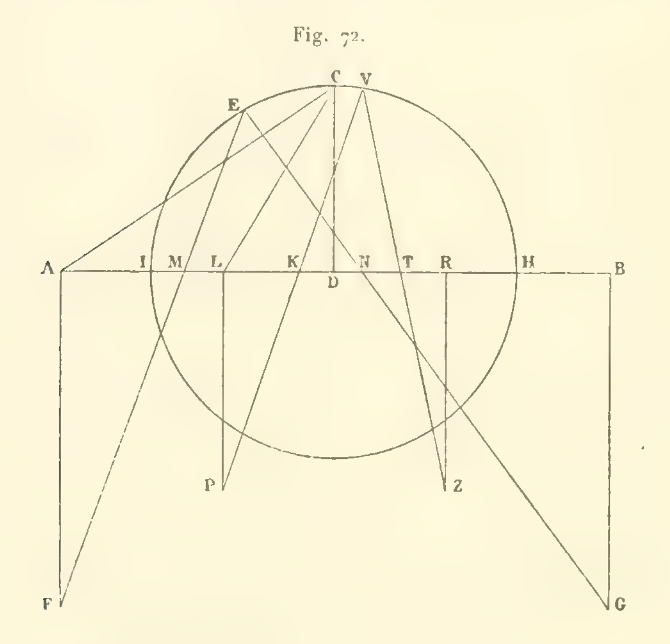
ces points une ligne NBM brisée sur le cercle et qui coupe le diamètre en des points O, V. Je dis que le rapport $\frac{AO.DV}{AV.DO}$ est donné; ou bien que si l'on mène une autre ligne brisée NCM, coupant le diamètre aux points R, S, on aura toujours $\frac{AO.DV}{AV.DO} = \frac{AR.DS}{AS.DR}$.

Il est facile d'étendre cette proposition aux ellipses, aux hyperboles et aux sections opposées.

Porisme IV.

Soit le cercle ICH (*fig.* 72), son diamètre IDH donné, son centre D, son rayon CD normal au diamètre. Soient sur le prolongement du dia-

Fig. 72.



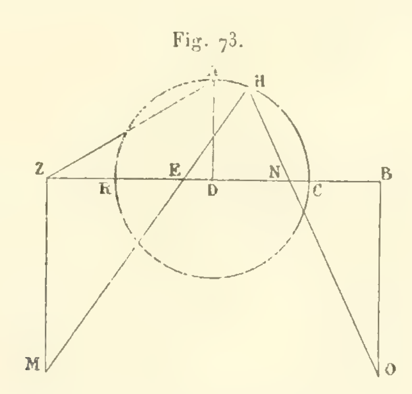
mètre deux points B, A donnés de telle sorte que AI = BH. Soit posé $\frac{DI}{IA} = \frac{DL}{LI}$ et DR = DL; les points R et L seront donnés. Qu'on joigne CA et qu'on prenne, égale à cette droite, AF perpendiculaire au diamètre. Soit enfin BG égale et parallèle à AF, et des points F, G, menée brisée sur le cercle une droite FEG qui coupe le diamètre aux points M et N. Je dis que la somme $RM^2 + LN^2$ est toujours égale à une même aire donnée.

En second lieu, avec les mêmes positions, si l'on joint CL, que l'on prenne, égale à cette droite, LP perpendiculaire au diamètre, et qu'on mène RZ parallèle et égale à LP; si des deux points Z et P on mène brisée sur la circonférence une ligne comme PVZ, coupant le diamètre aux points K, T, la somme $AT^2 + BK^2$ sera toujours égale à une autre aire donnée.

Porisme V.

Soit le cercle RAC (*fig.* 73), son diamètre RDC donné, son centre D, son rayon DA normal au diamètre. Soient pris arbitrairement sur le

Fig. 73.



diamètre, mais à égale distance du centre D, deux points Z, B. Joignons AZ; menons, égale à cette droite, ZM perpendiculaire au diamètre et BO égale et parallèle à ZM. Qu'on mène, brisée sur la circonférence, une ligne quelconque MHO, coupant le diamètre aux points E, N; le rapport $\frac{EH^2 + HN^2}{\text{triangle } EHN}$ sera donné et égal au rapport $\frac{AZ}{\frac{1}{2}ZD}$.

Par l'énoncé de ces propositions, dont personne ne niera l'élégance et la beauté, on peut facilement reconnaître la nature même des porismes. Il est évident en effet qu'on peut, ainsi que le dit Pappus, les énoncer comme théorèmes ou comme problèmes. Je les ai énoncées comme théorèmes; mais rien n'empêche de les transformer en problèmes. Par exemple le porisme V peut être conçu comme suit :

Étant donné un cercle RAC *de diamètre* RC, *trouver deux points* M *et* O, *tels que si de ces points on mène, brisée sur la circonférence, une*

ligne quelconque MHO, *on ait toujours comme donné le rapport au triangle* EHN *de la somme des carrés des abscisses* EH, HN.

La construction résulte du théorème qui précède : si en effet on prend dans le rapport donné $\frac{AZ}{\frac{1}{4}ZD}$, tout le reste s'ensuit. De la même manière, on peut, pour tous les autres porismes sans exception, transformer facilement les théorèmes en problèmes.

D'autre part, Pappus indique qu'au sens des géomètres postérieurs à Euclide : « le porisme est en défaut, en ce qui concerne l'hypothèse, par rapport au théorème de lieu ». Cela révèle entièrement la nature spéciale du porisme et ç'a été presque sans autre indice que celui fourni par ces mots que nous avons pénétré les secrets de cette matière.

Lorsque nous cherchons un lieu, nous nous proposons de trouver une ligne droite ou une courbe qui nous est inconnue en tant seulement que nous avons à déterminer le lieu qu'occupe la ligne à trouver; mais quand nous partons d'un lieu supposé donné et connu pour en trouver un autre, ce nouveau lieu est appelé *porisme* par Euclide, et c'est pourquoi Pappus a ajouté avec grande raison que les lieux eux-mêmes sont une espèce de porismes et qu'on leur donne ce nom.

Comme seul exemple, nous allons appliquer notre définition à la figure du porisme V. La droite RC étant donnée, si l'on cherche une courbe quelconque telle que RAB dont la propriété soit qu'en abaissant d'un quelconque de ses points A la perpendiculaire AD, on ait $AD^2 = RD \times DC$, nous trouverons que la courbe RAC est une circonférence de cercle. Mais si, ce lieu étant déjà donné, nous partons de là pour en trouver un autre, par exemple, le problème du porisme V, ce nouveau lieu sera appelé *porisme,* comme tous les autres en nombre infini que la sagacité d'un analyste exercé peut imaginer et déduire de celui qui est déjà connu.

Comme nous l'avons déjà dit, les lieux eux-mêmes sont des porismes; il faut d'ailleurs corriger d'après le texte grec l'erreur du traducteur

de Pappus à cet endroit où il dit que : « *L'Ouvrage des Porismes est très utile pour les résolutions des problèmes les plus obscurs et de leurs genres qui ne comprennent pas cette nature qui en fournit la multitude* ». Ces derniers mots, pour ainsi dire, n'offrent aucun sens; il faut recourir à Pappus lui-même dont le texte est le suivant, d'après les manuscrits :

Πορίσματα ἐστὶ πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος.

Pappus dit que *les porismes servent à l'analyse des problèmes plus obscurs et des genres,* c'est-à-dire des problèmes généraux. Il résulte en effet de ce que nous avons dit que les propositions des porismes sont générales au plus haut degré. Puis il ajoute : « *dont la nature fournit une multitude à peine compréhensible à l'esprit* », mots par lesquels il indique ces solutions en nombre infini du même problème, qui tiennent presque du miracle.

A notre invention de ces théorèmes ou problèmes, s'ajoute une méthode particulière, dérivant de la pure Analyse, et grâce à laquelle, avec les cinq porismes précédents, nous en avons trouvé, construit et démontré beaucoup d'autres.

Si les savants accueillent avec faveur ce peu que nous donnons à titre seulement d'introduction et de prodrome d'une œuvre plus approfondie, nous pourrons un jour restituer la totalité des trois Livres des porismes, et, bien plus, pousser plus loin qu'Euclide lui-même et découvrir des porismes vraiment étonnants et qui jusqu'à présent sont inconnus, sur les sections coniques et sur d'autres courbes quelconques.

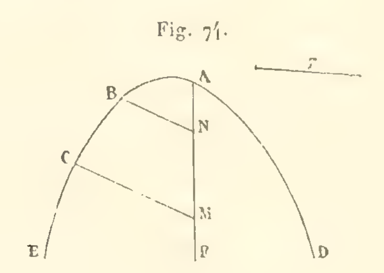
PROPOSITION DE M. DE FERMAT SUR LA PARABOLE.

J'ai proposé de *décrire une parabole par quatre points donnés.*

Il y a deux cas, pour chacun desquels il faut d'abord poser le lemme

suivant. Soit ECBAD (*fig.* 74) une parabole dont le diamètre AF est donné de position; soient également donnés les points B, C de la parabole et l'angle des ordonnées sur le diamètre AF. Je dis que la parabole est donnée de position.

Fig. 74.



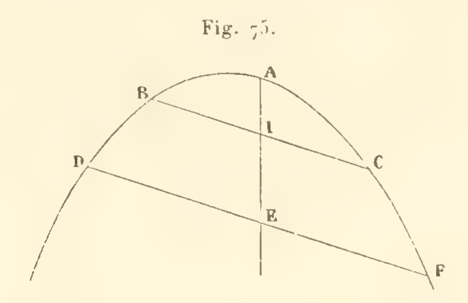
Menons les ordonnées BN, CN. Du point B donné, BN est menée sous un angle donné (puisqu'on donne l'angle des ordonnées) sur AF donnée de position; donc le point N est donné; de même M. Les droites BN, CM sont donc données de position et de grandeur. Mais d'après la nature de la parabole, $\frac{CM^2}{BN^2} = \frac{MA}{NA}$, si l'on suppose que A est le sommet de la parabole ou l'extrémité du diamètre. Le rapport $\frac{MA}{NA}$ est ainsi donné, ou, *dividendo*, le rapport $\frac{MN}{NA}$; mais MN est donnée, avec les points M et N, donc NA, donc le point A. Si d'ailleurs on pose $\frac{AN}{NB} = \frac{NB}{Z}$, Z côté droit de la parabole sera donné, les autres droites l'étant. Ainsi, on a donnés : le sommet A, le côté droit Z, le diamètre AF de position, l'angle des ordonnées. Donc la parabole est donnée de position (Apollonius, I, 52).

Cela posé, il est facile de construire le premier cas (*fig.* 75). Soient donnés les quatre points B, C, D, F; si on les joint par les droites BC, CF, FD, DB, ou bien aucune ne sera parallèle à l'opposée, ou bien, comme dans ce cas, on aura par exemple BC parallèle à DF.

Prenons les milieux I, E de ces deux droites et supposons le problème résolu; si on joint IE, qui divise par moitié deux parallèles, ce sera un diamètre de la parabole. Mais I, E sont donnés, donc IE l'est de position, ainsi que l'angle DEI. On a donc donnés : le diamètre IE

de position, l'angle des ordonnées et deux points B, D de la parabole; donc la parabole DBACF est donnée de position.

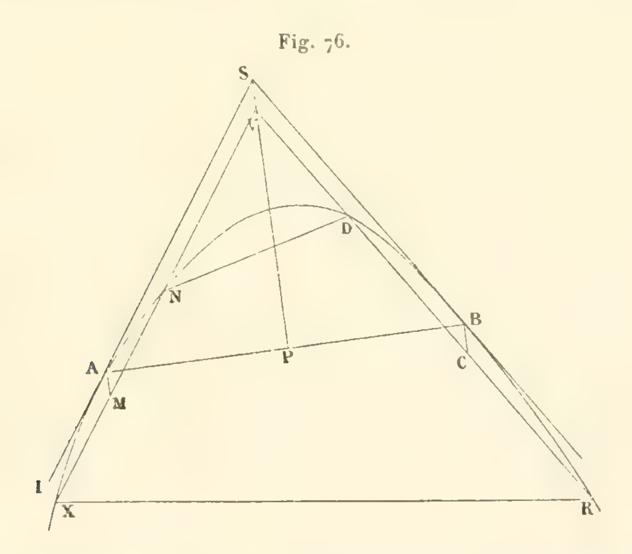
Fig. 75.



Le second cas est plus difficile : c'est celui où aucune des droites joignant deux des points donnés n'est parallèle à une autre.

Soient donnés (*fig.* 76) quatre points X, N, D, R, en sorte que si l'on joint XR, RD, DN, NX, aucune ne soit parallèle à l'opposée. Sup-

Fig. 76.



posons le problème résolu et tracée la parabole XANDBR satisfaisant à la condition proposée. Soient V le point de rencontre de XN, RD prolongées, M, C les milieux de XN, RD. Menez par ces milieux les diamètres MA, CB qui rencontrent la parabole aux points A, B, et par ces derniers IAS, SB parallèles à XV, VR et se rencontrant en S. Je joins AB, j'en prends le milieu en P et je joins SP.

Cette construction faite, il est clair que IAS, menée par le sommet du diamètre MA parallèlement à l'ordonnée XN, est tangente à la parabole en A. On prouvera de même que SB est tangente à la parabole en B. Donc (Apoll., III, 17) $\frac{XV.VN}{RV.VD} = \frac{AS^2}{SB^2}$. Mais les quatre points X, N, D, R étant donnés, le rapport $\frac{XV.VN}{RV.VD}$ est donné, donc $\frac{AS^2}{SB^2}$, donc $\frac{AS}{SB}$. Mais $\widehat{ASB}$ est donné, comme égal, à cause des parallèles, au donné $\widehat{XVR}$. Ainsi, dans le triangle ASB, l'angle au sommet S est donné avec le rapport des côtés $\frac{AS}{SB}$; donc ce triangle est donné d'espèce, donc $\widehat{SAB}$ et le rapport $\frac{SA}{AB}$; donc, puisque $AP = \frac{1}{2}AB$, le rapport $\frac{SA}{AP}$ est donné. Ainsi dans le triangle SAP, l'angle en A est donné avec le rapport des côtés $\frac{SA}{AP}$; donc le triangle est donné d'espèce, donc $\widehat{PSA}$ est donné.

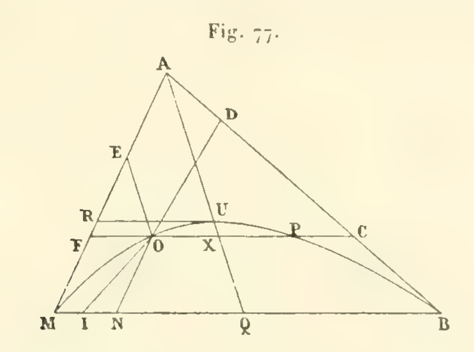
Ceci posé, SP, qui passe par le milieu de la corde AB joignant les points de contact des tangentes, sera un diamètre de la parabole (Apoll., II, 29). Mais, dans la parabole, tous les diamètres sont parallèles, donc le diamètre MA est parallèle à SP, donc $\widehat{IAM} = \widehat{ASP}$. Mais $\widehat{ASP}$ est prouvé donné; donc $\widehat{IAM}$, et son alterne-interne $\widehat{NMA}$. Mais M, milieu de NX, donnée de grandeur et de position, est donné. Donc MA, diamètre, est donné de position avec l'angle des ordonnées AMN et les deux points N, D de la parabole. Donc, d'après le lemme, la parabole est donnée de position, et il est facile de remonter de l'analyse à la synthèse.

Il est clair que, dans ce dernier cas, deux paraboles satisfont au problème, car les droites DN, XR, supposées non parallèles, se rencontrent, et alors, par le même raisonnement, on peut tracer une parabole qui résout également le problème.

DÉMONSTRATION DU LIEU A TROIS DROITES.

Soient données de position trois droites formant un triangle : AM, MB, BA (*fig.* 77); soit un point O quelconque duquel on mène sur

Fig. 77.



les droites données les droites OE, OI, OD sous les angles donnés OEM, OIM, ODB. Soit enfin donné le rapport $\frac{\text{EO.OD}}{\text{OI}^2}$. Je dis que le lieu du point O est une section conique.

Prenez en Q le milieu de MB, joignez AQ et par O menez à MB, MA les parallèles FOC, ON.

Les trois triangles OEF, ODC, OIN sont donnés d'espèce : car, par hypothèse, les angles OEF, ODC, OIN sont donnés, et il en est de même de l'angle EFO égal au donné AMB, à cause des parallèles; de OCD, égal au donné MBA; enfin de ONI, puisque ONB est donné comme égal à AMB à cause des parallèles. Donc le rapport $\frac{\text{OE}}{\text{OF}}$ est donné; de même le rapport $\frac{\text{OD}}{\text{OC}}$; donc le rapport $\frac{\text{EO.OD}}{\text{FO.OC}}$. Mais, par hypothèse, le rapport $\frac{\text{EO.OD}}{\text{OI}^2}$ est donné; donc le rapport $\frac{\text{FO.OC}}{\text{OI}^2}$ sera donné. Mais le rapport $\frac{\text{OI}^2}{\text{ON}^2}$ est donné, puisque le triangle OIN est donné d'espèce; donc le rapport $\frac{\text{FO.OC}}{\text{ON}^2}$ ou $\frac{\text{FO.OC}}{\text{FM}^2}$ sera donné (FM étant égal à ON).

Si on partage AQ en U de telle façon qu'en menant UR parallèle

à MB, le rapport $\frac{UR^2}{RM^2}$ soit égal au donné $\frac{FO.OC}{FM^2}$ (ce qui est facile, puisque l'angle MRU est donné), et si l'on fait passer par le point U une section conique ayant AQ pour diamètre et tangente en M, B aux droites MA, AB (ce qui est très facile et donnera d'ailleurs, suivant les différentes positions du point U, soit une parabole, soit une hyperbole, soit une ellipse; je n'ajoute pas ce qui serait superflu, surtout pour vous); je dis que la section conique ainsi décrite passera par le point O.

Soit en effet P le point où elle passera de l'autre côté. La droite UR, parallèle à l'ordonnée MB, sera tangente à la conique; donc, si celle-ci passe par le point O, on aura $\frac{PF.FO}{FM^2} = \frac{UR^2}{RM^2}$ (Apoll., III, 6). Mais, par construction, $\frac{UR^2}{RM^2} = \frac{FO.OC}{FM^2}$. Donc $PF.FO = FO.OC$; donc $FO = PC$ (¹).

Or il en est ainsi; car, Q étant le milieu de MB, on a $FX = XC$; d'autre part, dans la conique, $OX = XP$; donc, par différence, $FO = PC$.

Il est facile de remonter de l'analyse à la synthèse, par une démonstration conduisant à l'impossible.

(¹) La conclusion devrait être $PF = OC$, ce qui revient au même en retranchant OP de part et d'autre.

INTRODUCTION

AUX

LIEUX PLANS ET SOLIDES.

Que les anciens aient longuement traité des lieux, on ne peut en douter; nous le savons par Pappus, qui, au commencement du Livre VII, témoigne qu'Apollonius avait écrit sur les lieux plans, et Aristée sur les lieux solides. Mais, si nous ne nous trompons pas, la recherche des lieux ne leur était point suffisamment aisée. Nous le conjecturons de ce fait que, pour nombre de lieux, ils n'ont point donné un énoncé assez général, ainsi qu'on le verra plus loin.

Nous soumettons donc cette théorie à une analyse qui lui est propre et particulière, et qui ouvre la voie générale pour la recherche des lieux.

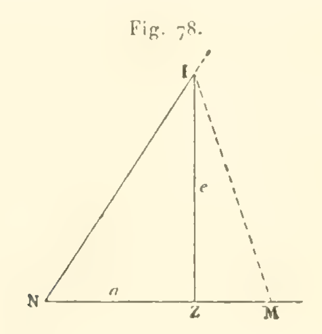
Toutes les fois que dans une équation finale on trouve deux quantités inconnues, on a un lieu, l'extrémité de l'une d'elles décrivant une ligne droite ou courbe. La ligne droite est simple et unique dans son genre; les espèces des courbes sont en nombre indéfini, cercle, parabole, hyperbole, ellipse, etc.

Toutes les fois que l'extrémité de la quantité inconnue qui décrit le lieu suit une ligne droite ou circulaire, le lieu est dit *plan;* si elle décrit une parabole, une hyperbole ou une ellipse, le lieu est dit *solide;* pour d'autres courbes, on l'appelle lieu *de ligne.* Nous n'ajouterons rien sur ce dernier cas, car la connaissance du lieu *de ligne* se déduit très facilement, au moyen de réductions, de l'étude des lieux *plans* et *solides.*

Il est commode, pour établir les équations, de prendre les deux quantités inconnues sous un angle donné, que d'ordinaire nous supposerons droit, et de se donner la position et une extrémité de l'une d'elles; pourvu qu'aucune des deux quantités inconnues ne dépasse le carré, le lieu sera plan ou solide, ainsi qu'on le verra clairement ci-après.

Soit NZM (*fig.* 78) une droite donnée de position, dont on donne le

Fig. 78.



point N. Qu'on égale NZ à la quantité inconnue a, et la droite ZI (menée sous l'angle donné NZI) à l'autre quantité inconnue e.

Soit

$$da = be.$$

Le point I sera une droite donnée de position.

En effet, on aura $\frac{b}{d} = \frac{a}{e}$. Donc le rapport $\frac{a}{e}$ est donné, ainsi que l'angle en Z. Donc le triangle NIZ est donné d'espèce, donc l'angle INZ. Mais le point N est donné, ainsi que la position de la droite NZ. Donc NI sera donnée de position. La synthèse est facile.

On ramènera à cette équation toutes celles dont les termes sont soit donnés, soit formés par les inconnues a et e, multipliées par des droites données ou bien prises simplement.

$$z^{\text{II}} - da = be.$$

Soit posé $z^{\text{II}} = dr$. On aura $\frac{b}{d} = \frac{r - a}{e}$.

Soit pris MN $= r$; le point M sera donné et l'on aura MZ $= r - a$.

Le rapport $\frac{MZ}{ZI}$ sera donc donné, ainsi que l'angle en Z. Donc le triangle IZM sera donné d'espèce, et en joignant MI, on conclura que cette droite est donnée de position. Ainsi le point I sera sur une droite donnée de position, et la même conclusion se tirera sans difficulté pour toute équation qui aura des termes en a ou e seulement.

C'est là la première et plus simple équation de lieu, qui servira à trouver tous les lieux sur une ligne droite; par exemple la proposition 7 du Livre I d'Apollonius *Des lieux plans*, qui pourra dès lors s'énoncer et se construire plus généralement.

Cette équation renferme aussi la très belle proposition suivante, que nous avons découverte par son moyen :

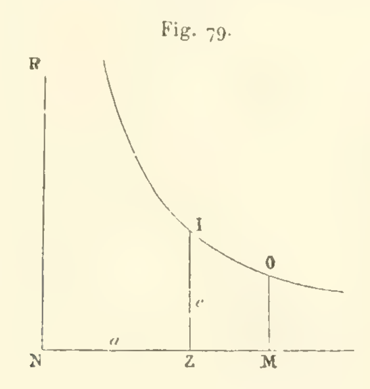
« *Soient, en nombre quelconque, des droites données de position, auxquelles on mène d'un même point des droites sous des angles donnés; si la somme des produits des droites ainsi menées par des données est égale à une aire donnée, le point d'où on les mène sera sur une droite donnée de position.* »

Nous omettons une infinité d'autres propositions, qui pourraient, à bon droit, être opposées à celles d'Apollonius.

Le second degré des équations de cette sorte se présente si $ae = z^{\text{II}}$, auquel cas le point I est sur une hyperbole.

Menez NR (*fig.* 79) parallèle à ZI; prenez sur NZ un point quel-

Fig. 79.



conque, soit M, par lequel vous mènerez MO parallèle à ZI. Con-

struisez le rectangle NMO égal à l'aire z^{II}. Par le point O, entre les asymptotes NR, NM, décrivez une hyperbole; elle sera donnée de position et passera par le point I, puisqu'on suppose ae, c'est-à-dire le rectangle NZI, équivalent au rectangle NMO.

On ramènera à cette équation toutes celles dont les termes sont, soit donnés, soit en a, en e ou en ae.

Ainsi soit $d^{\text{II}} + ae = ra + se$.

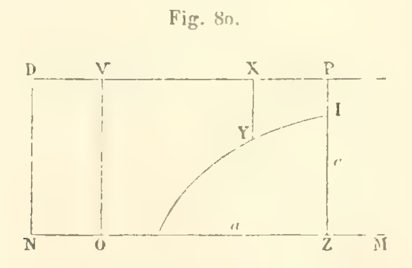
D'après les règles de l'art, on aura $ra + se - ae = d^{\text{II}}$. Formez un rectangle de deux côtés, qui donnent les termes : $ra + se - ae$. Ces deux côtés seront $a - s$ et $r - e$, et leur rectangle $ra + se - ae - rs$.

Si maintenant de d^{II} vous retranchez rs, le rectangle

$$(a - s)(r - e) = d^{\text{II}} - rs.$$

Prenez NO (*fig.* 80) égal à s, et ND, parallèle à ZI, égale à r. Par le

Fig. 80.



point D, menez DP parallèle à NM; par le point O, OV parallèle à ND; prolongez ZI jusqu'en P.

Puisque NO $= s$ et NZ $= a$, on a $a - s =$ OZ $=$ VP. De même, puisque ND $=$ ZP $= r$ et ZI $= e$, on a $r - e =$ PI. Le rectangle PV $\times$ PI est donc égal à l'aire donnée $d^{\text{II}} - rs$; le point I est donc sur une hyperbole ayant PV, VO pour asymptotes.

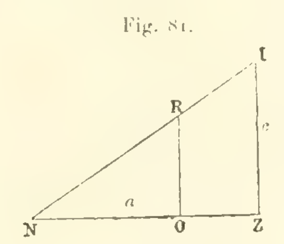
Si, en effet, prenant un point quelconque X et menant la parallèle XY, on construit le rectangle VXY $= d^{\text{II}} - rs$, et que par le point Y, entre les asymptotes PV, VO, on décrive une hyperbole, elle passera par le point I. L'analyse et la construction seront faciles dans tous les cas.

Le degré suivant des équations de lieu se présente si l'on a $a^2 = e^2$ ou si a^2 est à e^2 dans un rapport donné, ou encore si $a^2 + ae$ est à e^2 dans un rapport donné. Enfin ce cas comprend toutes les équations dont les termes vont jusqu'au carré, et sont en a^2, e^2 ou ae.

Dans tous ces cas, le point I est sur une ligne droite, ce qui est très facile à démontrer.

Si le rapport $\frac{NZ^2 + NZ.ZI}{ZI^2}$ est donné (*fig.* 81), qu'on mène une

Fig. 81.



parallèle quelconque OR, le rapport $\frac{NO^2 + NO.OR}{OR^2}$ sera le même, comme il est très facile de le prouver. Le point I sera donc sur une droite donnée de position.

Il en sera de même pour toutes les équations dont tous les termes seront affectés des carrés des inconnues ou de leur rectangle; il est inutile de détailler plus exactement les cas particuliers.

Si aux carrés des inconnues avec ou sans leur rectangle s'ajoutent des termes soit donnés absolument, soit produits d'une droite donnée par l'une des inconnues, la construction est plus difficile. Nous la ferons brièvement dans les différents cas, avec la démonstration.

Si $a^2 = de$, le point I est sur une parabole.

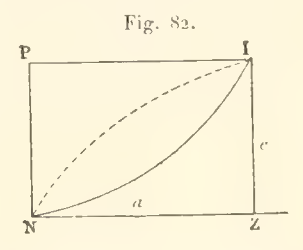
Soit (*fig.* 82) NP parallèle à ZI; avec NP pour diamètre, décrivez la parabole dont le paramètre est la droite donnée d et dont les ordonnées sont parallèles à NZ. Le point I sera sur cette parabole, qui est donnée de position.

En effet, d'après la construction, le rectangle $d \times NP = PI^2$, ou autrement $d \times IZ = NZ^2$, et par suite $de = a^2$.

On ramènera facilement à cette équation toutes celles où a^2 se ren-

contre avec des termes produits de e par des données, ou bien e^2 avec des termes produits de a par des données; il en sera de même, quand

Fig. 82.



l'équation comprendrait en outre des termes absolument donnés.

Soit

$$e^2 = da.$$

Dans la figure précédente, avec N pour sommet, NZ pour diamètre, décrivez la parabole dont le paramètre est d, et dont les ordonnées sont parallèles à la droite NP. Elle satisfera à la question, comme cela est évident.

Soit

$$b^2 - a^2 = de \qquad \text{ou, par conséquent,} \qquad b^2 - de = a^2.$$

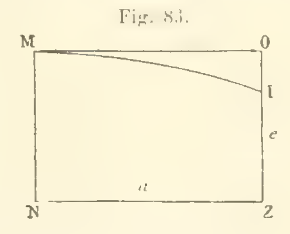
Divisez b^2 par d; soit $b^2 = dr$. On aura donc

$$dr - de = a^2 \qquad \text{ou} \qquad d(r - e) = a^2.$$

On aura ainsi ramené cette équation à la précédente en substituant $r - e$ à e.

Soit en effet menée MN (*fig.* 83) parallèle à ZI et égale à r, et par

Fig. 83.



le point M, MO parallèle à NZ. Le point M est donné, ainsi que la position de la droite MO. D'après cette construction, $OI = r - e$. Donc $d \times OI = NZ^2 = MO^2$.

La parabole décrite à partir du sommet M, sur le diamètre MN, avec

d comme paramètre et des ordonnées parallèles à NZ, satisfera à la question, comme il est clair d'après la construction.

Si $b^2 + a^2 = de$, on aura $de - b^2 = a^2$, etc., comme ci-dessus. On construira de même toutes les équations semblablement composées en a^2 et e.

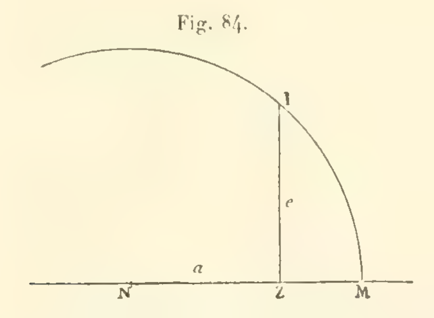
Mais a^2 se trouve souvent avec e^2 et des termes absolument donnés.

Soit $b^2 - a^2 = e^2$.

Le point I sera sur un cercle donné de position, si l'angle NZI est droit.

Soit pris NM (*fig.* 84) égal à b. Le cercle décrit de N comme centre, avec NM comme rayon, satisfera à la question, c'est-à-dire que quel

Fig. 84.



que soit le point I pris sur sa circonférence, ZI^2 (ou e^2) sera égal à NM^2 (ou b^2) $-$ NZ^2 (ou a^2), comme il est clair.

On ramènera à cette équation toutes celles qui ont des termes en a^2, e^2, et en a ou e multipliés par des données, pourvu que l'angle NZI soit droit, et en outre que le coefficient de a^2 soit égal à celui de e^2.

Soit

$$b^2 - 2da - a^2 = e^2 + 2re.$$

Ajoutez de part et d'autre r^2 pour substituer $e + r$ à e, vous aurez

$$r^2 + b^2 - 2da - a^2 = e^2 + r^2 + 2re.$$

A $r^2 + b^2$ ajoutez d^2, pour substituer $d + a$ à a, et soit

$$r^2 + b^2 + d^2 = p^2.$$

On aura

$$p^2 - d^2 - 2da - a^2 = r^2 + b^2 - 2da - a^2,$$

car par construction

$$p^2 - d^2 = r^2 + b^2.$$

Si maintenant, au lieu de $a + d$, on prend a, et si, au lieu de $e + r$, on prend e, on aura

$$p^2 - a^2 = e^2.$$

L'équation sera ramenée à la précédente.

On y ramènera par un raisonnement semblable toutes les équations pareilles. Grâce à ce procédé, nous avons construit toutes les propositions du second Livre d'Apollonius *Sur les lieux plans*, et nous avons démontré que les six premières ont lieu pour des points quelconques, ce qui est assez remarquable et était peut-être ignoré d'Apollonius.

Mais soit $\frac{b^2 - a^2}{e^2}$ dans un rapport donné, le point I sera sur une ellipse.

Soit pris MN $= b$. Avec M comme sommet, NM comme diamètre, N comme centre, décrivez une ellipse dont les ordonnées soient parallèles à la droite ZI et telle que les carrés des ordonnées soient aux rectangles des segments du diamètre dans le rapport donné; le point I sera sur cette ellipse. Car $NM^2 - NZ^2$ est égal au rectangle des segments du diamètre.

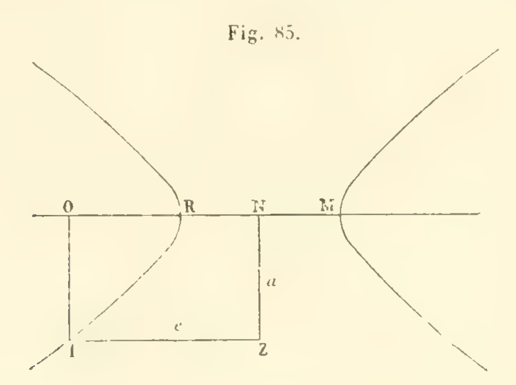
On ramènera à cette équation toutes celles où a^2 se trouve dans un membre, opposé à e^2 dans l'autre, sous un signe contraire, et avec un coefficient différent. Car, si les coefficients sont identiques et l'angle droit, le lieu sera un cercle, comme nous l'avons dit. D'ailleurs, quoique les coefficients soient les mêmes, le lieu sera une ellipse, si l'angle n'est pas droit.

Si les équations comprennent en outre des termes produits de a ou e par des données, la réduction se fera néanmoins par l'artifice que nous avons déjà employé.

Soit $\frac{a^2 + b^2}{e^2}$ dans un rapport donné, le point I est sur une hyperbole.

Menez NO (*fig.* 85) parallèle à ZI; soit $\frac{b^2}{NR^2}$ dans le rapport donné. Le point R sera donné. Avec R comme sommet, RO comme diamètre,

Fig. 85.



N comme centre, décrivez une hyperbole dont les ordonnées soient parallèles à NZ, et telles que la somme de RO^2 et du produit par RO du diamètre total [MR] soit à OI^2 dans le rapport donné $\frac{NR^2}{b^2}$.

Par conséquent, *componendo*, en prenant $MN = NR$, $\frac{MO \times OR + NR^2}{OI^2 + b^2}$ est dans le rapport donné $\frac{NR^2}{b^2}$.

Mais $MO \times OR + NR^2 = NO^2 = ZI^2 = e^2$ et $OI^2 + b^2 = NZ^2 (\text{ou } a^2) + b^2$.

Donc $\frac{e^2}{b^2 + a^2} = \frac{NR^2}{b^2}$, et, *convertendo*, $\frac{b^2 + a^2}{e^2}$ est le rapport donné.

Donc le point I est sur une hyperbole donnée de position.

Le même artifice que nous avons déjà employé ramènera à cette équation toutes celles où figurent a^2 et e^2 avec des termes donnés, soit simplement, soit en outre avec des termes produits de a ou e par des données, et où a^2 se trouve dans l'autre membre que e^2, mais sous le même signe. Car, si les signes étaient contraires, on conclurait à un cercle ou à une ellipse.

L'Équation la plus difficile est celle où a^2 et e^2 figurent avec des termes en ae, et en outre des termes donnés, etc.

Soit $b^2 - 2a^2 = 2ae + e^2$.

Ajoutez de part et d'autre a^2 pour avoir $a + e$ comme racine de l'un des membres :

$$b^2 - a^2 = a^2 + 2ae + e^2.$$

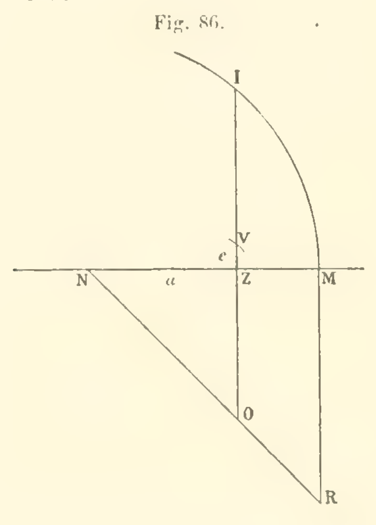
A $a+e$ substituons e, par exemple, et, d'après ce qui précède, soit le cercle MI (*fig.* 86) satisfaisant à la question : c'est-à-dire que

$$MN^2(=b^2) - NZ^2(=a^2) = ZI^2(=[a+e]^2).$$

Soit $VI = NZ = a$. On aura $ZV = e$.

Mais dans cette question nous cherchons seulement le point V ou l'extrémité de la droite e. Il faut donc voir et montrer sur quelle ligne se trouve le point V.

Fig. 86.



Soit MR parallèle à ZI et égale à MN. Joignez NR que IZ prolongée rencontre en O. Puisque $MN = MR$, $NZ = ZO$. Mais $NZ = VI$; donc, par addition, $VO = ZI$. Donc $MN^2 - NZ^2 = VO^2$. Mais le triangle NMR est donné d'espèce; donc le rapport $\frac{NM^2}{NR^2}$ est donné, donc le rapport $\frac{NZ^2}{NO^2}$, donc le rapport $\frac{MN^2 - NZ^2}{NR^2 - NO^2}$. Mais nous avons prouvé que $OV^2 = MN^2 - NZ^2$; donc le rapport $\frac{NR^2 - NO^2}{OV^2}$ est donné. Mais les points N et R sont donnés, ainsi que l'angle NOZ. Donc le point V, d'après ce qui a été démontré précédemment, est sur une ellipse.

Par un procédé analogue, on ramènera aux cas précédents tous les autres dans lesquels des termes en ae se rencontrent avec des termes les uns donnés, les autres en a^2 et e^2, ou encore produits de a et de e par des données; la discussion de ces différents cas est très facile, et

la question se résoudra toujours par le moyen d'un triangle connu d'espèce.

Nous avons donc embrassé dans un exposé bref et lucide tout ce que les anciens ont laissé inexpliqué sur les lieux plans et solides; par suite on reconnaîtra immédiatement quels lieux donnent tous les divers cas de la dernière proposition du Livre I d'Apollonius *Des lieux plans*, et on découvrira en général, sans grande difficulté, tout ce qui regarde cette matière.

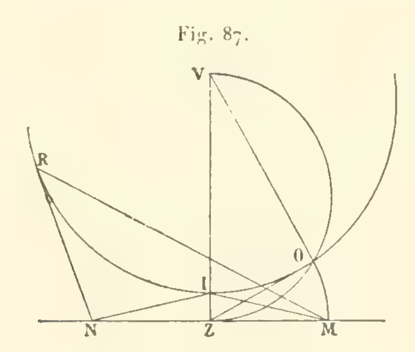
Comme couronnement de ce Traité, nous y ajouterons une très belle proposition, dont la facilité apparaîtra aussitôt.

Étant données de position des droites en nombre quelconque, si d'un même point on mène à chacune d'elles une droite sous un angle donné, et que la somme des carrés des droites menées soit égale à une aire donnée, le point est sur un lieu solide donné de position.

Un seul exemple suffit à indiquer le procédé général de construction.

Soient donnés deux points N et M (*fig.* 87), et soit à trouver le lieu des points tels que si l'on mène les droites IN, IM, la somme de leurs carrés soit au triangle INM dans un rapport donné.

Fig. 87.



Soit posé NM $= b$. Appelons e la droite ZI menée perpendiculairement, et a la distance NZ.

D'après les règles de l'art, $\dfrac{2a^2 + b^2 - 2ba + 2e^2}{be}$ est un rapport donné.

En résolvant les positions d'après les règles exposées, la construction se fera comme suit.

Prenez en Z le milieu de NM; élevez en Z la perpendiculaire ZV; soit dans le rapport donné $\frac{4ZV}{NM}$; sur VZ décrivez le demi-cercle VOZ, inscrivez ZO = ZM et joignez VO. De V comme centre avec VO pour rayon, décrivez le cercle OIR. Si d'un point quelconque R pris sur ce cercle, on mène RN, RM, je dis que $RN^2 + RM^2$ est au triangle RNM dans le rapport donné.

Si cette découverte eût précédé notre restitution déjà ancienne des deux Livres *Des lieux plans*, les constructions des théorèmes de lieux en eussent été rendues beaucoup plus élégantes; cependant nous ne regrettons pas cette production, quoique précoce et insuffisamment mûrie. Il y a en effet pour la Science un certain intérêt à ne pas dérober à la postérité les travaux encore informes de l'esprit; l'œuvre d'abord simple et grossière se fortifie et grandit par les nouvelles inventions. Il est même important pour l'étude de pouvoir contempler pleinement les progrès cachés de l'esprit et le développement spontané de l'art.

APPENDICE A L'INTRODUCTION AUX LIEUX

RENFERMANT LA SOLUTION DES PROBLÈMES SOLIDES PAR LES LIEUX.

Après la méthode pour trouver les lignes servant de lieux, il reste à chercher comment la solution des problèmes solides peut se déduire de ce que nous avons dit et cela de la façon la plus élégante. Dans ce but, il faut restreindre cette faculté des quantités inconnues de varier en dehors de leurs limites; car dans les lieux il y a une infinité de points qui satisfont à la question proposée.

Le plus commode est de déterminer la question au moyen de deux équations de lieux; car deux lignes-lieux données de position se

coupent mutuellement, et le point d'intersection, qui est donné de position, ramène la question de l'indéfini aux termes proposés.

Des exemples peuvent expliquer la chose brièvement et clairement. Soit proposé $a^3 + ba^2 = z''b$.

Il est commode d'égaler chacun des deux membres de l'équation au solide bae, en sorte qu'en divisant ce solide, d'un côté par a, de l'autre par b, la question soit ramenée à des lieux.

Puisque ainsi $a^3 + ba^2 = bae$, on aura $a^2 + ba = be$. Comme il est clair d'après notre méthode, l'extrémité de e sera sur une parabole donnée de position.

D'autre part $z''b = bae$; donc $z'' = ae$, et, d'après notre méthode, l'extrémité de e sera sur une hyperbole donnée de position. Mais nous avons déjà prouvé qu'elle est sur une parabole donnée de position. Elle est donc donnée de position, et il est facile de remonter de l'analyse à la synthèse.

La méthode sera la même pour toutes les équations cubiques; car, en ramenant d'un côté tous les termes solides où figure a, de l'autre le solide entièrement donné ou encore en laissant avec ce dernier des termes solides en a ou en a^2, on pourra former une équation semblable à celle du cas précédent.

Soit maintenant un exemple d'équations biquadratiques :

Soit $a^4 + b'''a + z^2a^2 = d^{\text{IV}}$, d'où $a^4 = d^{\text{IV}} - b'''a - z^2a^2$.

Égalons ces deux membres à z^2e^2. Puisque $a^4 = z^2e^2$, en extrayant la racine carrée, $a^2 = ze$; l'extrémité de e sera sur une parabole donnée de position.

D'autre part, puisque $d^{\text{IV}} - b'''a - z^2a^2 = z^2e^2$, en divisant tous les termes par z^2, on a $\frac{d^{\text{IV}} - b'''a}{z^2} - a^2 = e^2$. D'après notre méthode, l'extrémité de e sera sur un cercle donné de position. Mais elle est aussi sur une parabole donnée de position. Elle est donc donnée.

Le même procédé peut servir à résoudre toutes les équations biquadratiques; car, par la méthode de Viète (Cap. I : *De emend.*), on peut faire disparaître le terme affecté du cube, et en disposant d'un côté le

bicarré inconnu, de l'autre le reste des termes, on résoudra la question par une parabole et un cercle ou une hyperbole.

Soit proposé comme exemple de trouver deux moyennes proportionnelles.

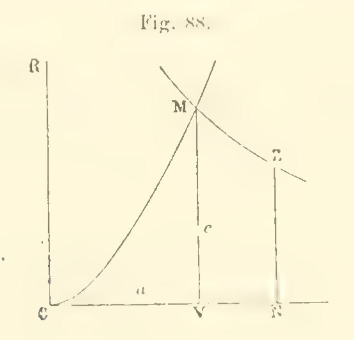
Soient deux droites, b la plus grande, d la plus petite, entre lesquelles il faut trouver deux moyennes proportionnelles.

Soit a la plus grande de ces moyennes, on aura $a^3 = b^2 d$. Égalez les deux termes à bae. On aura d'un côté $a^2 = be$, de l'autre $ae = bd$.

Par suite la question se résoudra par l'intersection d'une hyperbole et d'une parabole.

Soit une droite quelconque OVN (*fig.* 88) donnée de position, et le point O donné sur cette droite. Soient données les droites b et d, entre lesquelles il faut trouver deux moyennes proportionnelles. Supposons $OV = a$, et soit e la droite VM perpendiculaire à OV.

Fig. 88.



D'après la première équation ($a^2 = be$), il est clair qu'il faut décrire, avec le point O comme sommet, b comme paramètre et un diamètre parallèle à VM, une parabole dont les ordonnées soient parallèles à OV : cette parabole passera par le point M.

D'après la seconde équation ($bd = ae$), soit pris sur la droite OV un point quelconque N; élevez-y la perpendiculaire NZ, et soit $ON \times NZ = bd$. Élevez aussi la perpendiculaire OR. D'après notre méthode des lieux, il faut décrire une hyperbole passant par le point Z et ayant pour asymptotes RO, OV; elle sera donnée de position et passera par le point M.

Mais la parabole déjà décrite est aussi donnée de position et passe par le même point M; donc le point M est donné de position. Si on en abaisse la perpendiculaire MV, le point V est donné, donc la droite OV qui est la plus grande des deux moyennes proportionnelles que nous cherchons.

Ces deux moyennes peuvent donc être trouvées par l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole.

Si l'on veut élever la question à une équation biquadratique, qu'on multiplie tous les termes par a :

$$a^4 = b^2 da.$$

En égalant, d'après la méthode précédente, chacun des deux membres à $b^2 e^2$, on aura deux équations, à savoir $a^2 = be$, et $da = e^2$, qui donneront chacune une parabole donnée de position. La construction des moyennes proportionnelles se fera donc ainsi par l'intersection de deux paraboles.

Ces deux constructions se trouvent dans Eutocius sur Archimède; elles s'expliquent immédiatement par cette méthode.

Il est donc inutile d'employer les *plaraplèroses climactiques* de Viète, pour ramener à des équations quadratiques les biquadratiques au moyen de cubiques à racine de deux dimensions. Car il est clair que les biquadratiques se résolvent avec la même élégance, la même facilité et la même rapidité que les cubiques, et il n'est pas possible, je crois, d'imaginer une solution plus élégante.

Pour faire ressortir l'élégance de cette méthode, voici la *construction de tous les problèmes cubiques et biquadratiques au moyen d'une parabole et d'un cercle.*

Soit $a^4 - z'''a = d^{\text{IV}}$, d'où $a^4 = z'''a + d^{\text{IV}}$.

Formez le carré de la différence de a^2 et de b^2 (ou d'un autre carré quelconque) : ce carré sera $a^4 + b^4 - 2b^2a^2$.

Ajoutez, comme supplément, à chaque membre de l'équation : $b^4 - 2b^2a^2$, on aura

$$a^4 + b^4 - 2b^2a^2 = b^4 - 2b^2a^2 + z'''a + d^{\text{IV}}.$$

Soit $2b^2 = n^2$, et égalons chaque membre de l'équation à n^2e^2.

On aura d'un côté, en prenant la racine carrée, $a^2 - b^2 = ne$ et par suite l'extrémité de e sera sur une parabole, d'après notre méthode.

De l'autre côté, on aura $\frac{b^4}{n^2} - a^2 + \frac{z'''a}{n^2} + \frac{d^{\text{IV}}}{n^2} = e^2$, et, d'après notre méthode, l'extrémité de e sera sur un cercle.

Ainsi la question est résolue par le tracé d'une parabole et d'un cercle.

Cette méthode s'étend facilement à tous les cas, tant cubiques que biquadratiques. Il faut seulement prendre soin d'avoir dans un membre a^4, dans l'autre le reste des termes quelconques, à condition qu'il n'y en ait pas en a^3. Mais par l'*expurgation* de Viète on peut toujours, dans une équation biquadratique, faire disparaître le terme affecté du cube; la méthode reste donc la même dans tous les cas.

Quant aux équations cubiques, la méthode de Viète en fait disparaître le terme affecté du carré; en sorte qu'en multipliant tous les termes par a, on aura une équation biquadratique, où aucun terme ne sera affecté du cube; elle se résoudra donc par la méthode qui précède.

Il faut seulement prendre soin que, dans la seconde équation, on ait dans un membre a^2, dans l'autre e^2, sous des signes contraires, ce qui est toujours très facile.

Pour parcourir tous les cas, soit encore

$$a^4 = z^{\text{II}}a^2 - z^{\text{III}}d.$$

Formez le carré de a^2 moins un carré quelconque donné, soit b^2, vous aurez $a^4 + b^4 - 2a^2b^2$. Ajoutez, comme supplément aux deux membres de l'équation, $b^4 - 2a^2b^2$, on aura

$$a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = b^4 - 2a^2b^2 + z^{\text{II}}a^2 - z^{\text{III}}d.$$

Pour faciliter la division, il faut, dans le second membre, prendre la différence entre $2b^2$ et z^{II}, soit par exemple n^2, et égaler chacun des deux membres à n^2e^2, en sorte que l'on ait : d'un côté, $a^2 - b^2 = ne$; de l'autre, $\frac{b^4}{n^2} - a^2 - \frac{z^{\text{III}}d}{n^2} = e^2$.

Il faut remarquer ici qu'il faut avoir $2b^2 > z''$, autrement a^2 n'aurait pas le signe —, et, au lieu d'un cercle, nous trouverions une hyperbole. Mais le remède est facile. En effet, nous prenons b^2 arbitrairement, par suite rien n'est plus simple que de prendre son double supérieur à z''. D'ailleurs notre méthode des lieux établit qu'on a toujours un cercle lorsque dans un des membres de l'équation se trouve un des carrés inconnus avec le signe +, et dans l'autre membre, l'autre carré inconnu avec le signe —.

Prenons, pour exemple de cette construction, l'invention des deux moyennes. On a $a^3 = b^2 d$, d'où $a^4 = b^2 da$. Ajoutez de part et d'autre $b^4 - 2b^2a^2$, il vient

$$a^4 + b^4 - 2b^2a^2 = b^4 + b^2 da - 2a^2 b^2.$$

Soit $2b^2 = n^2$, et égalez chacun des deux membres à n^2e^2.

On aura d'un côté : $a^2 - b^2 = ne$; l'extrémité de e est sur une parabole. De l'autre : $\frac{b^2}{2} + \frac{d}{2}a - a^2 = e^2$; l'extrémité de e sera sur un cercle.

Celui qui aura étudié ce qui précède n'essayera pas de ramener aux problèmes plans, c'est-à-dire de résoudre par les droites et le cercle les questions des moyennes proportionnelles, de la trisection de l'angle et autres semblables.

INTRODUCTION AUX LIEUX EN SURFACE,

A MON AMI M. DE CARCAVI.

Pour couronner l'*Introduction aux lieux plans et solides*, il reste à traiter des *lieux en surface*. Les anciens n'ont fait qu'indiquer ce sujet, mais n'ont pas enseigné de règles générales, ni même donné quelque exemple célèbre, à moins que ce ne soit enseveli depuis longtemps dans ces monuments de l'antique Géométrie où tant de précieuses découvertes ont été abandonnées sans défense aux insectes et souvent anéanties sans laisser aucune trace.

Cette théorie est cependant susceptible d'une méthode générale, comme le montrera cette courte dissertation; plus tard, si nous en avons le loisir, nous éclaircirons davantage chacune des découvertes géométriques que nous avons jusqu'ici fait brièvement connaître.

Les caractères que nous avons cherchés et montrés dans les lignes comme lieux peuvent être de même recherchés pour les surfaces planes, sphériques, coniques, cylindriques ou pour celles des conoïdes et sphéroïdes [1] quelconques, si l'on établit tout d'abord les lemmes constitutifs de chacun de ces lieux.

Posons donc le lemme suivant pour les lieux en surface plane :

1. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection de cette surface et de ces*

(1) Rappelons qu'Archimède avait appelé *conoïdes* les paraboloïdes elliptiques de révolution et les hyperboloïdes de révolution (à deux nappes); *sphéroïdes* les ellipsoïdes de révolution.

plans en nombre indéfini soit toujours une ligne droite, la surface en question sera un plan.

Pour les lieux en surface sphérique :

2. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection de cette surface et de ces plans en nombre indéfini soit toujours un cercle, la surface en question sera une sphère.*

Pour les lieux en surface de sphéroïde :

3. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection de cette surface et d'un plan sécant soit tantôt un cercle, tantôt une ellipse, mais jamais une autre ligne, la surface en question sera un sphéroïde.*

Pour les lieux en surface de conoïde parabolique ou hyperbolique :

4. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection commune soit tantôt un cercle, tantôt une ellipse, tantôt une parabole ou une hyperbole, mais jamais une autre ligne, la surface en question sera un conoïde parabolique ou hyperbolique.*

Pour les lieux en surface conique :

5. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection commune soit tantôt une ligne droite, tantôt un cercle, tantôt une ellipse, tantôt une parabole ou hyperbole, et jamais une autre ligne, la surface en question sera un cône.*

Pour les lieux en surface cylindrique :

6. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection commune soit tantôt une droite, tantôt un cercle, tantôt une ellipse, mais jamais une autre ligne, la surface en question sera un cylindre.*

Mais il se présente très souvent des lieux pour lesquels les sections sont des droites, des paraboles et des hyperboles et aucune autre ligne, comme le montrera bientôt l'analyse de la question. Il convient donc ou plutôt il est absolument nécessaire pour cette étude de constituer *une nouvelle espèce de cylindres ayant pour bases parallèles des paraboles ou des hyperboles et pour côtés des lignes droites, parallèles entre elles, joignant les bases ainsi supposées*, par analogie avec les cylindres ordinaires. De la sorte, aucune section plane d'un tel cylindre ne sera un cercle ou une ellipse; ces nouveaux cylindres pourront d'ailleurs, comme les ordinaires, être droits ou obliques, suivant que le demandera l'analyse du lieu de la question proposée.

Je répète que les problèmes de lieux conduisent nécessairement à de tels cylindres; leur invention et leur définition ne doivent donc pas être regardées comme inutiles.

Bien plus, avant d'aller plus loin, je dirai que la construction d'Archimède pour les sphéroïdes et les conoïdes ne suffit pas pour notre objet; les problèmes conduisent en effet à en considérer d'obliques et non pas seulement des droits.

De ce que nous avons posé résultent tout d'abord de très beaux lieux en surface sphérique :

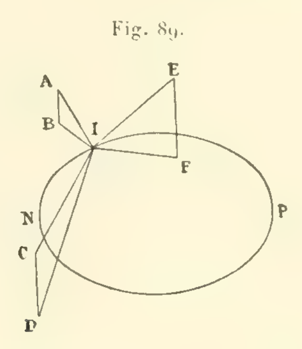
Si de points donnés en nombre quelconque et dans des plans quelconques, on mène des droites concourant en un même point, et que la somme des carrés des droites menées soit égale à une aire donnée, le point de concours sera sur une surface sphérique ou sur une sphère donnée de position. Nous pouvons, en effet, dire ici une sphère, à l'imitation d'Euclide et des anciens géomètres, qui ont appelé *cercle* la circonférence et non l'aire du cercle; en tout cas, c'est sur une surface de cette nature que se trouvera le point en question.

Prenons en effet un plan quelconque donné de position et dans ce plan, suivant les règles données ailleurs pour les lieux plans et solides, cherchons le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux points donnés soit égale à l'aire donnée.

Cette recherche est facile : supposons le problème résolu et soit

dans le plan considéré, la courbe NIP comme lieu (*fig.* 89). Abaissons sur ce plan, des points A, E, C donnés par hypothèse, les normales AB, EF, CD. Le plan étant donné de position, ces normales AB, EF, CD, abaissées des points A, E, C donnés, seront elles-mêmes données, ainsi que leurs points de rencontre B, F, D avec le plan. Prenons sur le lieu NIP un point quelconque I, et joignons AI, BI, EI, IF, CI, DI.

Fig. 89.



Les droites AI, EI, CI joignant aux points donnés A, C, E un point I du lieu, la somme des carrés de ces droites est égale à l'aire donnée. Si l'on en retranche les carrés des normales AB, EF, CD, lesquelles sont données, comme nous l'avons prouvé, la différence sera $BI^2+FI^2+DI^2$, somme qui dès lors sera donnée. Or les points B, F, D sont donnés dans le plan supposé, ainsi que nous l'avons vu; ainsi, on a des droites BI, FI, DI menées de points B, F, D donnés dans un même plan, droites concourant en un même point d'un lieu dans le même plan, et dont la somme des carrés est égale à une aire donnée; d'après un théorème d'Apollonius que nous avons restitué depuis longtemps, on sait que le lieu NIP est un cercle donné de position.

Une analyse absolument semblable donnera les mêmes conséquences pour tout autre plan que l'on prendra; tous ces plans quelconques, en nombre indéfini, donneront donc toujours des cercles comme lieux; d'après le lemme 2, la surface cherchée sera donc une sphère.

En effet, quand nous cherchons un lieu en surface satisfaisant à une question, rien ne nous empêche d'imaginer que la surface cherchée

est coupée par le plan choisi. Mais ici la section ne peut être qu'un cercle, car nous avons prouvé qu'un cercle satisfait comme lieu à la même condition que la surface cherchée; il faut donc que ce cercle soit situé sur ladite surface. Il est donc clair que, dans le cas proposé, le lieu en surface est toujours coupé par un plan suivant un cercle, et par conséquent que c'est une sphère.

On démontre de même les lieux suivants :

Si de points en nombre quelconque, donnés dans un ou plusieurs plans, on mène des droites concourant en un même point, et que la somme des carrés d'une partie des menées soit à la somme des carrés des autres dans un rapport donné ou dans une différence donnée, ou plus grande ou plus petite d'une quantité donnée que dans un rapport donné (¹), *le point de concours sera sur une sphère donnée de position.*

Des artifices analogues feront reconnaître une infinité de très belles propriétés de la surface sphérique.

Soient, en nombre quelconque, des plans donnés de position; si d'un même point on mène à ces plans donnés, sous des angles donnés, des droites dont la somme des carrés soit égale à une aire donnée, ce point sera sur la surface d'un sphéroïde donné de position.

Faisons l'analyse en prenant, suivant la méthode indiquée, un plan quelconque donné de position; cherchons-y, suivant les règles pour les lieux plans et solides telles que nous les avons autrefois exposées dans le plan, le lieu des points dont la somme des carrés des menées aux plans donnés sous les angles donnés est égale à l'aire donnée.

La construction se présente immédiatement; le plan que nous avons pris est en effet donné de position aussi bien que les autres plans donnés; les intersections de ce plan choisi et des plans donnés seront donc également données. Les droites menées aux plans donnés d'un point quelconque du plan supposé recevront donc facilement une expression analytique. Si l'on fait la somme de leurs carrés et qu'on

(¹) C'est-à-dire, en général, soit une fonction linéaire.

l'égale à l'aire donnée, l'analyse donnera comme lieu, dans le plan supposé, un cercle ou une ellipse, et sa marche même prouvera que dans aucun autre plan donné de position, quel qu'il soit, le lieu ne peut être d'une autre nature. Il est donc clair, d'après le lemme 3, que le lieu cherché, dont les sections sont seulement des cercles ou des ellipses, est un sphéroïde.

Si la somme des carrés d'une partie déterminée des droites ainsi menées est à la somme des autres dans un rapport donné ou dans une différence donnée, ou si elle est plus grande ou plus petite d'une quantité donnée que dans un rapport donné, la surface cherchée sera celle d'un sphéroïde, d'un conoïde, d'un cône ou d'un cylindre, etc., suivant ce qui sera indiqué par l'analyse convenablement menée.

Par exemple, si l'on donne le rapport, on aura en général une surface de conoïde; mais, si les plans donnés se coupent suivant des droites concourant en un même point, la surface deviendra conique; si les intersections des plans donnés sont parallèles, la surface sera cylindrique. On aura d'ailleurs soit un cylindre ordinaire, soit un des nôtres.

La pratique découvrira immédiatement ce qui en est; je me borne à donner des indications générales et sommaires, pour que la trop grande multiplicité des exemples n'empêche pas de saisir clairement la méthode.

J'ai réservé pour la dernière place un exemple du plan comme lieu, qui aurait peut-être dû occuper la première :

Soient donnés de position des plans en nombre quelconque; si à ces plans on mène d'un même point, sous des angles donnés, des droites dont la somme soit égale à une droite donnée, ce point sera sur un plan donné de position.

Coupons en effet, suivant la méthode indiquée, les plans donnés par un plan quelconque donné de position et cherchons-y le lieu satisfaisant à la question, d'après la méthode donnée pour les lieux plans. Ce sera une ligne droite, comme le montrera l'Analyse, et il en

sera de même pour toutes les autres sections planes. Il est donc clair, d'après le lemme 1, que le lieu cherché est une surface plane.

Si la somme d'une partie déterminée des droites ainsi menées est à la somme des autres dans un rapport donné ou dans une différence donnée, ou si elle est plus grande ou plus petite d'une quantité donnée que dans un rapport donné, le point sera de même sur une surface plane donnée de position.

D'ailleurs, dans les questions précédentes, si les plans donnés avaient été parallèles entre eux, le lieu eût été également une surface plane, ce qu'il est à peine nécessaire de remarquer.

Comme couronnement, j'ajouterai encore une notable extension du lieu à trois ou quatre droites d'Apollonius :

Soient trois plans donnés de position; si d'un point donné on mène aux plans donnés, sous des angles donnés, des droites telles que le produit de deux d'entre elles soit au carré de la troisième dans un rapport donné, le lieu du point sera soit un plan, soit une sphère, soit un sphéroïde, soit un conoïde, soit une surface conique ou cylindrique (des anciens ou nouvelle), selon la diverse situation des plans donnés.

De même pour quatre plans, ainsi qu'il sera aisé de le voir.

Les divers cas, les conditions-limites pour les données, les problèmes ou théorèmes locaux en nombre infini que nous avons omis pour être plus bref, la démonstration des lemmes énoncés et tout ce qui aurait peut-être besoin d'une plus longue explication, sera facilement suppléé par tout géomètre soigneux et réfléchi qui aura lu cet écrit; désormais ce sujet, qui paraissait singulièrement ardu, est rendu aisé à comprendre.

Toulouse, 6 janvier 1643.

SUR LA SOLUTION

DES

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

PAR LES COURBES LES PLUS SIMPLES

ET CONVENANT EN PARTICULIER A CHAQUE GENRE DE PROBLÈMES,

DISSERTATION EN TROIS PARTIES.

PREMIÈRE PARTIE.

Ce peut être un paradoxe que de dire que, même en Géométrie, Descartes n'était qu'un homme; mais, pour le reconnaître, que les plus subtils Cartésiens examinent s'il n'y a pas une imperfection dans la distribution faite par leur maître des lignes courbes en certaines classes ou degrés, et si l'on ne doit pas adopter un classement plus satisfaisant et plus conforme aux véritables lois de l'Analyse géométrique. Nous pensons pouvoir soulever cette question sans diminuer en rien la gloire d'un homme aussi illustre, car il est de l'intérêt de Descartes et de tous les Cartésiens que la vérité, dont ils se portent à bon droit comme les plus déclarés partisans, quoique parfois elle soit en désaccord avec leurs opinions, devienne manifeste pour tous, ou, si cette expression est trop générale, au moins pour les géomètres et les analystes.

La distribution en classes déterminées des problèmes de Géométrie a paru nécessaire, non seulement aux anciens, mais aussi aux analystes

modernes. Qu'on propose d'abord les équations

$$a + d = b \qquad \text{ou} \qquad a^2 + ba = z''.$$

Dans les termes de la première, l'inconnue ne dépasse pas la racine ou le côté, dans la seconde on trouve la seconde puissance ou le carré du côté inconnu; et toutes deux constituent ensemble le premier genre des problèmes, le plus simple. Ce sont là en effet les problèmes que les géomètres ont l'habitude d'appeler *plans*.

Le second genre de problèmes est celui où la quantité inconnue s'élève à la troisième ou à la quatrième puissance, c'est-à-dire au cube ou au bicarré. La raison pour laquelle deux puissances consécutives ne constituent, quoique différentes de degré, qu'un seul et même genre de problèmes, est que les équations quadratiques se ramènent facilement aux simples ou linéaires, par un procédé que les anciens connaissaient aussi bien que les modernes, et se résolvent donc facilement avec la règle et le compas. De même les équations du quatrième degré ou biquadratiques se ramènent aux équations du troisième degré ou cubiques, par la méthode qu'ont donnée Viète et Descartes. C'est en effet l'objet de cette subtile *paraplérose climatique* de Viète que l'on peut voir dans son traité *De emendatione æquationum*, Chap. VI, et l'artifice dont use Descartes en pareil cas est tout à fait semblable, quoiqu'il l'énonce en termes différents.

De même l'analyste à la façon de Viète ou de Descartes pourra, quoiqu'un peu plus difficilement, ramener l'équation bicubique à la quadratocubique ou, si l'on veut, l'équation du sixième degré à l'équation du cinquième. Mais de ce que, dans les cas précités, où il n'y a qu'une seule quantité inconnue, les équations de degré pair s'abaissent aux équations du degré impair immédiatement inférieur, Descartes a affirmé avec confiance (page 323 de la *Géométrie* qu'il a publiée en français) qu'il en était absolument de même pour les équations renfermant deux quantités inconnues. Car telles sont toutes les équations constitutives de lignes courbes; or, dans ces équations, non seulement la réduction ou abaissement en question ne réussira pas,

comme l'a affirmé Descartes, mais encore les analystes le reconnaîtront absolument impossible. Qu'on propose, par exemple, l'équation constitutive de la parabole biquadratique

$$a^4 = z'''e.$$

Par quel moyen abaissera-t-on au troisième degré cette équation du quatrième? Quelle *paraplérose climatique* pourra-t-on imaginer?

Je désigne comme Viète les quantités inconnues par des voyelles, car je ne vois pas pourquoi Descartes a fait un changement dans une chose sans importance et qui est de pure convention.

Cette discussion ou cette remarque n'est nullement oisive ou inutile, comme le prouve la méthode générale par laquelle je ramène tous les problèmes, quels qu'ils soient, à un certain degré de courbes.

Si l'on propose un problème où la quantité inconnue s'élève à la troisième ou à la quatrième puissance, nous le résoudrons par les sections coniques qui sont du second degré. Si l'équation s'élève à la cinquième ou à la sixième puissance, nous pouvons donner la solution par des courbes du troisième degré; si l'équation monte à la septième ou à la huitième puissance, nous donnerons la solution par des courbes du quatrième degré, et ainsi de suite indéfiniment par un procédé identique. Il est évident par là que la question soulevée ne porte pas sur les mots, mais bien sur la chose elle-même.

Soit proposé, par exemple :

$$a^6 + b^{\text{v}}a = z^{\text{vi}}, \qquad \text{ou si l'on veut} \qquad a^5 + b^{\text{iv}}a = z^{\text{v}};$$

dans les deux cas, le problème sera résolu par les courbes du troisième degré ou cubiques, ainsi que Descartes l'a fait au reste.

Mais si l'on propose

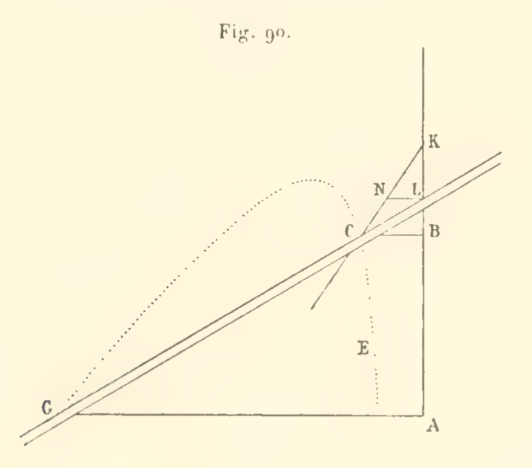
$$a^8 + b^{\text{vii}}a = z^{\text{viii}}, \qquad \text{ou encore} \qquad a^7 + b^{\text{vi}}a = z^{\text{vii}},$$

nous résoudrons le problème par des courbes du quatrième degré ou biquadratiques, ce que Descartes n'a pas fait ni jugé possible, puisqu'il a cru que dans ce cas il fallait nécessairement recourir à des

courbes du cinquième ou sixième degré. Or c'est une faute en vraie Géométrie que de prendre, pour la solution d'un problème quelconque, des courbes trop complexes ou d'un degré trop élevé, en laissant les plus simples qui conviennent, et Pappus avant les modernes avait déjà remarqué que c'est pécher réellement contre les règles de la Géométrie que de résoudre un problème par un genre de courbes qui ne lui convient pas. Pour éviter cette faute, il faut corriger Descartes et ramener chaque problème à son rang particulier et naturel.

Page 322, Descartes affirme encore nettement que les courbes naissant de l'intersection d'une règle et d'une autre droite ou courbe sont toujours d'un degré ou genre plus élevé que la droite ou courbe de la figure, page 321, dont elles dérivent (*fig.* 90).

Fig. 90.



Mais imaginons, par exemple, au lieu de la droite CNK de ladite figure, page 321, une parabole cubique ayant pour sommet K et pour axe indéfini KLBA; qu'on achève la construction dans l'esprit de Descartes, il est clair que l'équation constitutive de cette parabole cubique sera

$$a^3 = b^2 e.$$

On reconnaîtra aussitôt que la courbe EC provenant de cette supposition n'a qu'une équation biquadratique; donc la courbe biquadratique est d'un degré ou genre plus élevé que la courbe cubique, selon la règle énoncée par Descartes lui-même, alors qu'il affirme au con-

traire expressément (p. 323) que la courbe biquadratique et la cubique sont d'un même degré ou genre.

Quant à notre méthode qui réduit tous les problèmes à l'infini, à savoir ceux d'équations de la troisième et quatrième puissance, à des courbes du second degré; ceux de la cinquième et sixième puissance, au troisième degré; ceux de la septième et huitième puissance, au quatrième degré, et ainsi de suite indéfiniment, nous ne différerons pas de la communiquer à tous ceux qui regarderont comme un tort de dissimuler au préjudice de la vérité une erreur quelconque, fût-elle de Descartes.

Qu'on ne s'arrête pas à ce que les problèmes qui montent à la seconde puissance, et qui sont de la même espèce que les problèmes du premier degré (étant appelés *plans* comme eux), ont besoin du cercle, c'est-à-dire d'une courbe du second degré. Cette objection trouvera sa réponse spéciale quand nous donnerons notre méthode générale pour résoudre tous les problèmes absolument par les courbes qui leur conviennent.

SECONDE PARTIE DE LA DISSERTATION.

Pour satisfaire à l'engagement que j'ai pris publiquement, je donne ma méthode générale pour la solution des problèmes quelconques par les courbes qui leur conviennent en propre.

J'ai déjà dit, dans la première Partie de cette Dissertation, que les problèmes de deux degrés immédiatement consécutifs, par exemple 3 et 4, 5 et 6, 7 et 8, 9 et 10, etc., ne réclament qu'un seul degré de courbes. Ainsi ceux des puissances 3 et 4 se résolvent par des courbes du 2ᵉ degré; ceux des puissances 5 et 6, par des courbes du 3ᵉ degré, etc., à l'infini.

Voici la manière d'opérer. L'équation donnée quelconque, qui ne renferme qu'une quantité inconnue, sera d'abord ramenée au degré le plus élevé, je veux dire le pair; puis on la débarrassera du terme où entre l'inconnue au premier degré. Cela fait, il restera une équation

entre la quantité connue ou le terme donné d'une part, et de l'autre un membre inconnu dans chaque terme duquel entrera le carré de la racine inconnue. On égalera ce membre inconnu à un carré dont on formera la racine de façon qu'en égalant ledit carré avec le membre inconnu, on puisse éliminer autant que possible de degrés les plus élevés de la racine inconnue. Il faut d'ailleurs avoir soin que les divers termes de la racine du carré à former ainsi soient tous affectés de la racine ou quantité inconnue, et que le dernier de ces termes soit, en outre, affecté aussi d'une seconde inconnue. On aura ensuite par une simple division d'un côté, par l'extraction d'une racine carrée de l'autre, deux équations constitutives de courbes convenant au problème donné, et leur intersection résoudra la question par la méthode que nous avons appliquée dès longtemps à la solution des problèmes par les lieux.

Soit, comme exemple : $a^6 + ba^5 + z^{\text{II}}a^4 + d^{\text{III}}a^3 + m^{\text{IV}}a^2 = n^{\text{VI}}$.

Tous les problèmes qui montent à la cinquième ou sixième puissance peuvent être ramenés à cette forme. Car il suffit pour cela ou d'élever de la cinquième à la sixième puissance, ou de débarrasser celle-ci du terme en a, toutes choses suffisamment enseignées par Viète et Descartes.

On formera le carré de la racine : $a^3 + bae$, et on l'égalera au premier membre de l'équation. On aura ainsi

$$a^6 + 2ba^4e + b^2a^2e^2 = a^6 + ba^5 + z^{\text{II}}a^4 + d^{\text{III}}a^3 + m^{\text{IV}}a^2.$$

Supprimant de part et d'autre a^6 et divisant par a^2, ce que l'on pourra toujours faire en observant la précaution indiquée pour l'emploi de la méthode, il reste

$$ba^3 + z^{\text{II}}a^2 + d^{\text{III}}a + m^{\text{IV}} = 2ba^2e + b^2e^2,$$

équation qui donne, comme on le voit, une courbe du troisième degré.

Mais, pour avoir la seconde équation et arriver facilement à la solution du problème, il faut égaler aussi à l'autre membre de l'équation, n^{VI}, le carré de $a^3 + bae$.

Donc, en extrayant la racine carrée et appelant, par exemple, n^{III} la

racine carrée de n^{VI}, qui s'obtient facilement, on aura

$$n^{\text{III}} = a^3 + bae, \quad \text{racine du carré égalé au premier membre de la première équation donnée.}$$

Nous avons donc une seconde équation qui donne également une courbe du troisième degré. Qui ne voit maintenant que l'intersection des deux courbes trouvées donnera la valeur de a, c'est-à-dire la solution du problème proposé?

Si le problème monte à la septième ou huitième puissance, on le posera d'abord sous la forme d'une équation de la huitième puissance, puis on débarrassera celle-ci du terme affecté de la seule racine. Cela fait, soit après cette réduction permise et conforme à la méthode :

$$a^8 + ba^7 + d^{\text{II}}a^6 + n^{\text{III}}a^5 + m^{\text{IV}}a^4 + g^{\text{V}}a^3 + r^{\text{VI}}a^2 = z^{\text{VIII}}.$$

On formera le carré à égaler aux deux membres de cette équation sur la racine

$$a^4 + \tfrac{1}{2}ba^3 + d^{\text{II}}ae.$$

J'ai formé le second terme de cette racine du carré de façon que les deux puissances les plus élevées de l'inconnue a s'éliminent dans l'équation, ce qui est très facile. En égalant le carré de cette racine au premier membre de l'équation proposée, supprimant les termes communs et divisant par a^2, on aura d'un côté l'équation constitutive d'une courbe du quatrième degré. Puis on extraira la racine carrée du second membre de l'équation proposée en premier lieu; soit p^{IV} cette racine de z^{VIII}, on l'égalera à $a^4 + \frac{1}{2}ba^3 + d^{\text{II}}ae$. Cette équation donnera une autre courbe du quatrième degré et l'intersection de ces deux courbes donnera la valeur de a, c'est-à-dire la solution du problème proposé.

Il faut remarquer, au reste, que, dans les problèmes qui montent aux puissances 9 et 10, on devra former la racine du carré de façon qu'elle comprenne au moins quatre termes, de façon à éliminer les trois degrés les plus élevés de l'inconnue.

Pour les problèmes montant aux puissances 11 et 12, la racine du carré à former doit avoir au moins cinq termes, dont on disposera de

façon à éliminer les quatre degrés les plus élevés de l'inconnue.

Le procédé pour former ainsi la racine est toujours très simple; les analystes trouveront à l'essai qu'il suffit absolument de la division ou application (pour employer les termes géométriques dans un sujet purement géométrique); les signes + et — n'apporteront au reste aucune difficulté pour la pratique de la méthode.

Comme d'ailleurs les problèmes qui montent à la seconde puissance sont réduits à la première par l'extraction de la racine carrée, cette méthode donne leur solution connue au moyen de lignes du premier degré ou de droites; on voit donc s'évanouir la vaine objection dont nous avons parlé dans la première Partie de cette Dissertation, si l'on suppose l'extraction de la racine carrée immédiatement connue pour toute espèce de problèmes.

On a ainsi la résolution et construction exacte et la plus simple possible des problèmes de Géométrie par des lieux naissant suivant les cas de courbes d'espèces différentes et convenant à ces problèmes. Au reste, l'analyste sera libre de faire varier ces courbes, sauf à rester toujours dans le genre naturel aux problèmes, en résolvant ceux du 8ᵉ et 7ᵉ degré par des courbes du 4ᵉ; ceux du 10ᵉ et du 9ᵉ, par des courbes du 5ᵉ; ceux du 12ᵉ et 11ᵉ par des courbes du 6ᵉ et ainsi de suite indéfiniment par une méthode uniforme. Au contraire, d'après Descartes, les problèmes des 8ᵉ et 7ᵉ degré ont besoin de courbes des 5ᵉ et 6ᵉ; les problèmes du 10ᵉ ou du 9ᵉ, de courbes du 7ᵉ ou du 8ᵉ; les problèmes du 12ᵉ ou du 11ᵉ, de courbes du 9ᵉ ou du 10ᵉ, et ainsi de suite indéfiniment; les Cartésiens peuvent voir combien cela est loin de la simplicité et de la vérité géométrique, ou bien, si cela leur plaît, ils essayeront de nous contredire.

Car nous cherchons seulement la vérité, et si elle est cachée quelque part dans les écrits du grand homme, nous aurons la plus grande joie à la reconnaître et à l'embrasser; car, pour employer une formule qui n'est point de moi, j'ai une si grande admiration pour ce génie extraordinaire, que j'estime plus Descartes lorsqu'il se trompe que beaucoup d'autres quand ils ont raison.

TROISIÈME PARTIE DE LA DISSERTATION.

Cela peut suffire pour la théorie générale; car les problèmes que Descartes donne comme résolubles au moyen de courbes d'un degré trop élevé, nous les avons heureusement abaissés par une méthode générale à des courbes d'un degré moitié moindre. Mais on doit comprendre ceci en ce sens qu'il faut au moins ce degré pour toutes les questions absolument, car une infinité de cas spéciaux se prêtent à un abaissement encore plus grand. Je veux donc aller plus loin et ramener l'analyse cartésienne, non seulement à des termes de degré moitié moindre, mais à des degrés 4 fois, 6 fois, 100 fois, et indéfiniment moins élevés pour certains cas. On reconnaîtra mieux ainsi l'erreur de Descartes, et elle trouvera sa correction immédiate par l'analyse; au reste, je désignerai, ce qui est plus commode, dans les degrés élevés, les puissances par les nombres que comportent leurs exposants.

Soit proposé de *trouver six moyennes proportionnelles entre deux données*. Soient b et d les deux données, a la première moyenne à trouver, on a l'équation $a^7 = b^6 d$. D'après Descartes, cette équation ne peut être résolue que par des courbes du 5e ou du 6e degré. Dans la seconde Partie de cette Dissertation, elle est, avec toutes les autres de même nature, résolue généralement par des courbes du 4e degré. Mais rien ne nous empêche de la résoudre par des courbes du 3e degré. Égalons en effet chacun des membres de l'équation au terme $a^4 e^2 d$. Si, dans l'équation avec a^7, on divise de part et d'autre part par a^4, il vient $e^2 d = a^3$, ce qui donne, comme on voit, une courbe du 3e degré. De l'autre côté, $a^4 e^2 d = b^6 d$; divisant par d et extrayant la racine carrée, $a^2 e = b^3$, ce qui donne également une courbe du 3e degré. L'intersection de ces deux courbes donnera la valeur de a, c'est-à-dire la solution du problème proposé au moyen de courbes du 3e degré.

Soit proposé maintenant de *trouver douze moyennes proportionnelles entre deux données*; l'équation sera $a^{13} = b^{12} d$. Descartes a pensé qu'elle ne peut se résoudre que par des courbes du 11e ou 12e degré.

J'ai enseigné, en général, dans la seconde Partie de cette Dissertation, que toutes les équations de ce degré peuvent être résolues par des courbes du 7e degré. Mais une recherche plus attentive donne immédiatement une solution élégante par des courbes du 5e; on peut même l'obtenir par des courbes du 4e, comme on le verra ensuite.

Égalons d'abord chacun des deux membres au terme a^8e^4d. Dans la première équation, avec a^{13}, divisant de part et d'autre par a^8, il vient $a^5 = e^4d$, courbe du 5e degré. Dans la seconde équation, avec $b^{12}d$, divisant par d et extrayant la racine quatrième ou biquadratique, on a $a^2e = b^3$, courbe du 3e degré. Le problème proposé est ainsi résolu par deux courbes, l'une du 5e, l'autre du 3e degré.

Mais on peut résoudre ce problème encore plus facilement, c'est-à-dire par des courbes du 4e degré. Si, en effet, on égale les deux membres à a^9e^3d, on aura d'un côté, en divisant par a^9, $a^4 = e^3d$, équation d'une courbe du 4e degré; d'autre part, en divisant par d et extrayant la racine troisième ou cubique : $a^3e = b^4$, ce qui donne aussi une courbe du 4e degré. Ainsi nous avons une construction facile par deux courbes du 4e degré.

Après ces exemples, on ne peut douter que l'*invention de* 30 *moyennes proportionnelles* ne puisse s'obtenir par des courbes du 7e ou même du 6e degré. Égalons, en effet, les deux membres de l'équation $a^{31} = b^{30}d$ au terme commun $a^{24}e^6d$; le problème sera ramené à des courbes du 7e degré. Par le terme commun $a^{25}e^5d$, il le sera à des courbes du 6e.

De même, l'*invention de* 72 *moyennes proportionnelles* se fera par des courbes du 9e degré, et il est clair, d'après ce qui précède, que l'on peut assigner un rapport plus grand que tout rapport donné entre le degré du problème et celui des courbes qui le résolvent. Quand les Cartésiens auront vu cela, je ne doute pas qu'ils ne reconnaissent la nécessité de notre remarque et de notre correction.

Il faut observer qu'il convient souvent de changer la forme de l'équation pour que le degré soit susceptible d'une division commode en parties aliquotes. Il sera inutile de répéter cette remarque.

Qu'on propose, par exemple, l'*invention de* 10 *moyennes*, c'est-à-dire

l'équation $a^{11} = b^{10}d$, on multipliera les deux termes par une droite donnée, z par exemple; l'équation deviendra $a^{11}z = b^{10}dz$, et l'on arrive ainsi au nombre 12, qui permet facilement une réduction ou abaissement par ses parties aliquotes. En égalant chacun des deux membres à a^8e^4, on aura d'un côté l'équation $a^3z = e^4$, courbe du quatrième degré. De l'autre côté, en extrayant la racine bicarrée, soit celle-ci n''' par le terme donné $b^{10}dz$, on a $a^2e = n'''$, courbe du troisième degré. Ainsi on trouvera dix moyennes par deux courbes, l'une du 4e, l'autre du 3e degré, ce à quoi on est arrivé facilement par un petit changement de l'équation primitive.

Je ne m'arrête pas aux autres abréviations que l'art fournira de lui-même aux analystes et qui sont en nombre infini. J'ajoute toutefois que ce que je viens de dire s'applique non seulement quand la puissance inconnue se trouve sans aucun autre terme affecté d'un degré moins élevé, mais encore s'il y a des termes de degrés voisins du plus élevé, comme dans l'équation $a^{13} + na^{12} + ma^{11} + ra^{10} = b^{12}d$.

La solution de cette question, en prenant le même terme commun que ci-dessus, a^9e^3a, sera aussi facile que celle de l'invention de 12 moyennes entre deux données. Le même artifice s'emploierait de même pour les équations d'autres degrés plus élevés.

Cependant il faut remarquer que, dans les équations où se trouve seulement un terme inconnu dans un des membres, il faut que l'exposant de la puissance unique de l'inconnue soit un nombre premier, pour que l'on désigne par cet exposant le degré du problème. Si, en effet, l'exposant est composé, le problème se ramène immédiatement au degré des diviseurs.

Si l'on demande, par exemple, 8 moyennes proportionnelles entre deux données, on aura l'équation $a^9 = b^8d$. Dans ce cas, le nombre 9 étant composé et ayant deux fois 3 comme facteur, le problème doit être regardé comme du troisième degré, et il l'est de fait. Si, en effet, on trouve deux moyennes proportionnelles entre les deux données, si ensuite on intercale de nouveau deux moyennes proportionnelles entre le premier et le second terme de la progression ainsi formée,

puis entre le second et le troisième, puis entre le troisième et le quatrième, on aura 8 moyennes entre les deux lignes proposées en premier lieu.

Si l'on demande maintenant 14 moyennes entre deux données, l'équation $a^{15} = b^{14}d$ montre que le problème se ramène à deux autres, l'un du 3e, l'autre du 5e degré.

On voit ainsi que l'exposant de la puissance unique doit être un nombre premier pour exprimer et représenter véritablement le degré du problème.

Comme d'ailleurs je considère comme certain que *les nombres obtenus en ajoutant l'unité aux carrés successifs que l'on forme en partant de 2 sont toujours premiers*, théorème dont j'ai depuis longtemps annoncé la vérité aux analystes, je veux dire que les nombres

3, 5, 17, 257, 65537, ..., à l'infini

sont premiers; il n'y a aucune difficulté pour trouver un procédé permettant de *construire un problème dont le degré soit dans un rapport plus grand que tout rapport donné avec le degré des courbes qui servent à le résoudre*.

Par exemple, soit proposé de trouver entre deux données 256 moyennes proportionnelles, on aura l'équation $a^{257} = b^{256}d$; on égalera les deux termes à $a^{240}e^{16}d$, et la question sera résolue par des courbes du 17e degré.

Si l'on cherchait 65536 moyennes proportionnelles, le problème serait résolu par des courbes du 257e degré, et ainsi de suite indéfiniment, en abaissant le degré du plus grand nombre à celui du nombre immédiatement inférieur. Et qui ne voit qu'en deux nombres consécutifs, le rapport augmente indéfiniment?

Les Cartésiens essayeront-ils encore de dissimuler l'erreur de Descartes? Quant à moi, je m'abstiens de rien prévoir : j'attends avec intérêt, mais sans rien ajouter de plus, ce qu'il adviendra à ce sujet.

MÉTHODE

POUR LA

RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM.

Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a+e$ à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On *adégalera*, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

Voici un exemple :

Soit à partager la droite AC (*fig.* 91) *en* E, *en sorte que* AE × EC *soit maximum.*

Fig. 91.

A E C

Posons $AC = b$; soit a un des segments, l'autre sera $b - a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b, le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$;

Il doit être *adégalé au précédent* : $ba - a^2$;

Supprimant les termes communs : $be \backsim 2ae + e^2$;

Divisant tous les termes : $b \backsim 2a + e$;

Supprimez e : $b = 2a$.

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b.

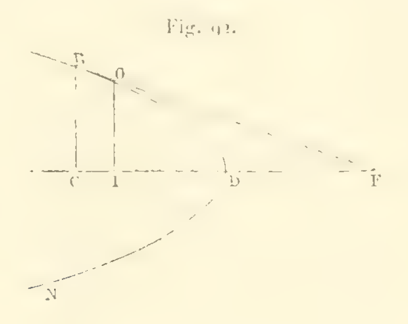
Il est impossible de donner une méthode plus générale.

DES TANGENTES DES LIGNES COURBES.

Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.

Soit donnée, par exemple, la parabole BDN (*fig.* 92), de sommet D,

Fig. 92.



de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.

Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène

l'ordonnée OI, en même temps que l'ordonnée BC du point B, on aura : $\frac{\text{CD}}{\text{DI}} > \frac{\text{BC}^2}{\text{OI}^2}$, puisque le point O est extérieur à la parabole. Mais $\frac{\text{BC}^2}{\text{OI}^2} = \frac{\text{CE}^2}{\text{IE}^2}$, à cause de la similitude des triangles. Donc $\frac{\text{CD}}{\text{DI}} > \frac{\text{CE}^2}{\text{IE}^2}$.

Or le point B est donné, donc l'ordonnée BC, donc le point C, donc CD. Soit donc $\text{CD} = d$, donnée. Posons $\text{CE} = a$ et $\text{CI} = e$; on aura $\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$.

Faisons le produit des moyens et des extrêmes :

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Adégalons donc, d'après la méthode précédente; on aura, en retranchant les termes communs :

$$de^2 - 2dae \backsim -a^2e,$$

ou, ce qui revient au même :

$$de^2 + a^2e \backsim 2dae.$$

Divisez tous les termes par e :

$$de + a^2 \backsim 2da.$$

Supprimez de : il reste $a^2 = 2da$, donc : $a = 2d$.

Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme à la vérité.

Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrons traiter ailleurs, si nous en avons le loisir.

Quant à la quadrature des aires limitées par des lignes courbes et droites, ainsi qu'au rapport que les solides qu'elles engendrent ont aux cônes de même base et même hauteur, nous en avons déjà longuement traité avec M. de Roberval.

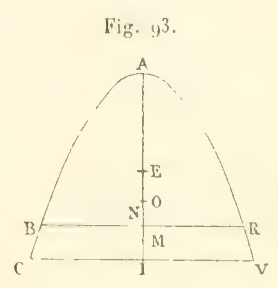
II.

CENTRE DE GRAVITÉ DU CONOÏDE PARABOLIQUE,

D'APRÈS LA MÊME MÉTHODE.

Soit CBAV (*fig.* 93) un conoïde parabolique, ayant pour axe IA, et pour base un cercle de diamètre CIV. Cherchons son centre de gravité par cette méthode toujours et toujours la même, qui nous a servi pour

Fig. 93.



les maxima, les minima et les tangentes des lignes courbes, et prouvons ainsi, par de nouveaux exemples et par un nouvel et brillant emploi de cette méthode, l'erreur de ceux qui croient qu'elle peut être en défaut.

Pour pouvoir arriver à l'analyse, posons IA $= b$. Soit O le centre de gravité; appelons a la longueur AO inconnue; coupons l'axe IA par un plan quelconque BN, et posons IN $= e$, d'où NA $= b - e$.

Il est clair que, dans cette figure et les semblables (paraboles ou paraboliques), les centres de gravité, dans les segments retranchés par les parallèles à la base, divisent les axes dans un rapport constant (il est évident, en effet, que la démonstration d'Archimède pour la parabole peut s'étendre, par un raisonnement identique, à toutes les paraboles et aux conoïdes paraboliques). Donc le centre de gravité du segment, dont NA est l'axe et BN le rayon de base, divisera AN en un point comme E, en sorte que $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{AO}}$, ou, en notes, $\frac{b}{a} = \frac{b-e}{\mathrm{AE}}$.

La portion de l'axe sera donc $AE = \frac{ba - ae}{b}$, et l'intervalle des deux centres de gravité, $OE = \frac{ae}{b}$.

Soit M le centre de gravité de la partie restante CBRV; il doit nécessairement tomber entre les points N, I, à l'intérieur de la figure, d'après le postulatum 9 d'Archimède *De æquiponderantibus*, puisque CBRV est une figure entièrement concave par rapport à son intérieur.

Mais $\frac{\text{Partie CBRV}}{\text{Partie BAR}} = \frac{EO}{OM}$, puisque O est le centre de gravité de la figure totale CAV et que E et M sont ceux des parties.

Or dans le conoïde d'Archimède, $\frac{\text{Partie CAV}}{\text{Partie BAR}} = \frac{IA^2}{NA^2} = \frac{b^2}{b^2 + e^2 - 2be}$; donc, *dividendo* : $\frac{\text{Partie CBRV}}{\text{Partie BAR}} = \frac{2be - e^2}{b^2 + e^2 - 2be}$. Mais nous avons prouvé que $\frac{\text{Partie CBRV}}{\text{Partie BAR}} = \frac{OE}{OM}$. Donc, en notes, $\frac{2be - e^2}{b^2 + e^2 - 2be} = \frac{OE\left(= \frac{ae}{b}\right)}{OM}$; d'où $OM = \frac{b^2ae + ae^3 - 2bae^2}{2b^2a - be^2}$.

D'après ce qui a été établi, le point M est entre les points N et I; donc $OM < OI$; or, en notes, $OI = b - a$. La question est donc ramenée à notre méthode, et l'on peut poser

$$b - a \backsim \frac{b^2ae + ae^3 - 2bae^2}{2b^2e - be^2}.$$

Multipliant de part et d'autre par le dénominateur, et divisant par e :

$$2b^3 - 2b^2a - b^2e + bae \backsim b^2a + ae^2 - 2bae.$$

Puisqu'il n'y a pas de termes communs, supprimons tous ceux où entre e et égalons les autres :

$$2b^3 - 2b^2a = b^2a, \qquad \text{d'où} \qquad 3a = 2b.$$

Par conséquent $\frac{IA}{AO} = \frac{3}{2}$, et $\frac{AO}{OI} = \frac{2}{1}$. C. Q. F. T.

La même méthode s'applique à tous les centres de gravité de toutes les paraboles à l'infini, comme à ceux des conoïdes paraboliques. Je n'ai pas le temps d'indiquer, par exemple, comment on cherchera les

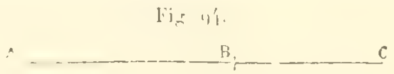
centres de gravité dans *notre conoïde parabolique de révolution autour de l'ordonnée;* qu'il suffise de dire que, dans ce conoïde, le centre de gravité divise l'axe en deux segments qui sont dans le rapport $\frac{11}{5}$.

III.

SUR LA MÊME MÉTHODE.

Je veux, au moyen de ma méthode, *partager la ligne donnée* AC (*fig.* 94) *au point* B, *en sorte que* $AB^2 \times BC$ *soit le maximum* de tous les solides que l'on peut former de la même façon en partageant la ligne AC.

Fig. 94.



Posons, en notations algébriques, $AC = b$, l'inconnue $AB = a$; on aura $BC = b - a$ et le solide $a^2b - a^3$ doit satisfaire à la condition proposée.

Prenons maintenant $a + e$ au lieu de a, on aura pour le solide

$$(a + e)^2(b - e - a) = ba^2 + be^2 + 2bae - a^3 - 3ae^2 - 3a^2e - e^3.$$

Je le compare au premier solide; $a^2b - a^3$, comme s'ils étaient égaux, quoiqu'en fait ils ne le soient point. C'est cette comparaison que j'appelle *adégalité*, pour parler comme Diophante, car on peut ainsi traduire le mot grec παρισότης dont il se sert.

Je retranche ensuite de part et d'autre les termes communs, c'est-à-dire $ba^2 - a^3$. Cela fait, dans un membre il ne reste rien, dans l'autre on a $be^2 + 2bae - 3ae^2 - 3a^2e - e^3$. Il faut donc comparer les termes en plus et ceux en moins; on a ainsi une seconde *adégalité* entre $be^2 + 2bae$ d'une part, $3ae^2 + 3a^2e + e^3$ de l'autre. Divisons tous les termes par e, l'*adégalité* aura lieu entre $be + 2ba$ et $3ae + 3a^2 + e^2$. Après cette division, si tous les termes peuvent encore être divisés par e, il faut réitérer la division, jusqu'à ce qu'on

ait un terme qui ne se prête plus à cette division par e, ou, pour employer le langage de Viète, qui ne soit plus affecté de e. Mais, dans l'exemple proposé, nous trouvons que la division ne peut être réitérée. Il faut donc s'arrêter là.

Maintenant je supprime tous les termes affectés de e; il me reste d'une part $2ba$, de l'autre $3a^2$, membres entre lesquels il faut établir, non plus comme auparavant, une comparaison feinte ou une *adégalité*, mais bien une véritable équation. Je divise de part et d'autre par a; j'ai donc $2b = 3a$ ou $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

Revenons à notre question, et divisons AC en B en sorte que $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$, je dis que le solide $AB^2 \times BC$ est le maximum de tous ceux qui peuvent être formés sur la ligne AC, par une autre division quelconque.

Pour établir la certitude de cette méthode, je prendrai un exemple du Livre d'Apollonius, *De la section déterminée*, lequel au rapport de Pappus (Livre VII, commencement) renfermait des limitations difficiles et notamment celle qui suit et que je considère comme la plus difficile. Pappus (Livre VII) la suppose trouvée et, sans la démontrer vraie, la regarde comme telle et en tire d'autres conséquences. En cet endroit, Pappus appelle un rapport minimum μοναχὸν καὶ ἐλάχιστον (singulier et minimum), parce que, si l'on propose une question sur des grandeurs données, et qu'elle soit en général satisfaite par deux points, pour les valeurs maxima ou minima, il n'y aura qu'un point qui satisfasse. C'est pour cela que Pappus appelle *minimum* et *singulier* (c'est-à-dire unique) le plus petit rapport de tous ceux qui peuvent être proposés dans la question. Commandin doute en cet endroit de la signification du terme μοναχός qu'emploie Pappus, parce qu'il ignore la vérité que je viens d'expliquer.

Voici la proposition. — *Soit une droite donnée* OMID (*fig.* 95) *et sur cette droite quatre points donnés* O, M, I, D. *Il faut diviser le segment* MI *en un point* N, *en sorte que* $\frac{ON \times ND}{MN \times NI}$ *soit un rapport plus petit que celui de deux autres rectangles semblables quelconques* $\frac{ON \times ND}{MN \times NI}$.

Posons les données $\mathrm{OM} = b$, $\mathrm{DM} = z$, $\mathrm{MI} = g$, et soit maintenant l'inconnue $\mathrm{MN} = a$. On aura donc en notations

$$\mathrm{ON} \times \mathrm{ND} = bz - ba + za - a^2, \qquad \mathrm{MN} \times \mathrm{NI} = ga - a^2.$$

Il faut donc que le rapport $\dfrac{bz - ba + za - a^2}{ga - a^2}$ soit le plus petit de tous ceux qui peuvent être obtenus par une division quelconque de la droite MI.

Fig. 95.

Substituons maintenant $a + e$ à a, nous aurons le rapport

$$\frac{bz - ba - be + za + ze - a^2 - e^2 - 2ae}{ga + ge - a^2 - e^2 - 2ae},$$

qu'il faut comparer par *adégalité* au premier, c'est-à-dire qu'on multipliera d'un côté le premier terme par le quatrième, de l'autre, le second par le troisième, et que l'on comparera les deux produits :

$$\underbrace{(bz - ba + za - a^2)}_{\text{premier terme}}\underbrace{(ga + ge - a^2 - e^2 - 2ae)}_{\text{dernier terme}}$$

$$\begin{aligned} bzga &- gba^2 + gza^2 - ga^3 + bzge - bage \\ &+ zage - a^2ge - bza^2 + ba^3 - za^2 + a^4 \\ &- bze^2 + bae^2 - zae^2 + a^2e^2 - 2bzae \\ &+ 2ba^2e - 2za^2e + 2a^3e. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\underbrace{(ga - a^2)}_{\text{second terme}}\underbrace{(bz - ba - be + za + ze - a^2 - e^2 - 2ae)}_{\text{troisième terme}}$$

$$\begin{aligned} = bzga &- gba^2 - gbae + gza^2 + gzae \\ &- ga^3 - gae^2 - 2ga^2e - bza^2 + ba^3 \\ &+ ba^2e - za^3 - za^2e + a^4 + a^2e^2 + 2a^3e. \end{aligned}$$

Je compare ces deux produits par *adégalité*; retranchant les termes communs et divisant par e,

$$\begin{aligned} &bzg - a^2g - bze + bae - zae - 2bza - 2za^2 + 2ba^2 \\ &\backsim - gae - 2ga^2 + ba^2 - za^2. \end{aligned}$$

Supprimant tous les termes où se trouve encore e, il reste

$$bzg - a^2g - 2bza - 2za^2 + 2ba^2 = -2ga^2 + ba^2 - za^2,$$

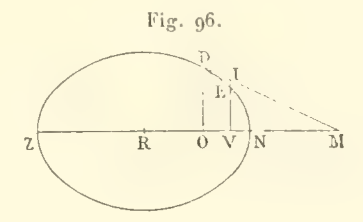
et, en transposant,

$$-ba^2 + za^2 - ga^2 + 2bza = bzg.$$

En résolvant cette équation, nous trouverons la valeur de a ou de MN, par suite le point N, et nous vérifierons la proposition de Pappus, qui enseigne que, pour trouver le point N, il faut faire $\frac{\text{OM}.\text{MD}}{\text{OI}.\text{ID}} = \frac{\text{MN}^2}{\text{NI}^2}$; car la résolution de l'équation nous conduira à la même construction.

Pour appliquer aussi cette même méthode aux *tangentes*, je puis procéder comme suit. Soit, par exemple, l'ellipse ZDN (*fig.* 96),

Fig. 96.



d'axe ZN et de centre R. Prenons sur sa circonférence un point comme D, menons par ce point la tangente DM à l'ellipse et l'ordonnée DO. Posons, en notations algébriques, la donnée $\text{OZ} = b$ et la donnée $\text{ON} = g$; soit l'inconnue $\text{OM} = a$, en comprenant par OM la portion de l'axe comprise entre le point O et le point de rencontre avec la tangente.

Puisque DM est tangente à l'ellipse, si, par un point V pris *ad libitum* entre O et N, je mène IEV parallèle à DO, il est évident que la ligne IEV coupe la tangente DM et l'ellipse, soit aux points E et I. Mais, puisque DM est tangente à l'ellipse, tous ses points, sauf D, sont en dehors de l'ellipse, donc $\text{IV} > \text{EV}$ et $\frac{\text{DO}^2}{\text{EV}^2} > \frac{\text{DO}^2}{\text{IV}^2}$. Mais, d'après la propriété de l'ellipse, $\frac{\text{DO}^2}{\text{EV}^2} = \frac{\text{ZO}.\text{ON}}{\text{ZV}.\text{VN}}$, et d'autre part $\frac{\text{DO}^2}{\text{IV}^2} = \frac{\text{OM}^2}{\text{VM}^2}$. Donc $\frac{\text{ZO}.\text{ON}}{\text{ZV}.\text{VN}} > \frac{\text{OM}^2}{\text{VM}^2}$.

Soit l'arbitraire OV $= e$, nous aurons

$$\mathrm{ZO}.\mathrm{ON} = bg, \qquad \mathrm{ZV}.\mathrm{VN} = bg - be + ge - e^2,$$
$$\mathrm{OM}^2 = a^2, \qquad \mathrm{VM}^2 = a^2 + e^2 - 2ae.$$

Donc $\dfrac{bg}{bg - be + ge - e^2} > \dfrac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}$. Si donc on multiplie le premier terme par le dernier et le second par le troisième, on aura

$$\underbrace{bga^2 + bge^2 - 2bgae}_{\text{produit du premier terme par le dernier}} > bga^2 - bea^2 + gea^2 - a^2e^2.$$

Il faut donc, suivant ma méthode, comparer par adégalité ces deux produits, retrancher ce qui leur est commun et diviser ce qui reste par e; on aura donc

$$bge - 2bga \backsim - ba^2 + ga^2 - a^2e.$$

Supprimant les termes où reste e,

$$-2bga \backsim - ba^2 + ga^2,$$

membres qu'il faut égaler, d'après la méthode. Transposant comme il convient, on aura $ba - ga = 2bg$.

On voit que cette solution est la même que celle d'Apollonius, car, d'après ma construction, pour trouver la tangente, il faut faire $\dfrac{b-g}{g} = \dfrac{2b}{a}$ ou $\dfrac{\mathrm{ZO} - \mathrm{ON}}{\mathrm{ON}} = \dfrac{2\mathrm{ZO}}{\mathrm{OM}}$, tandis que, d'après celle d'Apollonius, il faut faire $\dfrac{\mathrm{ZO}}{\mathrm{ON}} = \dfrac{\mathrm{ZM}}{\mathrm{MN}}$. Il est clair que ces deux constructions reviennent au même.

Je pourrais ajouter nombre d'autres exemples, tant du premier que du second cas de ma méthode, mais ceux-ci suffisent, et prouvent assez qu'elle est générale et ne tombe jamais en défaut.

Je n'ajoute pas la démonstration de la règle, ni les nombreuses autres applications qui pourraient en confirmer la haute valeur, comme l'invention des centres de gravité et des asymptotes, dont j'ai envoyé un exemple au savant M. de Roberval.

IV.

MÉTHODE DU MAXIMUM ET MINIMUM.

En étudiant la méthode de la *syncrise* et de l'*anastrophe* de Viète, et en poursuivant soigneusement son application à la recherche de la constitution des équations corrélatives, il m'est venu à l'esprit d'en dériver un procédé pour trouver le maximum ou le minimum et pour résoudre ainsi aisément toutes les difficultés relatives aux conditions limites, qui ont causé tant d'embarras aux géomètres anciens et modernes.

Les maxima et minima sont en effet uniques et singuliers, comme le dit Pappus et comme le savaient déjà les anciens, quoique Commandin avoue ignorer ce que signifie dans Pappus le terme μοναχός (singulier). Il suit de là que, de part et d'autre du point constitutif de la limite, on peut prendre une équation ambiguë; que les deux équations ambiguës ainsi prises sont dès lors corrélatives, égales et semblables.

Soit, par exemple, proposé de *partager la droite b en sorte que le produit de ses segments soit maximum*. Le point satisfaisant à cette question est évidemment le milieu de la droite donnée, et le produit maximum est égal à $\frac{b^2}{4}$; aucune autre division de cette droite ne donnera un produit égal à $\frac{b^2}{4}$.

Mais si l'on propose de partager la même droite b en sorte que le produit des segments soit égal à z'' $\left(\text{cette aire étant d'ailleurs à supposer plus petite que } \frac{b^2}{4}\right)$, on aura deux points satisfaisant à la question, et ils se trouveront situés de part et d'autre du point correspondant au produit maximum.

Soit en effet a un des segments de la droite b, on aura $ba - a^2 = z''$, équation ambiguë, puisque pour la droite a on peut prendre chacune

des deux racines. Soit donc l'équation corrélative $be - e^2 = z''$. Comparons ces deux équations d'après la méthode de Viète :

$$ba - be = a^2 - e^2.$$

Divisant de part et d'autre par $a - e$, il viendra

$$b = a + e;$$

les longueurs a et e seront d'ailleurs inégales.

Si, au lieu de l'aire z'', on en prend une autre plus grande, quoique toujours inférieure à $\frac{b^2}{4}$, les droites a et e différeront moins entre elles que les précédentes, les points de division se rapprochant davantage du point constitutif du produit maximum. Plus le produit des segments augmentera, plus au contraire diminuera la différence entre a et e, jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse tout à fait pour la division correspondant au produit maximum; dans ce cas, il n'y a qu'une solution unique et singulière, les deux quantités a et e devenant égales.

Or la méthode de Viète, appliquée aux deux équations corrélatives ci-dessus, nous a conduit à l'égalité $b = a + e$; donc, si $e = a$ (ce qui arrivera constamment pour le point constitutif du maximum ou du minimum), on aura, dans le cas proposé, $b = 2a$, c'est-à-dire que, si l'on prend le milieu de la droite b, le produit des segments sera maximum.

Prenons un autre exemple : *Soit à partager la droite b de telle sorte que le produit du carré de l'un des segments par l'autre soit maximum.*

Soit a l'un des segments : on doit avoir $ba^2 - a^3$ maximum. L'équation corrélative égale et semblable est $be^2 - e^3$. Comparons ces deux équations d'après la méthode de Viète :

$$ba^2 - be^2 = a^3 - e^3;$$

divisant de part et d'autre par $a - e$, il vient

$$ba + be = a^2 + ae + e^2,$$

ce qui donne la constitution des équations corrélatives.

Pour trouver le maximum, faisons $e = a$; il vient

$$2ba = 3a^2 \quad \text{ou} \quad 2b = 3a;$$

le problème est résolu.

Toutefois, comme pratiquement les divisions par un binome sont généralement compliquées et trop pénibles, il est préférable, en comparant les équations corrélatives, de mettre en évidence les différences des racines, pour n'avoir à opérer qu'une simple division par cette différence.

Soit à chercher le maximum de $b^2a - a^3$. D'après les règles de la méthode précitée, on devrait prendre pour équation corrélative $b^2e - e^3$. Mais puisque e, aussi bien que a, est une inconnue, rien ne nous empêche de la désigner par $a + e$; on aura de la sorte

$$b^2a + b^2e - a^3 - e^3 - 3a^2e - 3e^2a = b^2a - a^3.$$

Il est clair que, si l'on supprime les termes semblables, tous ceux qui resteront seront affectés de l'inconnue e; ceux en a seul se trouvent en effet les mêmes de part et d'autre. On a ainsi

$$b^2e = e^3 + 3a^2e + 3e^2a,$$

et, en divisant tous les termes par e,

$$b^2 = e^2 + 3a^2 + 3ae,$$

ce qui donne la constitution des deux équations corrélatives sous cette forme.

Pour trouver le maximum, il s'agit d'égaler les racines des deux équations, afin de satisfaire aux règles de la première méthode, dont notre nouveau procédé tire sa raison et sa façon d'opérer.

Ainsi il faut égaler a à $a + e$, d'où $e = 0$. Mais, d'après la constitution que nous avons trouvée pour les équations corrélatives,

$$b^2 = e^2 + 3a^2 + 3ae;$$

nous devons donc supprimer, dans cette égalité, tous les termes affec-

tés de e, comme se réduisant à o; il restera $b^2 = 3a^2$, équation qui donnera le maximum cherché pour le produit dont il s'agit.

Pour montrer plus complètement la généralité de cette double méthode, considérons de nouveaux genres d'équations corrélatives dont Viète n'a pas traité et que nous emprunterons au Livre de la *Section déterminée* d'Apollonius (dans Pappus, Livre VII, prop. 61), dont les conditions de limites sont expressément reconnues comme difficiles par Pappus.

Soit la droite BDEF (*fig.* 97), *sur laquelle on donne les points* B, D, E, F. *Trouver entre les points* D *et* E *un point* N *tel que le rapport des produits* BN × NF *et* DN × NE *soit minimum.*

Fig. 97.

B D N E F

Posons DE $= b$, DF $= z$, BD $= d$, DN $= a$; il faut que le rapport $\frac{dz - da + za - a^2}{ba - a^2}$ soit minimum.

Le rapport corrélatif semblable et égal est $\frac{dz - de + ze - e^2}{be - e^2}$, d'après notre première méthode. Égalons les produits des termes moyens et des extrêmes, nous aurons

$$dzbe - dze^2 - dabe + dae^2 + zabe - zae^2 - a^2be + a^2e^2$$
$$= dzba - dza^2 - deba + dea^2 + zeba - zea^2 - e^2ba + e^2a^2.$$

Supprimant les termes semblables et faisant les transpositions convenables :

$$dzba - dzbe + dea^2 - dae^2 - zea^2 + zae^2 + a^2be - e^2ba = dza^2 - dze^2.$$

Divisant de part et d'autre par $a - e$ (ce qui sera très facile, si l'on prend ensemble les termes corrélatifs; ainsi $\frac{dzba - dzbe}{a - e} = dzb$, et de même $\frac{dea^2 - dae^2}{a - e} = dae$, etc.; il est aisé de disposer les termes corré-

latifs pour obtenir ces divisions), on aura, après la division,

$$dzb + dae - zae + bae = dza + dze,$$

égalité qui donne la constitution des deux équations corrélatives.

Pour passer de cette constitution au minimum, il faut, d'après la méthode, faire $e = a$, d'où

$$dzb + da^2 - za^2 + ba^2 = 2dza;$$

la résolution de cette équation donnera la valeur de a, pour laquelle le rapport proposé sera minimum.

L'analyste ne sera pas arrêté par ce que cette équation a deux racines, car celle qu'il faut prendre se trahira d'elle-même, quand on ne voudrait pas la reconnaitre. Même avec des équations ayant plus de deux racines, un analyste tant soit peu sagace pourra toujours se servir de l'une ou de l'autre de nos méthodes.

Mais il est clair, d'après l'exemple que nous venons de traiter en dernier lieu, que la première de ces deux méthodes sera en général d'un emploi peu commode, par suite de ces divisions répétées par un binome. Il faut donc recourir à la seconde qui, quoique simplement dérivée de la première, comme je l'ai dit, procurera aux habiles analystes une facilité surprenante et d'innombrables abréviations; bien plus, elle s'appliquera, avec une aisance et une élégance bien supérieures, à la recherche des tangentes, des centres de gravité, des asymptotes et autres questions pareilles.

C'est donc avec la même confiance que jadis, que j'affirme toujours aujourd'hui que la recherche du maximum et du minimum se ramène à cette règle unique et générale, dont l'heureux succès sera toujours légitime et non pas dû au hasard, comme certains l'ont pensé.

Soit a une inconnue (*voir* page 121, ligne 6 à ligne dernière)... *sa première expression.*

S'il reste encore quelqu'un qui considère cette méthode comme due à un heureux hasard, il peut bien essayer d'en rencontrer un pareil.

Quant à celui qui ne l'approuverait pas, je lui proposerai ce problème :

Étant donnés trois points, en trouver un quatrième tel que la somme de ses distances aux trois points donnés soit minima.

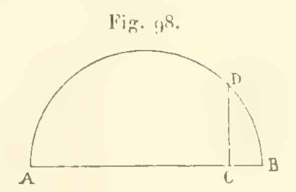
V.

APPENDICE A LA MÉTHODE DU MAXIMUM ET MINIMUM.

Dans le cours des questions, il se présente souvent des radicaux; l'analyste ne doit pas alors hésiter à employer une troisième inconnue, ou, s'il le faut, à en poser un plus grand nombre encore; on pourra en effet de la sorte éviter les élévations aux puissances qui, en se répétant, compliquent d'ordinaire les calculs. L'artifice de cette méthode va être expliqué par les exemples qui suivent :

Soit un demi-cercle de diamètre AB (*fig.* 98), *avec la perpendiculaire* DC *au diamètre. On demande le maximum de la somme* AC + CD.

Fig. 98.



Soit b le diamètre, posons AC $= a$; on aura donc CD $= \sqrt{ba - a^2}$. La question est ramenée à rendre maxima la quantité $a + \sqrt{ba - a^2}$.

En appliquant les règles de la méthode, on arriverait à *adégaler* des expressions dont le degré serait trop élevé; désignons donc par $\overline{o}$ la quantité maxima; car pourquoi abandonnerions-nous l'usage adopté par Viète de représenter par des voyelles les quantités inconnues (1)?

(1) Pour conserver la notation de Fermat, tout en évitant la confusion avec le zéro, nous surmontons d'un trait la voyelle o.

Nous aurons donc $a + \sqrt{ba - a^2} = \bar{o}$; donc $\bar{o} - a = \sqrt{ba - a^2}$, et en élevant au carré :

$$\bar{o}^2 + a^2 - 2\bar{o}a = ba - a^2.$$

Cela fait, il faut effectuer une transposition de façon qu'un membre de l'équation soit formé par le seul terme où $\bar{o}$ figure à la plus haute puissance; on pourra dès lors déterminer le maximum, ce qui est le but de l'artifice. Cette transposition nous donne

$$ba - 2a^2 + 2\bar{o}a = \bar{o}^2.$$

Mais par hypothèse $\bar{o}$ est la quantité maxima; donc $\bar{o}^2$, carré d'une quantité maxima, sera lui-même un maximum; par conséquent, $ba - 2a^2 - 2\bar{o}a$ (expression égale à $\bar{o}^2$) sera un maximum. Il n'y figure d'ailleurs aucun radical; traitons-la, d'après la méthode, comme si $\bar{o}$ était une quantité connue. Nous aurons l'*adégalité*

$$ba - 2a^2 + 2\bar{o}a \backsim ba + be - 2a^2 - 2e^2 - 4ae + 2\bar{o}a + 2\bar{o}e.$$

Supprimons les termes communs, et divisons les autres par e,

$$b + 2\bar{o} \backsim 2e + 4a.$$

Supprimons $2e$ d'après la règle; nous aurons

$$b + 2\bar{o} = 4a, \qquad \text{d'où} \qquad 4a - b = 2\bar{o} \qquad \text{ou} \qquad 2a - \tfrac{1}{2}b = \bar{o}.$$

Cette égalité étant établie par la méthode, il faut revenir à la première, dans laquelle nous avons posé $a + \sqrt{ba - a^2} = \bar{o}$.

Mais nous venons de trouver $\bar{o} = 2a - \frac{1}{2}b$; donc

$$2a - \tfrac{1}{2}b = a + \sqrt{ba - a^2}, \qquad \text{d'où} \qquad a - \tfrac{1}{2}b = \sqrt{ba - a^2}.$$

Élevons au carré :

$$a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - ba = ba - a^2,$$

d'où enfin

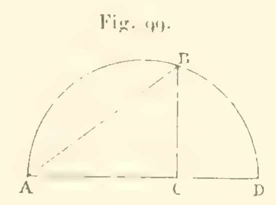
$$ba - a^2 = \tfrac{1}{8}b^2;$$

de cette dernière équation on tirera la valeur de a correspondant au maximum cherché.

Nous pouvons employer le même artifice pour trouver *le cône de surface maxima qui peut être inscrit dans une sphère donnée.*

Soient AD (*fig.* 99) le diamètre de cette sphère, AC la hauteur du cône cherché, AB son côté, BC son rayon de base. Il faudra, d'après Archimède, que la somme $AB \times BC + BC^2$ soit maxima.

Fig. 99.



Soit b le diamètre; posons $AC = a$. Nous aurons $AB = \sqrt{ba}$, $BC = \sqrt{ba - a^2}$,

$$AB \times BC + BC^2 = \sqrt{b^2a^2 - ba^3} + ba - a^2.$$

Égalons cette somme à l'aire maxima, soit $\overset{\text{pl}}{o}$:

$$\overset{-\text{pl}}{o} + a^2 - ba = \sqrt{b^2a^2 - ba^3}.$$

Élevons au carré, etc.; la méthode que nous avons indiquée conduira à une équation donnant $\overset{-\text{pl}}{o}$, et permettant ainsi de résoudre celle que nous venons de poser.

Cependant, dans l'exemple choisi, on peut obtenir la solution sans prendre une troisième inconnue; car on peut ramener le problème à chercher, en se donnant la droite AB dans le triangle CBA, quel est le maximum du rapport $\dfrac{CB \times BA + CB^2}{AD^2}$, et, dans ce cas, la méthode ordinaire est suffisante.

Soit b la droite donnée AB; posons $CB = a$, nous aurons $AC^2 = b^2 - a^2$. Mais $\dfrac{AC^2}{AB^2} = \dfrac{AB^2}{AD^2}$; donc $AD^2 = \dfrac{b^4}{b^2 - a^2}$. Or nous voulons que le rapport de $ba + a^2$ à cette dernière expression soit maximum.

Multiplions haut et bas par $b^2 - a^2$; le rapport $\dfrac{b^4}{b^3a + b^2a^2 - ba^3 - a^4}$ doit être minimum. Mais b^4 est donné, comme puissance de la donnée b; donc la quantité $b^3a + b^2a^2 - ba^3 - a^4$ doit être maxima.

La méthode conduira à l'équation

$$b^3 + 2b^2a = 3ba^2 + 4a^3,$$

dont le degré s'abaisse immédiatement [1] :

$$4a^2 - ba = b^2;$$

la solution est dès lors évidente.

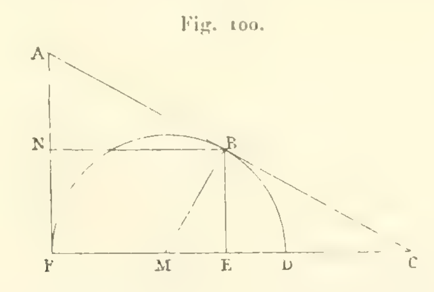
Nous ne nous arrêtons pas davantage sur un sujet désormais éclairci ; on voit comment, en recourant à une troisième ou à une quatrième inconnue, et, s'il le faut, en multipliant encore le nombre des positions auxiliaires, on peut se débarrasser des radicaux et de tous les autres obstacles qui peuvent arrêter l'analyste.

Cependant, et quoique l'invention des tangentes découle elle-même de la méthode générale, on peut remarquer que, dans certains cas, les questions de maximum ou minimum peuvent se résoudre plus élégamment et peut-être plus géométriquement, au moyen de la construction d'une tangente.

Donnons-en un seul exemple, qui peut valoir pour plusieurs :

Dans un demi-cercle FBD (*fig.* 100), *on mène la perpendiculaire* BE; *on demande le maximum du produit* FE × EB.

Fig. 100.



Si, d'après notre méthode, on cherche à construire le rectangle FE × EB en s'en donnant la valeur, la question se ramène à décrire une hyperbole ayant pour asymptotes AF, FC, et pour laquelle les produits des abscisses FE par les ordonnées EB aient la valeur donnée ;

(1) En tenant compte de la racine $a = -b$.

les points d'intersection de l'hyperbole et du demi-cercle satisferont à la question. Mais, comme le produit FE × EB doit être maximum, il s'agit en fait de construire une hyperbole qui ait pour asymptotes AF, FC et qui, au lieu de couper le demi-cercle, lui soit tangente, soit en B; car les points de contact déterminent les quantités maxima ou minima.

Supposons le problème résolu : si l'hyperbole touche le demi-cercle en B, la tangente en B au demi-cercle sera également tangente à l'hyperbole. Soit ABC cette droite. Elle est tangente à l'hyperbole en B et rencontre les asymptotes en A et C; donc, d'après Apollonius, AB = BC; par suite, FE = EC et AF = 2BE = 2AN. Mais, comme tangente au cercle, BA = AF; donc BA = 2AN, et à cause de la similitude des triangles, si M est le centre, MB = 2ME. Mais le rayon MB est donné; donc le point E le sera.

On peut de même ramener en général toute recherche de maximum ou de minimum à la construction géométrique d'une tangente; mais cela ne diminue en rien l'importance de la méthode générale, puisque la construction des tangentes en dépend, aussi bien que la détermination des maxima et des minima.

VI.

SUR LA MÊME MÉTHODE.

La théorie des tangentes est une suite de la méthode, dès longtemps publiée pour l'invention du maximum et du minimum, qui permet de résoudre très aisément toutes les questions de limitation, et notamment ces fameux problèmes dont les conditions-limites sont indiquées comme difficiles par Pappus (Livre VII, préf.).

Les lignes courbes dont nous cherchons les tangentes ont leurs propriétés spécifiques exprimables, soit par des lignes droites seulement,

soit encore par des courbes compliquées comme on voudra avec des droites ou d'autres courbes.

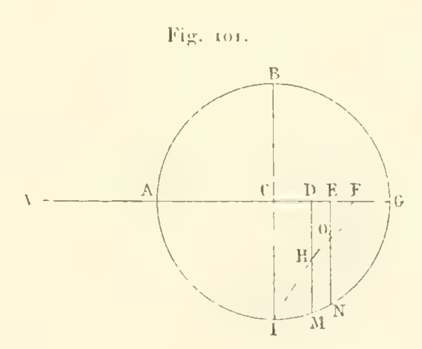
Nous avons déjà satisfait au premier cas par notre règle, qui, trop concise, a pu paraître difficile, mais cependant a été reconnue légitime.

Nous considérons en fait dans le plan d'une courbe quelconque deux droites données de position, dont on peut appeler l'une *diamètre*, l'autre *ordonnée*. Nous supposons la tangente déjà trouvée en un point donné sur la courbe, et nous considérons par *adégalité* la propriété spécifique de la courbe, non plus sur la courbe même, mais sur la tangente à trouver. En éliminant, suivant notre théorie des maxima et minima, les termes qui doivent l'être, nous arrivons à une égalité qui détermine le point de rencontre de la tangente avec le diamètre, par suite la tangente elle-même.

Aux nombreux exemples que j'ai déjà donnés, j'ajouterai celui de la tangente à la *cissoïde*, inventée, dit-on, par Dioclès.

Soient un cercle dont les deux diamètres AG, BI (*fig.* 101) se coupent normalement, et la cissoïde IHG, à laquelle, par un quelconque de ses points, soit H, il faut mener la tangente.

Fig. 101.



Supposons le problème résolu, et F l'intersection de CG et de la tangente HF. Posons $DF = a$, et, en prenant un point E quelconque entre D et F, $DE = e$.

D'après la propriété spécifique de la cissoïde : $\frac{MD}{DG} = \frac{DG}{DH}$, on aura

donc à exprimer analytiquement l'*adégalité* $\frac{NE}{EG} \backsim \frac{EG}{EO}$, EO étant la portion de la droite EN interceptée entre E et la tangente.

Soient la donnée AD $= z$, la donnée DG $= n$, la donnée DH $= r$, et, comme nous l'avons dit, l'inconnue DF $= a$, l'arbitraire DE $= e$.

On aura

$$\text{EG} = n - e, \qquad \text{EO} = \frac{ra - re}{a}, \qquad \text{EN} = \sqrt{zn - ze + ne - e^2}.$$

D'après la règle, il faut considérer la propriété spécifique, non pas sur la courbe, mais sur la tangente, et poser donc $\frac{NE}{EG} = \frac{EG}{EO}$, EO étant l'ordonnée de la tangente, ou, en notations analytiques,

$$\frac{\sqrt{zn - ze + ne - e^2}}{n - e} \backsim \frac{n - e}{\frac{ra - re}{a}};$$

carrant, pour se débarrasser du radical :

$$\frac{zn - ze + ne - e^2}{n^2 + e^2 - 2ne} \backsim \frac{n^2 + e^2 - 2ne}{\frac{r^2a^2 + r^2e^2 - 2r^2ae}{a^2}}.$$

Multipliant tous les termes par a^2, *et adégalant*, d'après la règle, le produit des extrêmes au carré du moyen, supprimant les termes superflus, conformément à la méthode, on aura enfin

$$3za + na = 2zn.$$

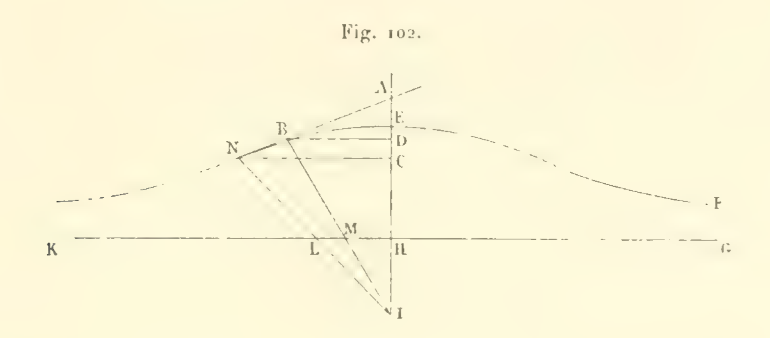
D'où la construction suivante de la tangente : Prolongez le rayon CA du cercle donné jusqu'en V et prenez AV $=$ AC. Divisez AD $\times$ DG par VD, soit DF le quotient; joignez FH; vous aurez la tangente à la cissoïde.

Indiquons aussi la façon de procéder pour la *conchoïde de Nicomède*, mais indiquons-la seulement pour ne pas être trop long.

Soit la conchoïde de Nicomède construite sur la figure ci-contre (*fig.* 102), comme elle l'est dans Pappus et dans Eutocius : I est le pôle, KG l'asymptote à la courbe, IHE la perpendiculaire à l'asym-

ptote, N un point donné sur la courbe, par lequel il faut mener une tangente NBA rencontrant IE en A.

Fig. 102.



Supposons le problème résolu, comme ci-dessus. Menons NC parallèle à KG. D'après la propriété spécifique de la courbe, LN = HE. Prenons un point quelconque, soit D, entre C et E, et menons par ce point, parallèlement à CN, DB qui rencontre la tangente en B. Comme la propriété spécifique de la courbe doit être considérée sur la tangente, joignons BI qui rencontre KG en M; on doit adégaler, d'après les règles de l'art, MB et HE; on arrivera ainsi à l'équation cherchée. Pour cela, on posera, comme ci-dessus, CA = a, CD = e, EH = z, et on désignera de même les autres données par leurs noms. On trouvera facilement l'expression analytique de la droite MB, on l'*adégalera*, comme il a été dit, à la droite HE, et on résoudra la question.

Ce que j'ai dit paraît suffire pour le premier cas. Il est vrai qu'il y a une infinité d'artifices pour abréger les calculs dans la pratique; mais on peut facilement les déduire de ce qui précède.

Pour le second cas, que jugeait difficile M. Descartes, à qui rien ne l'est, on y satisfait par une méthode très élégante et assez subtile.

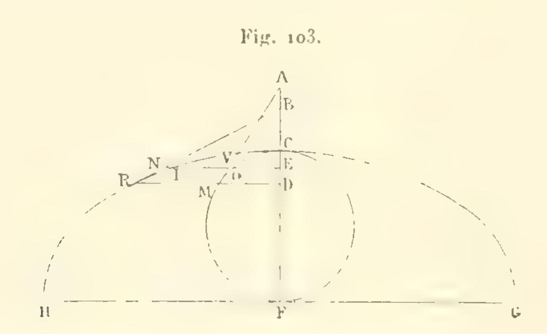
Tant que les termes sont formés seulement de lignes droites, on les cherche et on les désigne d'après la règle précédente. D'ailleurs, pour éviter les radicaux, il est permis de substituer aux ordonnées des courbes, celles des tangentes trouvées d'après la méthode précédente. Enfin, ce qui est le point important, aux arcs de courbes on peut substituer les longueurs correspondantes des tangentes déjà trouvées, et

arriver à l'*adégalité*, comme nous l'avons indiqué : on satisfera ainsi facilement à la question.

Prenons comme exemple la courbe de M. de Roberval [*cycloïde*].

Soient HBIC (*fig.* 103) la courbe, C son sommet, CF l'axe; décrivons le demi-cercle COMF, et prenons sur la courbe un point quelconque, soit R, duquel il faut mener la tangente RB.

Fig. 103.



Menons par ce point R, perpendiculairement à CDF, la droite RMD, coupant le demi-cercle en M. La propriété spécifique de la courbe est que la droite RD est égale à la somme de l'arc de cercle CM et de l'ordonnée DM. Menons, d'après la précédente méthode, la tangente MA au cercle (le même procédé serait en effet applicable si la courbe COM était d'une autre nature). Supposons la construction opérée, et soient l'inconnue DB $= a$, les droites trouvées par construction : DA $= b$, MA $= d$; les données MD $= r$, RD $= z$, l'arc de cercle donné CM $= n$, la droite arbitraire DE $= e$.

Par E menons EOVIN parallèle à la droite RMD; on a $\frac{a}{a-e} = \frac{z}{\text{NIVOE}}$; d'où NIVOE $= \frac{za - ze}{a}$.

Il faut donc *adégaler* (à cause de la propriété spécifique de la courbe qui est à considérer sur la tangente) cette droite $\frac{za - ze}{a}$ à la somme OE + arc CO.

Mais arc CO = arc CM − arc MO. Donc $\frac{za - ze}{a} \backsim$ OE + arc CM − arc MO.

Pour obtenir l'expression analytique des trois derniers termes, tout en évitant les radicaux, on peut, d'après la remarque précédente, sub-

stituer, à OE, l'ordonnée EV de la tangente, et à l'arc MO, la portion de tangente MV qui lui est adjacente.

Pour trouver l'expression analytique de EV, on a d'ailleurs $\frac{b}{b-e}=\frac{r}{EV}$, d'où $EV=\frac{rb-re}{b}$.

Pour celle de MV, à cause des triangles semblables, comme ci-dessus, $\frac{b}{d}=\frac{e}{MV}$, d'où $MV=\frac{de}{b}$.

Enfin on a posé arc$CM=n$. On aura donc analytiquement

$$\frac{za-ze}{a} \backsim \frac{rb-re}{b}+n-\frac{de}{b}.$$

Multipliant, de part et d'autre, par ab :

$$zba-zbe \backsim rba-rae+bna-dae.$$

Mais, d'après la propriété de la courbe, $z=r+n$, donc $zba=rba+bna$.

Supprimant les termes communs,

$$zbe \backsim rae+dae.$$

Divisons par e; comme il ne reste ici aucun terme superflu, il n'y a pas d'autre suppression à faire :

$$zb=ra+da, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{r+d}{b}=\frac{z}{a}.$$

Pour la construction, on fera donc $\frac{MA+MD}{DA}=\frac{RD}{DB}$; on joindra BR qui touchera la courbe CR.

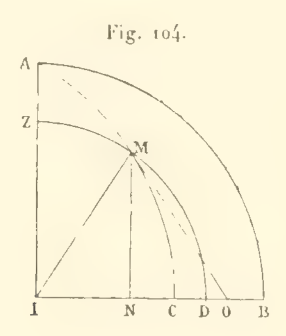
Mais comme $\frac{MA+MD}{DA}=\frac{MD}{DC}$, ainsi qu'il est facile de le démontrer, on peut faire $\frac{MD}{DC}=\frac{RD}{DB}$, ou, pour que la construction soit plus élégante, joindre MC et lui mener RB parallèle.

La même méthode donnera les tangentes à toutes les courbes de cette espèce. Nous avons indiqué il y a longtemps leur construction générale.

Comme il a été proposé de trouver la *tangente de la quadrataire ou quadratrice de Dinostrate*, voici comment nous la construisons d'après la méthode précédente.

Soient AIB (*fig.* 104) un quart de cercle, AMC la quadrataire, à laquelle il faut mener la tangente en un point donné M. Je joins MI; de I comme centre, avec IM comme rayon, je décris le quart de cercle ZMD, et, menant la perpendiculaire MN, je fais $\frac{MN}{IM} = \frac{\text{arc } MD}{IO}$. Je joins MO qui sera tangente à la quadrataire; que cela suffise.

Fig. 104.



Cependant il arrive souvent que la courbure change, comme dans la conchoïde de Nicomède (1er cas) et dans toutes les espèces, sauf la première, de la courbe de M. de Roberval (2e cas); pour pouvoir bien dessiner la courbe, il convient donc de rechercher mathématiquement les points d'inflexion, où la courbure devient concave de convexe, ou inversement. Cette question se résout élégamment par la méthode *de maximis et minimis*, grâce au lemme général suivant :

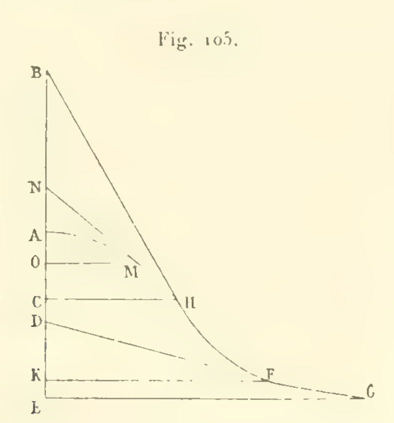
Soit la courbe AHFG (*fig.* 105) *dont la courbure change par exemple au point* H. *Menez la tangente* HB, *l'ordonnée* HC; *l'angle* HBC *sera le minimum entre tous ceux que la tangente fait avec l'axe* ACD, *qu'elle soit au-dessous ou au-dessus du point* H, comme il est facile de le démontrer.

Qu'on prenne en effet, au-dessus du point H, un point M; la tangente en ce point rencontrera l'axe entre A et B, soit en N; l'angle en N sera donc plus grand que l'angle en B.

De même, si l'on prend le point F au-dessous de H, le point D, où la tangente FD rencontre l'axe, sera au-dessous de B, et la tangente DF

rencontrera d'ailleurs la tangente BH du côté de FH; l'angle en D sera donc plus grand que l'angle en B.

Fig. 105.



Nous ne poursuivons pas tous les cas, nous indiquons seulement le mode de recherche, les formes des courbes variant indéfiniment.

Pour donc trouver, par exemple, le point H sur la figure, on cherchera d'abord, d'après la méthode précédente, la propriété de la tangente en un point quelconque de la courbe. Puis, par la doctrine *de maximis et minimis*, on déterminera le point H tel qu'en menant la perpendiculaire HC et la tangente HB, le rapport $\frac{\mathrm{HC}}{\mathrm{CB}}$ soit minimum. Car ainsi l'angle en B sera minimum. Je dis que le point H ainsi trouvé sera celui où commence le changement de courbure.

La même méthode *de maximis et minimis* donne aussi, par un artifice singulier, l'invention du centre de gravité, comme je l'ai indiqué autrefois à M. de Roberval.

Mais, comme couronnement, on peut encore *trouver les asymptotes d'une courbe donnée*, recherche qui conduit à de remarquables propriétés pour les courbes indéfinies. Nous pourrons un jour les développer et les démontrer plus au long.

VII.

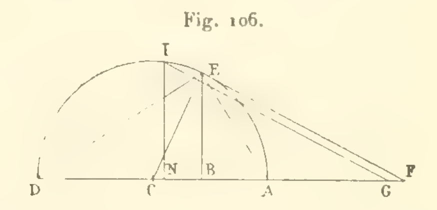
PROBLÈME ENVOYÉ AU R. P. MERSENNE

le 10 novembre 1642.

Trouver le cylindre de surface maxima inscrit dans une sphère donnée.

Soit donnée une sphère de diamètre AD (*fig.* 106), de centre C. On demande d'y inscrire le cylindre de surface maxima.

Fig. 106.



Supposons le problème résolu; soient DE le diamètre de base du cylindre, EA son côté (on peut en effet donner cette position au cylindre, l'angle inscrit dans le demi-cercle étant droit). La surface du cylindre est proportionnelle à $DE^2 + 2DE.EA$: il faut donc chercher le maximum de la somme $DE^2 + 2DE.EA$.

Si l'on abaisse la perpendiculaire EB, on a, d'une part, $DE^2 = AD.DB$; de l'autre, $DE.EA = AD.BE$. Nous avons donc à chercher le maximum de la somme $AD.DB + 2AD.BE$, ou, en divisant les deux termes par la droite donnée AD, le maximum de la somme $DB + 2BE$.

Cette question est facile : qu'on fasse $CB = \frac{1}{2}BE$, ou, ce qui revient au même, $BC = \frac{CE}{\sqrt{5}}$, le point E satisfera au problème. Menons en effet la tangente EF qui rencontre en F le prolongement du diamètre; je dis que la somme $DB + 2BE$ est maxima.

En effet, puisque $CB = \frac{1}{2}BE$, $BE = \frac{1}{2}BF$; donc $BF = 2BE$; donc $DF = DB + 2BE$; il est clair ainsi que la somme $DB + 2BE$ est maxima.

Prenons en effet un point quelconque, soit I, sur le demi-cercle, et abaissons la perpendiculaire IN; par le même point I, menons IG paral-

lèle à la tangente et rencontrant le diamètre en G. Ce point G tombera entre les points F et D, autrement la parallèle GI ne rencontrerait pas le demi-cercle. En raison du parallélisme, on a $\frac{FB}{BE} = \frac{GN}{NI}$; mais FB = 2BE; donc GN = 2NI et, par suite, GD = DN + 2NI. Mais comme GD(= DN + 2NI) est inférieure à DF(= DB + 2BE), il s'ensuit que DB + 2BE est un maximum et que le cylindre cherché aura pour base DE et pour côté EA.

On prouvera, d'après ce qui précède, que le rapport $\frac{DE}{EA}$ est celui du plus grand au plus petit segment d'une droite divisée en moyenne et extrême raison.

Nous pouvons d'ailleurs par le même procédé *trouver et construire un cylindre de surface donnée.*

On ramènera en effet la question à l'égalité entre la somme DN + 2NI et une droite donnée, soit DG, qui, d'après la valeur trouvée pour le maximum, devra être au plus égale à DF. Menez GI parallèle à FE; le point I satisfera à la question et l'on pourra ainsi avoir tantôt deux cylindres, tantôt un seul répondant à la condition posée.

Si, en effet, le point G tombe entre F et A, deux cylindres différents satisferont au problème; mais si G tombe en A ou plus près de D, la solution sera unique.

VIII.

ANALYSE POUR LES RÉFRACTIONS.

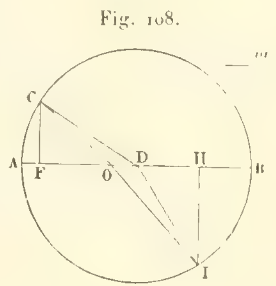
Soit ACBI (*fig.* 108) un cercle dont le diamètre AFDB sépare deux milieux de nature différente, le moins dense étant du côté ACB, le plus dense du côté AIB.

Soient D le centre du cercle et CD le rayon incident tombant sur ce centre du point C donné; on demande le rayon réfracté DI, ou autrement le point I par où passera le rayon après la réfraction.

Abaissez sur le diamètre les perpendiculaires CF, IH. Le point C

étant donné ainsi que le diamètre AB et le centre D, le point F et la droite FD seront également donnés. Supposons que le rapport de la résistance du milieu plus dense à celle du milieu moins dense soit celui de la droite donnée DF à une autre droite m donnée en dehors de la figure. On devra avoir $m < \mathrm{DF}$, la résistance du milieu moins dense devant être inférieure à celle du milieu plus dense, par un axiome plus que naturel.

Fig. 108.



Nous avons maintenant à mesurer, au moyen des droites m et DF, les mouvements suivant les droites CD et DI; nous pourrons ainsi représenter comparativement l'ensemble du mouvement sur ces deux droites par la somme de deux produits : $\mathrm{CD}.m + \mathrm{DI}.\mathrm{DF}$.

Ainsi la question est ramenée à partager le diamètre AB en un point H de telle sorte que si en ce point on élève la perpendiculaire HI, puis qu'on joigne DI, l'aire $\mathrm{CD}.m + \mathrm{DI}.\mathrm{DF}$ soit minima.

Nous emploierons à cet effet notre méthode, déjà répandue parmi les géomètres et exposée depuis environ vingt ans par Hérigone dans son *Cursus mathematicus*. Appelons n le rayon CD ou son égal DI, b la droite DF, et posons $\mathrm{DH} = a$. Il faut que la quantité $nm + nb$ soit minima.

Soit, pour l'inconnue e, une droite arbitraire DO; joignons CO, OI. En notations analytiques : $\mathrm{CO}^2 = n^2 + e^2 - 2be$, et $\mathrm{OI}^2 = n^2 + e^2 + 2ae$; donc

$$\mathrm{CO}.m = \sqrt{m^2n^2 + m^2e^2 - 2m^2be}, \qquad \mathrm{IO}.b = \sqrt{b^2n^2 + b^2e^2 + 2b^2ae}.$$

La somme de ces deux radicaux doit être *adégalée*, d'après les règles de l'art, à la somme $mn + bn$.

Pour faire disparaître les radicaux, on élèvera au carré, on supprimera les termes communs et l'on transposera de façon à ne laisser dans un des membres que le radical qui subsistera; puis on élèvera de nouveau au carré; après nouveau retranchement des termes communs de part et d'autre, division de tous les termes par *e* et suppression de ceux où *e* entrera encore, selon les règles de notre méthode généralement connue depuis longtemps, on arrivera, en ôtant les facteurs communs, à l'équation la plus simple possible entre *a* et *m*, c'est-à-dire qu'après avoir fait disparaître les obstacles opposés par les radicaux, on trouvera que la droite DH de la figure est égale à la droite *m*.

Par conséquent, pour trouver le point de réfraction, il faut, ayant mené les droites CD et CF, prendre les droites DF et DH dans le rapport de la résistance du milieu plus dense à celle du milieu moins dense, soit dans le rapport de *b* à *m*. On élèvera ensuite en H la perpendiculaire HI au diamètre; elle rencontrera le cercle en I, point où passera le rayon réfracté; et ainsi d'ailleurs le rayon, passant d'un milieu moins dense dans un plus dense, s'infléchira du côté de la perpendiculaire : ce qui concorde absolument et sans exception avec le théorème découvert par Descartes; l'analyse ci-dessus, dérivée de notre principe, donne donc de ce théorème une démonstration rigoureusement exacte.

IX.

SYNTHÈSE POUR LES RÉFRACTIONS.

Le savant Descartes a proposé pour les réfractions une loi qui est, comme on dit, conforme à l'expérience; mais, pour la démontrer, il a dû s'appuyer sur un postulat absolument indispensable à ses raisonnements, à savoir que le mouvement de la lumière se ferait plus facilement et plus vite dans les milieux denses que dans les rares; or ce postulat semble contraire à la lumière naturelle.

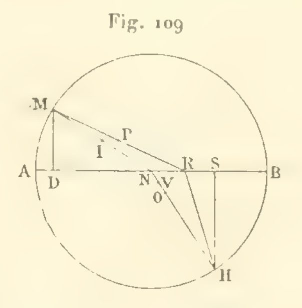
En cherchant, pour établir la véritable loi des réfractions, à partir du principe contraire, — à savoir que le mouvement de la lumière se fait plus facilement et plus vite dans les milieux rares que dans les denses, — nous sommes retombés précisément sur la loi que Descartes a énoncée. Est-il possible d'arriver sans paralogisme à une même vérité par deux voies absolument opposées, c'est une question que nous laissons à examiner aux géomètres assez subtils pour la résoudre rigoureusement; car, sans entrer dans de vaines discussions, la possession assurée de la vérité nous suffit et nous l'estimons préférable à une plus longue continuation de querelles inutiles et illusoires.

Notre démonstration s'appuie sur ce seul postulat que la nature opère par les moyens et les voies les plus faciles et les plus aisées. Car c'est ainsi que nous croyons qu'il doit être énoncé et non pas comme on le fait d'ordinaire en disant que la nature opère toujours par les lignes les plus courtes.

En effet, de même qu'en spéculant sur les mouvements naturels des graves, Galilée en mesure les rapports aussi bien par le temps que par l'espace, de même nous ne considérerons pas les espaces ou les lignes les plus courtes, mais celles qui peuvent être parcourues le plus facilement, le plus commodément et dans le temps le plus court.

Cela supposé, soient deux milieux de nature différente (*fig.* 109)

Fig. 109



séparés par le diamètre ANB du cercle AHBM, le milieu le moins dense étant du côté de M, le plus dense du côté de H; menons de M vers H

les lignes quelconques MNH, MRH, brisées sur le diamètre aux points N et H.

La vitesse du mobile sur MN dans le milieu rare étant plus grande, d'après l'axiome ou le postulat, que la vitesse du même mobile sur NH, et les mouvements étant supposés uniformes dans chacun des deux milieux, le rapport du temps du mouvement sur MN au temps du mouvement sur NH sera, comme on sait, le produit du rapport de MN à NH et du rapport inverse des vitesses sur NH et sur MN. Soit donc posé $\frac{\text{vitesse sur MN}}{\text{vitesse sur NH}} = \frac{\text{MN}}{\text{NI}}$, on aura $\frac{\text{temps sur MN}}{\text{temps sur NH}} = \frac{\text{IN}}{\text{NH}}$.

On prouvera de même que si le rapport de la vitesse dans le milieu rare à la vitesse dans le milieu dense est $\frac{\text{MR}}{\text{RP}}$, on aura $\frac{\text{temps sur MR}}{\text{temps sur RH}} = \frac{\text{PR}}{\text{RH}}$.

D'où il suit que $\frac{\text{temps sur MNH}}{\text{temps sur MRH}} = \frac{\text{IN} + \text{NH}}{\text{PR} + \text{RH}}$.

Or, puisque c'est la nature qui dirige la lumière du point M vers le point H, nous devons chercher un point, soit N, par lequel la lumière, en s'infléchissant ou se réfractant, parviendra dans le temps le plus court du point M au point H; car on doit admettre que la nature, qui mène le plus vite possible ses opérations, visera d'elle-même ce point-là. Si donc la somme IN + NH, qui mesure le temps du mouvement sur la ligne brisée MNH, est une quantité minima, nous aurons atteint notre but.

L'énoncé du théorème de Descartes donne ce minimum, comme nous allons aussitôt le prouver par un véritable raisonnement géométrique et sans aucune ambiguïté. Voici en effet cet énoncé :

Si du point M on mène le rayon MN, que du même point M on abaisse la perpendiculaire MD, puis que l'on prenne $\frac{\text{DN}}{\text{NS}}$ dans le rapport de la plus grande vitesse à la moindre, qu'enfin on élève en S la perpendiculaire SH et que l'on mène le rayon NH, la lumière incidente au point N dans le milieu rare se réfractera dans le milieu dense du côté de la perpendiculaire vers le point H.

C'est ce théorème qui est en accord avec notre Géométrie, comme il résulte de la proposition suivante purement géométrique.

Soit le cercle AHBM, dont ANB est un diamètre et N le centre; sur la circonférence de ce cercle je prends un point M quelconque, je mène le rayon MN et j'abaisse sur le diamètre la perpendiculaire MD. Soit donné d'autre part le rapport $\frac{DN}{NS}$, en supposant $DN > NS$; en S j'élève au diamètre la perpendiculaire SH qui rencontre la circonférence au point H; je joins ce point au centre par le rayon HN. Posons $\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{NI}$; je dis que la somme $IN + NH$ est minima; c'est-à-dire que si l'on prend un autre point quelconque, R par exemple, sur le rayon NB, que l'on joigne MR, RH et que l'on fasse $\frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}$, on aura $PR + RH > IN + NH$.

Pour le démontrer, faisons $\frac{MN}{DN} = \frac{RN}{NO}$ et $\frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV}$. Il est clair que, par construction, puisque DN est plus petit que le rayon MN, on aura $NO < NR$; de même, puisque $NS < ND$, on aura $NV < NO$.

Cela posé, on a, d'après Euclide : $MR^2 = MN^2 + NR^2 + 2DN.NR$; mais puisque, par construction, $\frac{MN}{DN} = \frac{NR}{NO}$, on a $MN.NO = DN.NR$; donc $2MN.NO = 2DN.NR$; donc $MR^2 = MN^2 + NR^2 + 2MN.NO$.

Mais, puisque $NR > NO$, $NR^2 > NO^2$; donc

$$MR^2 > MN^2 + NO^2 + 2MN.NO.$$

Mais la somme $MN^2 + NO^2 + 2MN.NO = (MN + NO)^2$. Donc

$$MR > MN + NO.$$

D'autre part, par construction, $\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{NI} = \frac{NO}{NV}$; donc

$$\frac{DN}{NS} = \frac{MN + NO}{IN + NV}.$$

Mais on a aussi $\frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}$; donc $\frac{MN + NO}{IN + NV} = \frac{MR}{RP}$. Or $MR > MN + NO$; donc aussi $RP > IN + NV$.

Il reste à prouver que $RH > HV$; car, s'il en est ainsi, il est clair que $PR + RH > IN + NH$.

Or dans le triangle NHR, d'après Euclide,

$$RH^2 = HN^2 + NR^2 - 2SN.NR.$$

Mais par construction $\frac{MN(=NH)}{DN} = \frac{NR}{NO}$, et $\frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV}$; donc, *ex æquo*, $\frac{HN}{NS} = \frac{NR}{NV}$. Donc $HN.NV = NS.NR$ et $2HN.NV = 2SN.NR$; donc

$$RH^2 = HN^2 + NR^2 - 2HN.NV.$$

Mais on a prouvé que $NR^2 > NV^2$; donc

$$HR^2 > HN^2 + NV^2 - 2HN.NV.$$

Or $HN^2 + NV^2 - 2HN.NV = HV^2$, d'après Euclide; donc $HR^2 > HV^2$ et $HR > HV$. Ce qu'il restait à prouver.

Si l'on prend le point R sur le rayon AN, quand même les droites MR, RH se trouveraient dans le prolongement l'une de l'autre, comme dans la figure suivante (*fig.* 110), — la démonstration étant d'ailleurs indé-

Fig. 110.

pendante de ce cas particulier, — le résultat sera le même, c'est-à-dire que l'on aura toujours $PR + RH > IN + NH$.

Faisons, comme ci-dessus, $\frac{MN}{DN} = \frac{RN}{NO}$ et $\frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV}$; il est clair que $RN > NO$ et $NO > NV$.

$MR^2 = MN^2 + NR^2 - 2DN.NR$. A $2DN.NR$ on peut, d'après le même raisonnement que ci-dessus, substituer $2MN.NO$; d'ailleurs $NR^2 > NO^2$; donc $MR^2 > MN^2 + NO^2 - 2MN.NO$. Mais

$$MN^2 + NO^2 - 2MN.NO = MO^2.$$

Donc $MR^2 > MO^2$ et $MR > MO$.

D'autre part, on a, par construction, $\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{IN} = \frac{NO}{NV}$; donc, *vicissim* : $\frac{MN}{NO} = \frac{NI}{NV}$, et *dividendo* : $\frac{MO}{ON} = \frac{IV}{VN}$, et *vicissim* :

$$\frac{MO}{IV} = \frac{ON}{NV} = \frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}.$$

Mais on a prouvé que $MR > MO$; donc $PR > IV$. Il reste à prouver, pour établir la proposition, que $RH > HN + NV$; ce qui est très facile d'après ce qui précède.

En effet $RH^2 = HN^2 + NR^2 + 2SN.NR$; à $2SN.NR$ on peut substituer, comme on l'a vu, $2HN.NV$; d'ailleurs $NR^2 > NV^2$. Donc

$$HR^2 > HN^2 + NV^2 + 2HN.NV;$$

donc, comme ci-dessus, $HR > HN + NV$.

Il est donc certain que la somme des deux droites PR, RH, quand même elles ne formeraient qu'une droite unique PRH, est toujours supérieure à la somme $IN + NH$. C. Q. F. D.

NOUVEAU TRAITEMENT EN ANALYTIQUE

DES

INCONNUES SECONDES ET D'ORDRE SUPÉRIEUR.

La réduction aux premières des inconnues secondes et d'ordre supérieur, opération de la plus haute importance en Algèbre, trouve son fondement dans la seule proportion de la double équation, à réitérer autant de fois qu'il est besoin, ainsi que le montre la marche elle-même de la question.

Soit proposé

$$a^3 + e^3 = z^{\text{III}} \qquad \text{et} \qquad ba + e^2 + de = n^2.$$

Pour ramener la seconde inconnue à la première, voici les règles :

Faites passer dans un membre de l'équation tous les termes où entre la seconde inconnue. Ainsi, dans l'exemple choisi,

$$\text{de} \quad a^3 + e^3 = z^{\text{III}}, \qquad \text{tirez :} \qquad z^{\text{III}} - a^3 = e^3;$$

$$\text{de} \quad ba + e^2 + de = n^2, \qquad\qquad n^2 - ba = e^2 + de.$$

De la sorte dans chaque équation les termes en e, c'est-à-dire ceux où entre la seconde inconnue, constituent un des membres de l'équation.

Si cette équation double est ramenée à une proportion, on aura

$$z^{\text{III}} - a^3 : e^3 :: n^2 - ba : e^2 + de.$$

En égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, tous les termes seront divisibles par e, la seconde inconnue, ce qui est évident, puisque e figure dans le second et le quatrième membre de la proportion.

On aura

$$z'''e^2 - a^3e^2 + z'''de - a^3de = n^2e^3 - bae^3.$$

Divisez par e jusqu'à ce qu'un terme soit entièrement débarrassé de e :

$$z'''e - a^3e + z'''d - a^3d = n^2e^2 - bae^2.$$

Cela fait, cette nouvelle équation sera, par rapport à la seconde inconnue, d'un degré moins élevé que la plus haute des deux proposées en premier lieu. On voit en effet que dans la plus haute des deux premières proposées entre e^3, dans cette dernière, le terme le plus élevé par rapport à e est en e^2.

Il ne faut pas s'arrêter ici, mais réitérer la proportion sur la double équation, jusqu'à ce qu'on ait ramené la seconde inconnue au premier degré, afin d'éviter tout radical.

Préparons donc cette dernière équation de la manière prescrite et formons un membre de l'équation avec tous les termes en e, quels qu'ils soient; on aura

$$z'''d - a^3d = n^2e^2 - bae^2 - z'''e + a^3e.$$

Des deux premières équations, la moins élevée donne, comme nous l'avons dit :

$$n^2 - ba = e^2 + de.$$

Ramenez encore cette double équation à une proportion

$$z'''d - a^3d : n^2e^2 - bae^2 - z'''e + a^3e :: n^2 - ba : e^2 + de.$$

Égalons le produit des moyens à celui des extrêmes; tous les termes pourront être divisés par e, comme on l'a montré. On aura

$$z'''de^2 + z'''d^2e - a^3de^2 - a^3d^2e$$
$$+ n^4e^2 - n^2bae^2 - n^2z'''e + n^2a^3e - ban^2e^2 + b^2a^2e^2 = bz'''ae - ba^4e.$$

Divisant tout par e, il vient enfin

$$z'''de + z'''d^2 - a^3de - a^3d^2$$
$$- n^4e - n^2bae - n^2z''' + n^2a^3 - ban^2e + b^2a^2e = bz'''a - ba^4.$$

Cela fait, cette nouvelle équation est encore, relativement à la

seconde inconnue, abaissée d'un degré. Si l'on fait passer dans un membre de l'équation tous les termes où entre e, on a

$$z'''d^2 - a^3d^2 + n^2z''' - n^2a^3 - bz'''a + ba^4$$
$$= n^4e - n^2bae - ban^2e + b^2a^2e - z'''de + a^3de.$$

Il n'y a pas lieu d'aller plus loin, puisque la seconde inconnue ne se trouve plus qu'au premier degré, si bien que, par une simple division, on aura la relation de e à la première inconnue. Ainsi

$$e = \frac{z'''d^2 - a^3d^2 + n^2z''' - n^2a^3 - bz'''a + ba^4}{n^4 - n^2ba - n^2ba + b^2a^2 - z'''d + a^3d}. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

Pour ramener la recherche des deux inconnues à celle d'une seule, il faut reprendre une quelconque des deux équations primitives; la moins élevée est plus convenable pour que le degré de l'équation finale ne monte pas trop haut.

Ainsi nous avons dans une des deux équations primitives :

$$ba + e^2 + de = n^2.$$

Au lieu de e on substituera sa valeur trouvée qui est exprimée au moyen soit de termes connus, soit de la première inconnue qui ici est a. Puis on ordonnera l'équation par rapport à cette première inconnue. Il est clair que la seconde sera éliminée, qu'on sera arrivé à une équation libre de tout radical et que la méthode est générale.

Si en effet on proposait plus de deux inconnues, la méthode, réitérée autant qu'il le faudra, exprimera par exemple la troisième en fonction de la première et de la seconde, puis la seconde en fonction de la première, toujours par le même moyen.

APPENDICE A LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE.

La méthode précédente permet en Algèbre une élimination complète et absolue des radicaux. L'unique procédé que l'on ait jusqu'à

présent possédé pour cette élimination, le *climatisme symétrique de Viète*, est loin d'être une invention suffisante et assez efficace.

Qu'on propose par exemple

$$\sqrt[3]{ba^2 - a^3} + \sqrt{a^2 - ca} + \sqrt[3]{d^2a + a^3} + \sqrt[4]{ga^3 - a^4} = n.$$

Comment l'analyste à la façon de Viète pourra-t-il se débarrasser de radicaux de cette sorte? La difficulté ne croîtra-t-elle pas, plus il poussera son travail? Enfin, fatigué et désespéré, n'implorera-t-il pas de l'Analyse une lumière nouvelle?

Elle est clairement fournie par la méthode précédente. Je ne donnerai qu'un seul exemple très court; car, le principe une fois dévoilé, tout le reste apparaît sans la moindre difficulté.

Soit proposé $\sqrt[3]{za^2 - a^3} + \sqrt{a^3 - b^2a} = d$.

D'abord on ordonnera l'équation de façon à en constituer un membre avec un seul radical.

Soit donc $d - \sqrt{a^3 - b^2a} = \sqrt[3]{za^2 - a^3}$.

Cela fait, on désignera tous les radicaux, excepté celui qui a été rejeté seul dans un membre de l'équation, par des inconnues secondes, ou d'ordre supérieur, si besoin est.

Posons donc, par exemple : $\sqrt{a^3 - b^2a} = e$.

On arrive ainsi au procédé de la méthode précédente, à la proportion de la double équation. On a en effet : $d - e = \sqrt[3]{za^2 - a^3}$.

Élevant les divers membres au cube, $d^3 + 3de^2 - 3d^2e - e^3 = za^2 - a^3$; mais, par hypothèse, $e^2 = a^3 - b^2a$.

On a donc une double équation; dans chaque équation, il faut, d'après la méthode, faire passer dans un même membre tous les termes où entre la seconde inconnue. On aura donc

$$za^2 - a^3 - d^3 = 3de^2 - 3d^2e - e^3, \qquad a^3 - b^2a = e^2.$$

On réitérera l'opération jusqu'à ce qu'on arrive à exprimer la seconde inconnue au moyen de la première. Cela fait, on substituera à e sa nouvelle valeur, dans une quelconque des équations primitives que l'on ordonnera; on aura résolu la question.

Je n'ajoute rien de plus, ce serait inutile; je ne m'arrête pas aux superfluités. Qui ne voit en effet que tous les termes irrationels peuvent être de même représentés, si une seconde inconnue ne suffit pas, par des troisièmes, quatrièmes inconnues, et indéfiniment? Auquel cas on considérera d'abord comme seconde la quatrième ou dernière, et les autres provisoirement comme première inconnue ou comme termes connus, jusqu'à ce qu'on ait entièrement éliminé cette dernière inconnue et ramené les équations à ne contenir que la première, la seconde et la troisième. Puis par le même moyen on réduira la troisième inconnue à la seconde et à la première, et la seconde à la première, comme nous l'avons déjà indiqué.

Il n'y a donc aucune irrationelle qui résiste à l'élimination par cette méthode, dont l'usage est surtout précieux, indispensable même, dans la résolution numérique des équations. En effet, aussitôt les irrationelles éliminées, l'artifice de Viète sera applicable pour la recherche numérique des racines; si la question ne peut être résolue en nombres exacts, on aura des solutions aussi approchées qu'on le voudra. Au contraire, tant qu'il y a des irrationelles, il est impossible d'arriver aux solutions approchées.

Une recherche plus approfondie a montré que l'on pouvait déduire de là une méthode très remarquable pour la pleine et parfaite connaissance des lieux en surface, comme aussi pour les problèmes où l'on donne au début de la question plus d'éléments que n'en réclame la détermination de la construction du problème.

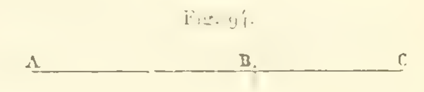
Pour expliquer ceci plus clairement, il y a certains problèmes qui ne reconnaissent qu'une position inconnue, et qu'on peut appeler *déterminés*, pour les distinguer des problèmes de lieux. Il y en a certains autres qui ont deux positions inconnues et ne peuvent jamais être ramenés à n'en avoir qu'une seule : ce sont les problèmes de lieux. Dans les premiers problèmes, nous recherchons seulement un point unique, dans les derniers, une ligne. Mais si le problème proposé admet trois positions inconnues, il s'agit de trouver, pour satis-

faire à la question, non plus seulement un point ou une ligne, mais bien une surface entière; de là naissent les lieux en surface, etc.

De même que dans les premiers problèmes les données suffisent pour déterminer la question, dans les seconds il manque une donnée pour la détermination; dans les troisièmes il en manque deux. Mais il peut se faire que, de même que dans ces cas les données suffisent ou sont en nombre insuffisant, au contraire dans d'autres, les données soient surabondantes et en excès. Un exemple rendra la chose claire.

Sur la droite AC (*fig.* 94) donnée, on donne le produit AB × BC et la différence des carrés $AB^2 - BC^2$.

Fig. 94.



Il est clair que dans ce cas il y a plus de données que n'en réclament la détermination et par conséquent la solution de la question. Cependant ces problèmes se présentent très fréquemment, surtout en Physique et dans les arts manuels; tous peuvent se traiter, grâce à notre méthode, par une simple division, sans recourir à des extractions de racine, à quelque degré que puissent monter les équations.

Soit proposé, par exemple, dans une certaine question :

$$a^3 + b^2 a = c^2 d,$$

et en même temps, parce que nous supposons la question *surabondante* (c'est le nom que nous donnons à ces problèmes, de même que nous avons pour habitude d'appeler *déficients* les problèmes de lieux) :

$$g^3 a - a^4 = b^2 a^2.$$

Ramenez cette double équation à une proportion, en traitant, par l'application de la méthode que nous avons enseignée, notre unique inconnue, ici a, comme nous avons fait ci-dessus la seconde, ou bien celles d'ordre supérieur, et réitérons l'opération jusqu'à ce que la valeur de a puisse s'obtenir par une simple division, et être exprimée, non plus au moyen de l'inconnue première, mais bien en termes entiè-

rement connus. On aura une solution très simple du problème, et l'analyste ne sera plus embarrassé par les équations quadratiques, cubiques, biquadratiques, etc.

Voici, comme *couronnement*, la solution très simple que notre méthode donne de ce fameux problème :

Étant donnés une ellipse et un point en dehors de son plan, couper par un plan, de façon que la section soit un cercle, la surface conique ayant pour sommet le point donné et pour base l'ellipse donnée.

Les géomètres ramènent la question à prendre *ad libitum* cinq points sur l'ellipse, à joindre ces points par des droites au sommet de la surface conique, et à décrire un cercle passant par ces cinq droites; ils trouvent ainsi que le problème est solide. Mais, puisque sur l'ellipse le nombre des points est indéfini, si au lieu de cinq, on en prend six, le problème sera *surabondant*, et on arrivera à une double équation, qui donnera finalement l'inconnue par une simple division.

De même, si l'on donne une courbe quelconque plane, ou un lieu en surface, quel qu'en soit le degré, on pourra trouver les diamètres et les axes et même, dans la surface-lieu, toutes les courbes constitutives du lieu en surface, etc.

Soit, par exemple, une surface conique dont le sommet soit donné et qui ait pour base une parabole ou une ellipse cubique ou biquadratique, ou de quelque degré supérieur, en allant jusqu'à l'infini. Une telle surface peut être coupée au moyen de notre méthode de façon à obtenir une courbe quelconque qui puisse être tracée sur cette surface d'après sa nature, et la solution du problème sera toujours très simple.

Je n'ajoute rien sur les tangentes des courbes ni sur les autres et nombreux usages de cette méthode, qui se présenteront d'eux-mêmes à la réflexion attentive du chercheur analyste.

SUR LE

PROBLÈME D'ADRIEN ROMAIN.

Au très illustre Christian HUYGENS.

En examinant plus attentivement, l'année dernière, la célèbre réponse de François Viète au problème d'Adrien Romain, et en tombant sur ce passage du Chapitre VI où ce subtil mathématicien avance ne pas savoir si Adrien lui-même a bien connu la formation et les propriétés de l'équation qu'il a proposée, j'ai commencé à douter que Viète de son côté eût bien donné et découvert une solution suffisamment générale de cette fameuse équation.

Adrien Romain proposait en effet, suivant l'énoncé corrigé par Viète, de trouver la valeur de la racine de l'équation algébrique :

$$\begin{aligned}&45x - 3795x^3 + 95\,634x^5 - 113\,8500x^7 + 781\,1375x^9 - 3451\,2075x^{11}\\&+ 1\,0530\,6075x^{13} - 2\,3267\,6280x^{15} + 3\,8494\,2375x^{17} - 4\,8849\,4125x^{19}\\&+ 4\,8384\,1800x^{21} - 3\,7865\,8800x^{23} + 2\,3603\,0652x^{25} - 1\,1767\,9100x^{27}\\&+ 4695\,5700x^{29} - 1494\,5040x^{31} + 376\,4565x^{33} - 74\,0259x^{35}\\&+ 11\,1150x^{37} - 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = \textit{un nombre donné.}\end{aligned}$$

Il est certain que Viète a fait une très élégante et très savante réduction de ce problème, suivant son habitude, en employant les sections angulaires et qu'il a construit, page 318 de l'édition elzévirienne, une Table importante qu'il est aisé d'étendre indéfiniment à un nombre

quelconque de termes en continuant à appliquer la méthode dont il s'est servi; cette Table permet de reconnaître quelle équation correspond à une division spéciale des angles.

Ainsi, si l'on prend d'abord, dans les rangs impairs, $x^3 - 3x$ et qu'on égale cette expression à un nombre donné qui soit au plus égal à 2, la question se ramène à la trisection de l'angle. Si ensuite on égale $x^5 - 5x^3 + 5x$ à un nombre donné qui soit au plus égal à 2, la question se ramène à diviser un angle en cinq parties égales. Si c'est $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$ que l'on égale encore à un nombre donné au plus égal à 2, il s'agira de prendre la septième partie d'un angle; si l'on continue indéfiniment la Table de Viète selon la méthode qu'il a donnée, le premier membre de l'équation proposée par Adrien sera le 45e terme de la Table, et la question sera ramenée à prendre la 45e partie d'un angle donné.

Mais il faut observer que, dans toutes ces équations, la méthode de Viète et l'emploi des sections angulaires ne sont applicables qu'aux cas où, comme nous l'avons dit, le nombre donné, auquel on égale une quelconque des expressions algébriques de la Table, ne dépasse pas 2; si au contraire ce nombre donné est supérieur à 2, aussitôt tout ce mystère des sections angulaires devient inutile et ne rend plus aucun service pour la solution de la question proposée.

Cependant Adrien avait proposé en général de résoudre l'équation en s'en donnant le second membre; il faut donc recourir à un autre moyen qu'aux sections angulaires de Viète.

Si l'on propose tout d'abord, comme premier cas, d'égaler $x^3 - 3x$ à un nombre donné qui soit au plus égal à 2, la question, comme nous l'avons déjà indiqué, se ramène à la trisection de l'angle; si, au contraire, on égale $x^3 - 3x$ à 4 ou à tout autre nombre supérieur à 2, l'équation proposée est résolue par les analystes au moyen de la méthode de Cardan. Mais, dans les autres cas suivants, la solution peut-elle être obtenue indéfiniment par des extractions de racines, voilà ce que les analystes n'ont pas encore essayé; mais pourquoi ne pas faire progresser l'Algèbre de ce côté, surtout sous vos auspices,

illustre Huygens, vous dont tous les savants honorent à juste titre le brillant mérite?

Soit donc proposé d'égaler $x^5 - 5x^3 + 5x$ à 4 ou à tout autre nombre supérieur à 2. Dans ce cas, la méthode de Viète est inapplicable; mais nous pouvons affirmer hardiment, pour résoudre généralement le problème d'Adrien, que pour toutes les expressions de la Table précitée, toutes les fois que le nombre donné est supérieur à 2, la question proposée peut être facilement résolue par des extractions de racines.

Nous avons en effet remarqué, bien plus nous avons démontré que, dans tous ces cas, la question peut être ramenée, de même que dans l'équation cubique, à une quadratique par une racine cubique, selon la méthode de Cardan et de Viète; si l'équation est du cinquième degré, à une quadratique par une racine du cinquième degré; si l'équation est du septième degré, à une quadratique par une racine du septième degré, et ainsi de suite indéfiniment.

Soit, par exemple, $x^3 - 3x = 4$. Tous savent que la méthode précitée donne la racine : $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$.

Mais proposons, dans l'exemple d'Adrien ou de Viète, d'égaler $x^5 - 5x^3 + 5x$ à 4 ou à tout autre nombre plus grand que 2.

Par une méthode qui est générale et qui s'appliquera indéfiniment à tous les cas de la Table, nous supposerons que la racine cherchée est de la forme $\frac{y^2+1}{y}$; en opérant la substitution, nous verrons toujours se détruire réciproquement les termes qui s'opposent à la simple résolution de la question par une extraction de racine; par exemple, dans le cas proposé, la racine sera $\sqrt[5]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[5]{2 - \sqrt{3}}$.

Si l'on prend la septième expression dans la Table de Viète (je veux dire celle dont l'exposant de la plus haute puissance est 7), soit

$$x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x = 4,$$

et que l'on imagine, comme ci-dessus, $x = \frac{y^2+1}{y}$, tous les termes s'opposant à la solution par extraction de racine se détruiront de

même, et l'on trouvera pour la racine cherchée : $\sqrt[7]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[7]{2-\sqrt{3}}$, et ainsi de suite à l'infini.

C'est ce que vous pourrez non seulement reconnaître par l'expérience, mais aussi démontrer, aussitôt que vous le désirerez; car c'est une propriété spécifique de toutes les équations que l'on peut former avec la Table de Viète, que leurs solutions s'obtiennent toujours par de simples extractions de racines, lorsque le terme connu est supérieur à 2.

Or le nombre donné, auquel peut être égalée une expression analytique de la Table, peut être soit 2, soit plus petit que 2, soit plus grand que 2.

Dans le premier cas, la racine cherchée est toujours 2.

Dans le second, la question se ramène, d'après Viète, aux sections angulaires.

Dans le troisième, elle se résout facilement au moyen de notre méthode, c'est-à-dire par des extractions de racines.

Ainsi, si l'on prend l'expression analytique proposée par Adrien :

$$45x - 3795x^3 + \ldots = 4,$$

la racine cherchée sera $x = \sqrt[45]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[45]{2-\sqrt{3}}$.

Nous n'avons pas à nous arrêter plus longtemps sur un sujet désormais éclairci par des exemples suffisants; on peut toutefois remarquer que l'extraction de la racine du 45e degré, ou l'invention de quarante-quatre moyennes proportionnelles entre deux quantités données, peut se ramener très facilement à l'extraction successive de deux racines cubiques et d'une racine du 5e degré, ce que montrent suffisamment les diviseurs 5 et 9 du nombre 45; 5 en effet correspond à une racine du 5e degré, et 9 à l'extraction de deux racines cubiques, puisque 9 est le carré de 3, exposant du cube.

Ainsi, l'invention de deux moyennes proportionnelles réitérée deux fois et celle de quatre moyennes, opérée une seule fois, fournissent quarante-quatre moyennes et résolvent notre question, de même que

Viète a ramené la division de l'angle en 45 parties égales, ce qui est le problème d'Adrien, à une équation cubique réitérée deux fois et à une équation du 5ᵉ degré, c'est-à-dire à une double trisection et à une seule division en 5.

Je n'ajoute rien sur les solutions multiples de l'équation ou question proposée; j'ai seulement donné celle qui se présente en premier lieu, me réservant à traiter à loisir des autres dont la discussion demande plus de travail.

Adieu, homme illustre, aimez-moi.

RÉPONSE AUX QUESTIONS DE CAVALIERI.

Il y a longtemps qu'à l'exemple d'Archimède pour sa *parabole*, j'ai carré *toutes celles en nombre indéfini dans lesquelles les abscisses sont proportionnelles aux ordonnées élevées à une puissance quelconque*. Cette découverte, que j'ai été le premier à faire, a été communiquée à M. de Beaugrand et à d'autres; cependant je dois dire que M. de Roberval, qui, sur mes indications, s'était attaqué à ces questions, en a trouvé de lui-même la solution, et a ainsi donné une preuve de l'heureuse perspicacité de son génie en Mathématique.

J'ai également trouvé les centres de gravité de ces figures et de celles qui en dérivent; j'ai employé à cet effet cette méthode qui m'appartient et grâce à laquelle j'ai aussi bien construit les tangentes des courbes quelconques, ainsi que leurs asymptotes, enfin tous les problèmes qui se rapportent à la recherche du maximum et du minimum.

Mais arrivons à la question : le savant Bonaventure Cavalieri demande ce que l'on peut dire des quadratures précitées. J'ai établi une règle générale qui donne la solution, non seulement quand il y a rapport constant entre l'abscisse et une puissance de l'ordonnée, mais aussi quand le rapport est donné entre une puissance quelconque de l'abscisse et une puissance quelconque de l'ordonnée; voici l'énoncé général.

Soit une figure parabolique quelconque EAF (*fig.* 111), et supposons, par exemple, $\frac{CA^3}{BA^3} = \frac{EC^4}{DB^4}$. Je prends les exposants des puissances, tant des ordonnées que des abscisses : l'exposant est 4 pour le bicarré

de l'ordonnée; 3 pour le cube de l'abscisse. Je dis donc que le rapport du parallélogramme EH à l'aire de la figure EAF est le même que celui de la somme des exposants des deux puissances à l'exposant de la

Fig. 111.

puissance des ordonnées. Ainsi, dans l'exemple proposé, le rapport du parallélogramme à la figure inscrite sera de 7 à 4.

Dès lors, si, par exemple, $\frac{EC^4}{DB^4} = \frac{CA}{AB}$, l'exposant de l'abscisse étant simplement l'unité, le rapport du parallélogramme à la figure sera de 5 à 4.

Il en sera de même indéfiniment pour toutes les figures de ce genre.

Donc on peut affirmer ce que le savant Cavalieri ne proposait qu'avec doute, à savoir que s'il y a rapport constant entre les puissances des ordonnées et la simple longueur de l'abscisse (ou avec le côté, comme disent les analystes), le rapport du parallélogramme à la figure est de 2 à 1 pour le triangle, de 3 à 2 pour la parabole simple, de 4 à 3 pour la parabole cubique, de 5 à 4 pour la biquadratique, et ainsi de suite indéfiniment.

Si maintenant, en laissant fixe la droite CA, *on fait tourner la figure autour d'elle de façon à engendrer un solide, le rapport du cylindre* EH *à ce solide se trouvera comme suit :*

Le cylindre est au solide dans le rapport de la somme du double de l'exposant de la puissance de l'abscisse et de l'exposant de la puissance de l'ordonnée à ce dernier exposant.

Soit, par exemple, $\frac{EC^3}{DB^3} = \frac{CA^2}{BA^2}$. L'exposant du carré de l'abscisse est 2, dont le double est 4; ajoutant 3, exposant de la puissance de

l'ordonnée, on a 7; le rapport du cylindre au solide est donc de 7 à 3 (exposant de la puissance de l'ordonnée).

Par là, j'ai répondu à la seconde question.

Les *centres de gravité* de toutes ces figures, tant planes que solides, divisent le diamètre dans le rapport soit du parallélogramme à la figure plane, soit du cylindre au solide.

Si *l'on fait tourner la figure autour de* EF, le solide engendré n'est plus simple comme précédemment, mais composé. Cependant un habile géomètre peut facilement établir une proposition simple entre ce solide et le cylindre circonscrit. Je pourrai le montrer plus longuement et avec des preuves à M. Cavalieri, s'il le désire.

Mais quand il demande si des courbes de ce genre, en dehors du triangle et de la parabole, peuvent être des sections coniques, il semble ne pas penser à leurs propriétés spécifiques; il est tout aussi impossible qu'elles soient des sections coniques qu'il est impossible que la section de la sphère par un plan soit une parabole, une hyperbole, ou une ellipse.

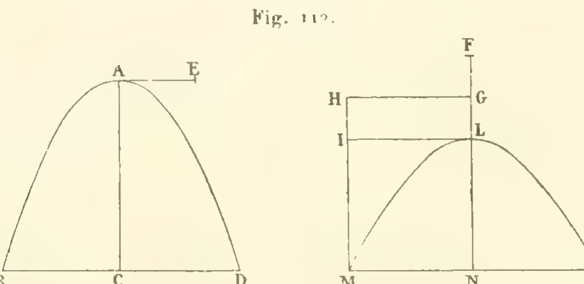
Je lui demanderai en grâce de vouloir bien nous envoyer d'Italie quelques problèmes.

PROPOSITIONS A LALOUVÈRE.

I.

Soit une parabole BAD (*fig.* 112) dont AC est l'axe, BC une ordonnée, AE le paramètre. On demande le rapport de la courbe AB à la droite BC.

Fig. 112.



Soit l'hyperbole MLO de centre G, d'axe transverse FL égal au paramètre AE de la parabole. Soit LN l'axe de cette hyperbole, dont nous supposerons le paramètre égal à l'axe transverse, en sorte que pour toute ordonnée on ait $MN^2 = FN.NL$. En G, élevons la perpendiculaire GH égale à l'ordonnée BC de la parabole; menons HM et LI, parallèles à GN et GH et par M, point de rencontre de HM et de l'hyperbole, menons l'ordonnée MN.

Je dis que le rapport de la courbe parabolique AB à la droite BC est le même que celui du quadrilatère MHGL (formé par les droites MG, HG, GL et la courbe ML) au rectangle IG.

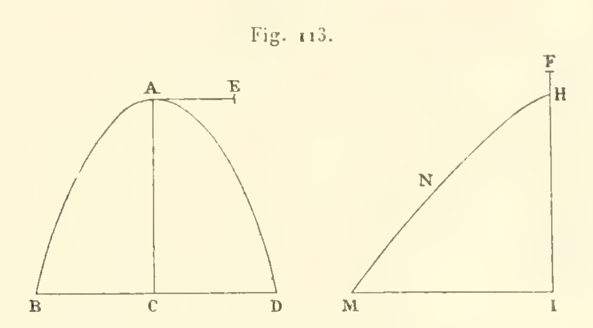
II.

Soit donnée (*fig.* 113) la parabole BAD; soient AC son axe, BC une ordonnée, AE le paramètre; on fait tourner la figure parabolique BAC

autour de l'ordonnée BC; trouver la mesure de la surface courbe du solide engendré.

Je construis l'hyperbole MNH ayant HI pour axe, en prenant son axe transverse HF égal au quart du paramètre de la parabole, c'est-à-dire de la droite AE, et en faisant le paramètre de cette hyperbole

Fig. 113.

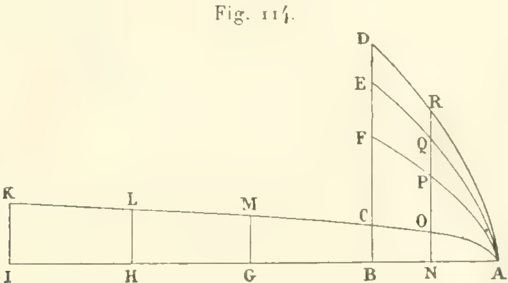


égal à son axe transverse, en sorte que, pour une ordonnée quelconque, on ait $IM^2 = FI.IH$. Je prends HI égale à l'axe AC de la parabole et je mène l'ordonnée IM. Du produit de CA par l'arc parabolique BA, je retranche l'aire hyperbolique IMH; je construis le carré égal à la différence. La diagonale de ce carré sera le rayon d'un cercle égal à la surface courbe du solide engendré par la rotation de l'aire ABC autour de l'ordonnée BC.

III.

Soit une demi-parabole quelconque AC (*fig.* 114), de sommet A et d'axe AB; de cette courbe j'en déduis d'autres en nombre indéfini comme AF, AE, AD, etc.

Fig. 114.



Voici la loi de leur formation : pour la courbe AF, l'ordonnée BF est

égale à l'arc de courbe parabolique CA, et si je prends un autre point quelconque, comme N, par lequel je mène l'ordonnée NP, cette ordonnée NP est de même égale à l'arc de parabole AO. Pour la courbe EA, l'ordonnée EB est égale à la courbe FA du second degré et toute autre ordonnée QN est de même égale à l'arc PA de la même courbe du second degré. De même, pour la courbe AD, l'ordonnée BD est égale à la courbe EA du troisième degré, et toute autre ordonnée NR à l'arc QA de la même courbe du troisième degré ; et ainsi de suite indéfiniment.

Je dis que toutes ces courbes en nombre indéfini se trouvent dans un rapport donné avec la parabole simple primitive; voici comment on peut énoncer le théorème général :

Qu'on prolonge indéfiniment la parabole primitive AC par les points M, L, K, par exemple, et de même son axe par les points G, H, I, en nombre aussi grand que l'on voudra, en prenant BG = GH = HI = AB l'axe, et en menant les ordonnées GM, HL, IK :

Le rapport de la courbe parabolique AM à la courbe AF du second degré est celui de l'ordonnée GM à l'ordonnée BC.

Le rapport de la courbe parabolique AL à la courbe AE du troisième degré est celui de l'ordonnée HL à la droite BC.

Le rapport de la courbe parabolique AK à la courbe AD du quatrième degré est celui de l'ordonnée KI à la droite BC.

Et ainsi de suite indéfiniment.

Si l'on fait tourner les figures AMG, AFB autour des ordonnées GM, BF, le rapport de la surface courbe engendrée par la figure AMG tournant autour de GM à la surface courbe engendrée par la figure AFB tournant autour de BF est égal au rapport de GM^3 à BC^3.

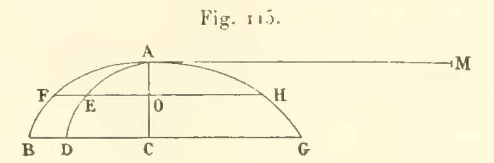
De même le rapport de la surface courbe engendrée par la figure ALH tournant autour de HL à la surface courbe engendrée par la figure AEB tournant autour de BE sera égal au rapport de HL^3 à BC^3.

Et ainsi de suite indéfiniment.

IV.

Soit BA (*fig.* 115) une demi-cycloïde dont on déduit une autre courbe DA par la condition que le rapport des ordonnées $\frac{BC}{CD}$ ou $\frac{FO}{EO}$ soit constamment égal à un rapport donné. Des géomètres ont démontré que la demi-cycloïde BA est double de la droite AC, diamètre du cercle générateur de la cycloïde. On demande la relation des courbes AD à d'autres lignes soit courbes, soit droites.

Fig. 115.



Voici notre énoncé général : Si ces nouvelles courbes se trouvent, comme sur la figure ci-dessus, entre la cycloïde et le diamètre du cercle générateur, toutes ces courbes AD et leurs parties seront égales à des arcs de parabole; si ces nouvelles courbes sont au contraire extérieures à la cycloïde, comme dans la figure ci-après (*fig.* 116), toutes ces courbes AD et leurs parties auront un rapport donné à la somme d'une droite et d'un arc de cercle.

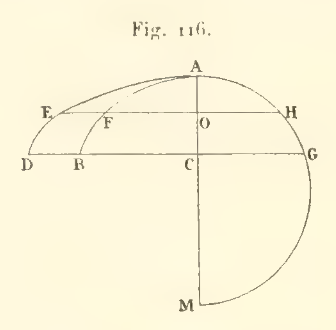
Sur la première figure (*fig.* 115), le théorème général peut être formulé comme il suit. Construisez AM pour la condition $\frac{BC^2 - CD^2}{CD^2} = \frac{4AC}{AM}$; prenez A comme sommet d'une parabole ayant AM pour paramètre et AC pour axe; soit G le point de rencontre de cette parabole et du prolongement de la droite BDC, H le point de rencontre avec le prolongement de la droite FEO. Le rapport de la courbe parabolique AG à la courbe AD sera donné; on aura en effet $\frac{AG^2}{AD^2} = \frac{BC^2}{BC^2 - CD^2}$, et le rapport des arcs AH et AE sera le même.

Si l'on fait tourner les figures : ACG autour de l'ordonnée CG, ADC autour de la droite DC, le rapport des surfaces courbes engendrées sera égal au rapport des courbes AG et AD. Il en sera de même pour

les parties de figure AOH, AEO, si on les fait tourner autour des droites OH, OE.

Pour l'autre figure (*fig.* 116), dans laquelle la courbe AD est extérieure à la cycloïde AB, je fais $\frac{CD^2 - CB^2}{CD^2} = \frac{AC}{AM}$, et je prends la longueur AM sur la même direction que AC; sur cette droite AM, je

Fig. 116.

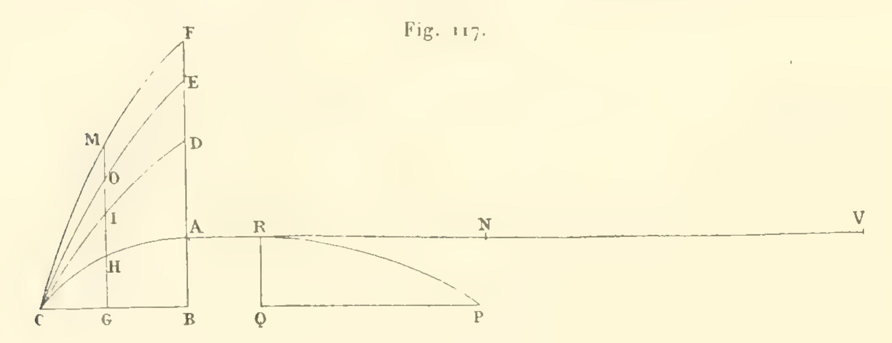


décris un demi-cercle qui sera coupé aux points G et H par les droites DBC, EFO. On aura $\left(\frac{\text{arc AG} + \text{GC}}{\text{arc AD}}\right)^2 = \left(\frac{\text{arc AH} + \text{HO}}{\text{arc AE}}\right)^2 = \frac{BC^2}{DC^2 - CB^2}$, rapport donné.

V.

Soit la parabole AC (*fig.* 117), de sommet A, d'axe AB, d'ordonnée CB; de la courbe parabolique CA j'en déduis d'autres en

Fig. 117.



nombre indéfini CD, CE, CF, par la même méthode que précédemment (*fig.* 114), sauf que cette fois je les fais toutes passer par l'extrémité de la même ordonnée, au lieu de les faire toutes passer par le sommet.

La propriété de ces nouvelles courbes sera donc que, si l'on mène GHIOM parallèle à l'axe AB, la droite BD interceptée en D par la courbe CID du second degré sera égale à l'arc de parabole AC, et la droite GI égale à l'arc de parabole CH; la droite BE interceptée en E par la courbe du troisième degré sera égale à l'arc DIC du second degré et ainsi de suite indéfiniment pour les courbes et leurs arcs.

Je dis que toutes ces courbes CD, EC, FC, etc. sont égales à des arcs de paraboles primitives ou simples, qui seront toutefois différentes de celles qui ont été précédemment égalées aux courbes dérivées. Voici le théorème général :

Je construis la parabole RP, ayant pour axe RQ = AB l'axe de la première parabole, et pour paramètre RV, double du paramètre AN. Je dis que l'arc RP de cette parabole est égal à la courbe CID.

Si, avec RQ = AB pour axe, on prend le paramètre RV = 3AN, l'arc parabolique RP sera égal à la courbe COE.

Si, toujours avec RQ = AB pour axe, on prend le paramètre RV = 4AN, l'arc parabolique RP sera égal à la courbe CMF.

VI.

Si, autour des droites AB, BD, BE, BF, on fait tourner les figures ACB, DCB, ECB, FCB, etc., on peut construire un cercle équivalent à chacune des surfaces courbes des solides ainsi engendrés, avec autant de facilité que l'on peut construire un cercle représentant la surface courbe du conoïde parabolique engendré par la rotation de la parabole AB autour de l'axe AB. Je n'ajouterais pas cette dernière construction que j'apprends avoir déjà été trouvée (sans avoir cependant connaissance de ce qui a été écrit par d'autres sur ce sujet), si le procédé n'était pas général et ne s'étendait pas très aisément à tous les conoïdes engendrés autour des axes BD, BE, BF par ces nouvelles courbes en nombre indéfini.

Si l'on fait tourner (*fig.* 117) la courbe CD autour de la droite BD, voici comment on trouvera la surface courbe du solide engendré :

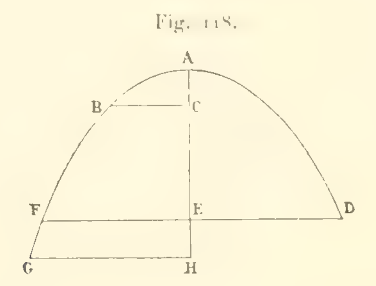
Construisez, d'après la méthode ci-dessus, la courbe parabolique RP

égale à la courbe CID, et faites tourner cette parabole RP autour de la droite RQ. On aura $\frac{\text{surf. conoïde RPQ}}{\text{surf. conoïde DICB}} = \frac{\text{PQ}}{\text{CB}}$, rapport des ordonnées. Si l'on construit de même la parabole RP égale à la courbe COE, on aura encore $\frac{\text{surf. conoïde RPQ}}{\text{surf. conoïde EOCB}} = \frac{\text{PQ}}{\text{CB}}$, et ainsi de suite indéfiniment.

VII.

Soit maintenant (*fig.* 118) la parabole FBAD d'axe EA, d'ordonnée FE. On demande la mesure de la surface courbe du solide engendré par la rotation de la figure ABFE autour de l'axe AE.

Fig. 118.



Prenez AC égal au quart du paramètre; construisez l'ordonnée CB; prenez EH = AC, et construisez l'ordonnée GH, puis le carré équivalent à CBGH, ce qui est facile d'après Archimède. La diagonale de ce carré équivalent à CBGH sera le rayon du cercle équivalent à la surface courbe du conoïde FAD engendré autour de l'axe AE.

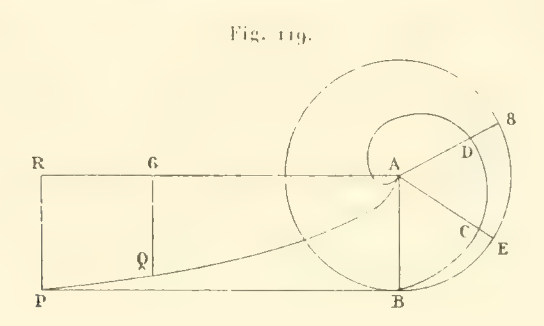
VIII.

Le subtil géomètre qui a récemment démontré l'égalité de la spirale à la parabole aurait pu concevoir le théorème plus généralement et établir une comparaison entre un nombre indéfini de spirales et de paraboles d'espèces différentes, grâce à la proposition suivante qui peut être énoncée de façon à servir d'exemple général :

Soit sur la *fig.* 38 du Livre de Dettonville (*fig.* 119), une spirale d'espèce quelconque, c'est-à-dire telle que le rapport d'une puissance quelconque du rayon AB à la même puissance du rayon AC soit égal

au rapport d'une puissance quelconque de la circonférence totale BE8B à la puissance semblable de l'arc E8B.

Fig. 119.



Construisez la parabole dont la demi-base ou la dernière ordonnée RP soit égale au rayon AB, et dont l'axe AR soit égal à une fraction de la circonférence totale BE8B, fraction ayant pour numérateur l'exposant de la puissance du rayon AB, et pour dénominateur la somme des exposants de la puissance du rayon AB et de la puissance de la circonférence BE8B; qu'enfin les puissances des ordonnées de la parabole, ayant pour exposant la somme de ceux des puissances du rayon AB et de la circonférence BE8B, soient entre elles dans le même rapport que les puissances des abscisses dont l'exposant est celui de la circonférence BE8B. Je dis que la spirale et la parabole ainsi construites seront toujours égales entre elles dans tous les cas.

Par exemple, soit d'abord la spirale d'Archimède et la parabole simple : $\frac{AB}{AC} = \frac{\text{circ. BE8B}}{\text{arc E8B}}$. Construisez la parabole AQP ayant pour dernière ordonnée RP = AB, et pour axe AR une fraction de la circonférence BE8B, ayant pour numérateur l'exposant de la puissance du rayon AB (ici 1) et pour dénominateur la somme des exposants des puissances du rayon et de l'arc (ici 2; car dans ce cas l'exposant de la puissance de l'arc est 1). Ainsi l'axe AR devra être $\frac{1}{2}$ de la circonférence constitutive de la spirale, et dans la parabole, une puissance de l'ordonnée RP ayant pour exposant la somme de ceux des puissances du rayon et de l'arc (ici 2) doit être à la puissance semblable de l'ordonnée GQ comme une puissance de l'abscisse AR ayant pour expo-

sant celui de la circonférence BE8B (ici 1) est à la puissance semblable de l'abscisse AG, c'est-à-dire que l'on doit avoir : $\left(\frac{\text{RP}}{6\text{Q}}\right)^2 = \frac{\text{RA}}{6\text{A}}\cdot$ La courbe parabolique PQA et la spirale BCDA seront égales.

Supposons maintenant : $\frac{\text{AB}^2}{\text{AC}^2} = \frac{\text{circ. BE8B}}{\text{arc E8B}}\cdot$ Dans ce cas l'exposant de la puissance du rayon AB est 2, celui de la puissance de la circonférence est 1. La parabole se construira suivant la règle ci-dessus : l'ordonnée RP sera prise égale au rayon AB, l'axe $\text{AR} = \frac{2}{3}$ circ. BE8B, enfin $\left(\frac{\text{RP}}{6\text{Q}}\right)^3 = \frac{\text{RA}}{6\text{A}}\cdot$ Cette parabole et la spirale correspondante seront égales.

Soit encore : $\frac{\text{AB}}{\text{AC}} = \frac{\overline{\text{circ. BE8B}}^3}{\overline{\text{arc E8B}}^3}\cdot$ Dans la parabole, l'ordonnée RP sera prise égale au rayon AB, l'axe $\text{AR} = \frac{1}{4}$ circ. BE8B, et enfin $\left(\frac{\text{RP}}{6\text{Q}}\right)^4 = \left(\frac{\text{RA}}{6\text{A}}\right)^3\cdot$ Il y aura toujours égalité entre la parabole et la spirale.

Soit enfin dans la spirale : $\frac{\text{AB}^2}{\text{AC}^2} = \frac{\overline{\text{circ. BE8B}}^3}{\overline{\text{arc E8B}}^3}$; dans la parabole correspondante et égale à cette spirale, on aura, comme toujours, l'ordonnée $\text{RP} = \text{AB}$, l'axe $\text{RA} = \frac{2}{5}$ circ. BE8B, et enfin pour le rapport des ordonnées et des abscisses : $\left(\frac{\text{RP}}{6\text{Q}}\right)^5 = \left(\frac{\text{AR}}{6\text{A}}\right)^3\cdot$

La méthode sera indéfiniment la même pour comparer les spirales et les paraboles d'espèce quelconque. Il n'y aura d'ailleurs aucune difficulté pour égaler des arcs de spirale augmentés ou diminués avec des arcs de la parabole correspondante. D'après ce qui précède, il y a à l'intérieur d'un même cercle une infinité de spirales différentes d'espèce et de longueur; bien plus, il y en a une infinité qui surpassent la circonférence du cercle, ce que l'on peut compter parmi les merveilles de la Géométrie. Cependant il n'y en a pas qui ne soit inférieure à la somme de la circonférence et du rayon, et il n'y en a pas qui ne soit plus grande que le rayon.

DE LA COMPARAISON

DES LIGNES COURBES AVEC LES LIGNES DROITES.

DISSERTATION GÉOMÉTRIQUE.

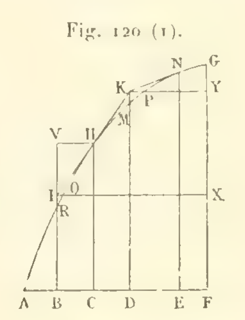
Jamais encore, que je sache, une ligne courbe purement géométrique n'a été égalée par les géomètres à une droite donnée. Ce qu'en effet un subtil mathématicien anglais a récemment découvert et démontré, *que la cycloïde primaire est quadruple du diamètre du cercle qui l'engendre*, paraît devoir se limiter, d'après l'avis des plus savants géomètres. Ils pensent en effet que c'est une loi et un ordre de la nature qu'on ne puisse trouver une droite égale à une courbe, à moins de supposer d'abord une autre droite égale à une autre courbe, et prenant cet exemple de la cycloïde, ils montrent qu'il en est ainsi dans ce cas. Je ne le nie pas; il est clair en effet que le tracé de la cycloïde suppose l'égalité d'une autre courbe avec une droite, à savoir celle de la circonférence du cercle générateur de la cycloïde avec la droite qui est la base de la cycloïde. Mais on va voir ci-dessous ce qu'il en est de cette loi de la nature qu'ils établissent, et combien il est dangereux sur un ou deux faits d'expérience de conclure aussitôt un axiome. Je vais en effet démontrer l'*égalité à une droite d'une courbe véritablement géométrique et pour la construction de laquelle on n'a à supposer aucune égalité semblable d'une autre courbe avec une droite*, et je traiterai toute la question aussi brièvement que possible.

Proposition I.

Soit (*fig.* 120) *une courbe quelconque* AHMG *concave vers un même côté, par exemple une des paraboles en nombre infini, dont les tangentes*

rencontrent en dehors de la courbe la base AF *et l'axe* FG. *Je prends sur une courbe de cette nature un point quelconque* H *par lequel je mène la tangente* IHK; *sur celle-ci je prends, de côté et d'autre, les points* K, I, *d'où j'abaisse* IB, KD *perpendiculaires sur la base* AF *et coupant la courbe aux points* R, M. *Je dis que le segment* HI *de la tangente est plus petit que l'arc de courbe* RH, *qu'au contraire le segment* HK *de la même tangente est plus grand que l'arc de courbe* HM.

Fig. 120 (1).



En effet, puisque, par hypothèse, la tangente KI rencontre la base AF en dehors de la courbe, l'angle CHI que fait la perpendiculaire HC à la base avec la tangente HI est plus petit qu'un droit, et par conséquent la perpendiculaire abaissée de H sur la droite BI tombera en V au-dessus des points B, R, I. On en conclut que HV $<$ HI et que HI est plus petit que la droite qui joint les points H, R. Donc, *a fortiori*, HI est plus petit que l'arc de courbe HR sous-tendu par cette droite qui joint les points H, R. Premier point qu'il fallait démontrer.

Je dis maintenant que le segment KH est plus grand que l'arc de courbe HM. Du point K je mène à la courbe la tangente KN, et j'abaisse la perpendiculaire NE. Il est prouvé, par ce qui précède, que KN $<$ arc NM. Mais, d'après Archimède, la somme des tangentes HK + KN $>$ arc HN. Donc segment HK $>$ arc HM. Second point qu'il fallait démontrer.

Il n'y a pas à objecter que la tangente menée du point K peut tomber au delà du point G. Car, dans ce cas, on peut prendre un autre point entre K et M, et employer le raisonnement précédent.

Il suit de là que, si des points K, I on abaisse sur l'axe des perpen-

diculaires qui coupent la courbe en O, P, on aura, dans le cas de la figure, HI > arc HO et HK < arc HP.

Si l'on imagine en effet la figure retournée, en sorte que l'on prenne l'axe comme base, et la base comme axe, la démonstration sera non seulement semblable, mais absolument identique.

Il résulte enfin de la construction même que, si BC = CD, on a les segments des tangentes HI = HK. Ce qu'il est important de remarquer.

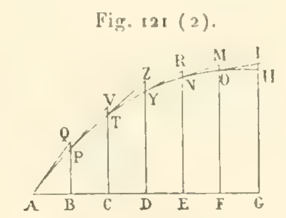
Proposition II.

Pour mesurer les lignes courbes, je ne me servirai pas de lignes inscrites et circonscrites à l'exemple d'Archimède, mais seulement de circonscrites formées par des segments de tangentes; je démontrerai, en effet, qu'il y a deux séries de tangentes, l'une plus grande que la courbe, l'autre plus petite, et les analystes verront que la démonstration par les circonscrites seules est beaucoup plus facile et plus élégante.

Je dis donc qu'il est possible, suivant l'esprit de la méthode d'Archimède, *de circonscrire à une quelconque des courbes précitées deux figures composées de droites, et dont l'une surpasse la courbe d'une différence inférieure à un intervalle donné quelconque; dont l'autre soit au contraire plus petite que la courbe d'une différence également inférieure à un intervalle donné quelconque.*

Soit (*fig.* 121) une quelconque des courbes précitées : je partage la base AG en un nombre quelconque de parties égales, AB, BC, CD,

Fig. 121 (2).

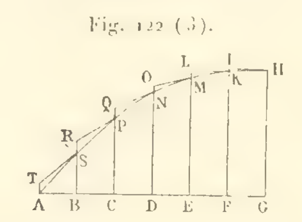


DE, EF, FG; par les points B, C, D, E, F, j'élève les perpendiculaires BQ, CV, DZ, ER, FM, qui rencontrent la courbe aux points P, T, Y, N, O. Je mène les tangentes AQ, PV, TZ, YR, NM, OI.

D'après la première proposition : tangente AQ > arc AP ; tangente PV > arc PT ; etc. ; enfin tangente OI > arc OH. Donc la figure formée par tous les segments des tangentes AQ, PV, TZ, YR, NM, OI est plus grande que la courbe.

Mais soient la même courbe (*fig.* 122) et la base AG divisée en autant de parties égales aux points B, C, D, E, F. En ces points B, C,

Fig. 122 (3).



D, E, F, j'élève encore des perpendiculaires BR, CQ, DO, EL, FI, qui rencontrent la courbe aux points S, P, N, M, K. Au point S, je mène la tangente ST jusqu'à la rencontre avec la perpendiculaire AT ; puis aux points P, N, M, K, H, les tangentes PR, NQ, MO, KL, HI, rencontrant les perpendiculaires BS, CP, DN, EM, FK aux points R, Q, O, L, I. D'après la première proposition : tangente ST < arc AS ; tangente PR < arc PS ; etc. ; enfin la parallèle à la base, IH < arc KH. Donc la figure, formée par tous ces segments de tangentes ST, PR, NQ, MO, KL, HI, sera plus petite que la courbe.

Mais, d'après le corollaire de la proposition I, les segments pris sur les deux côtés des tangentes en un point de la courbe, et correspondant de part et d'autre à des segments égaux de la base, sont égaux entre eux. Par conséquent, puisque les courbes des figures 2 et 3 sont supposées égales ou plutôt comme ce n'est qu'une même courbe et que, si nous avons tracé deux figures, ce n'a été que pour éviter la confusion, on a : tangente ST (3e figure) = tangente PV (2e figure) : le point S (3e figure) étant identique à P (2e figure), et les segments AB, BC de la base étant égaux de part et d'autre dans les deux figures, les segments pris des deux côtés sur la tangente et correspondant à ces segments égaux de la base doivent en effet être égaux, c'est-à-dire que ST (3e figure) = PV (2e figure).

On prouvera de même que PR (3ᵉ figure) = TZ (2ᵉ figure); etc. pour les autres segments. Il n'y aura que le premier de la 2ᵉ figure et le dernier de la 3ᵉ qui ne seront pas égaux à quelque segment sur l'autre figure. Donc l'excès de la figure 2 sur la figure 3 est égal à celui de la tangente AQ (2ᵉ figure) sur la tangente HI (3ᵉ figure). Mais, à cause du parallélisme, IH est égal à un segment de base, FG ou AB, puisqu'on suppose tous ces segments égaux dans les deux figures; donc la 2ᵉ figure, composée de tangentes et plus grande que la courbe, surpasse la 3ᵉ figure, composée de tangentes et plus petite que la courbe, de l'excès de la tangente AQ sur le segment AB de la base qui lui correspond (2ᵉ figure).

Si donc nous voulons circonscrire à la courbe deux figures, l'une plus grande, l'autre plus petite, et dont la différence soit plus petite qu'une quantité donnée quelconque, la construction sera très facile. La tangente au point A (*fig.* 121) est donnée d'après la méthode des tangentes déjà connue, donc l'angle QAB est donné; mais l'angle QBA est droit; donc le triangle QAB est donné d'espèce, donc le rapport $\frac{AQ}{AB}$. Il faut donc régler la division de la base en sorte que la différence $AQ - AB$ soit plus petite qu'une droite donnée quelconque; pour cela, il suffit de chercher deux droites dans le rapport donné et dont la différence soit plus petite que la droite donnée : problème facile. On prendra ensuite un segment quelconque AB de la base, avec la seule condition qu'il soit au plus égal à la plus petite des deux droites satisfaisant audit problème.

Nous aurons ainsi trouvé deux figures circonscrites à la courbe, l'une plus grande, l'autre plus petite que cette courbe, et telles que la différence de ces figures soit inférieure à un intervalle donné quelconque; *a fortiori*, l'excès de la plus grande des circonscrites sur la courbe et celui de la courbe sur la plus petite des circonscrites seront chacun plus petits encore.

On voit donc que notre méthode par double circonscription ouvre un accès facile à la méthode d'Archimède, quand il s'agit de la mesure

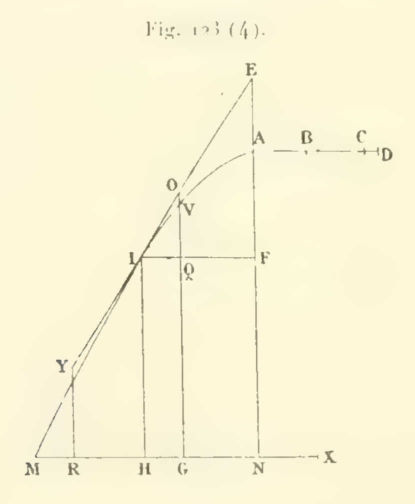
des lignes courbes. Il suffit de l'avoir dit une fois et de l'avoir démontré.

Cela posé, j'affirme hardiment qu'on peut trouver une courbe vraiment géométrique égale à une droite donnée. Cette courbe est une des paraboles en nombre infini, sur lesquelles nous avons spéculé il y a déjà longtemps; c'est celle où les cubes des ordonnées sur l'axe sont proportionnels aux carrés des abscisses de l'axe. Pour que les géomètres n'aient pas à douter de mon affirmation, voici la démonstration en peu de mots.

Proposition III.

Soient (*fig.* 123) MIVA *la parabole dont je viens de parler,* A *son sommet,* AN *son axe,* I *un point quelconque pris sur la courbe. Si je mène*

Fig. 123 (4).



les perpendiculaires ou ordonnées sur l'axe MN, IF, *j'aurai constamment* $\frac{MN^3}{IF^3} = \frac{NA^2}{FA^2}$. *Il faut prouver que la courbe* MIA *est égale à une droite donnée.*

Je pose $\frac{AN^2}{NM^2} = \frac{NM}{AD}$, AD étant pris perpendiculaire à AN; il est clair que AD sera le paramètre de la dite parabole, c'est-à-dire que $AD \times AN^2 = NM^3$ et que, si l'on prend un autre point I, on aura encore pour le cube de l'ordonnée : $AD \times AF^2 = IF^3$. Cela n'a pas besoin

de démonstration, et nous n'avons pas à nous arrêter à ce qui est trop facile.

Je mène la tangente au point I, soit IOE, E étant son point de rencontre avec l'axe AN. D'après la méthode des tangentes, on aura $FA = 2AE$, par conséquent $\frac{FE}{AF} = \frac{3}{2}$, donc $\frac{EF^2}{AF^2} = \frac{9}{4}$.

Je prends $CD = \frac{1}{9}AD$, et le milieu B du reste CA; on aura $\frac{DA}{AB} = \frac{9}{4} = \frac{EF^2}{AF^2}$.

Donc $AD \times AF^2 = FE^2 \times AB$. Mais $AD \times AF^2 = IF^3$; donc $AB \times EF^2 = IF^3$. Donc $\frac{EF^2}{IF^2} = \frac{IF}{AB}$, *et componendo* (comme $EF^2 + IF^2 = IE^2$): $\frac{IE^2}{IF^2} = \frac{IF + AB}{AB}$.

Si je mène du point I, perpendiculairement sur la base, la droite IH, si je trace une autre perpendiculaire quelconque GQVO, rencontrant l'ordonnée IF en Q, la courbe en V, et la tangente en O, les triangles semblables donneront $\frac{IO}{IQ (= HG)} = \frac{IE}{IF}$, d'où $\frac{IO^2}{HG^2} = \frac{IE^2}{IF^2}$.

Mais $\frac{IE^2}{IF^2} = \frac{IF + AB}{AB}$. Donc $\frac{IO^2}{HG^2} = \frac{IF + AB}{AB}$, *relation constante que je me proposais de démontrer.*

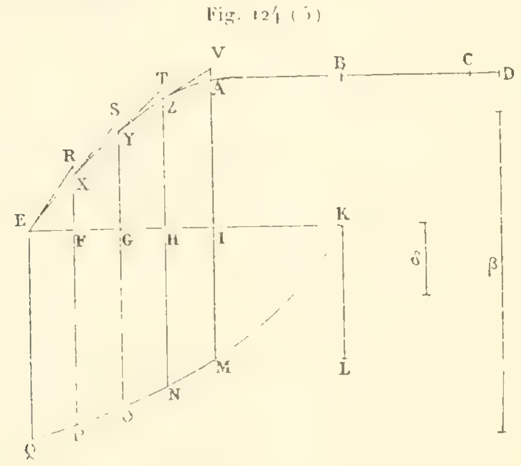
Il suit de là que, si sur le prolongement de MN on prend $NX = AB$, on a toujours $\frac{IO^2}{HG^2}$ ou (pour la tangente et le segment de base de l'autre côté, qui, à cause des parallèles, donnent toujours le même rapport) $\frac{IY^2}{RH^2} = \frac{HX}{NX}$. Car $HX = IF + AB$ et $NX = AB$, ce qui est évident d'après la construction, puisqu'à cause des parallèles on a $HN = IF$, et qu'on a pris $NX = AB$.

Proposition IV.

Soit (*fig.* 124) AXE cette parabole dont la propriété, comme nous avons dit, est que les cubes des ordonnées soient proportionnels aux carrés des abscisses sur l'axe. Soient AI l'axe, EI la base ou demi-base; l'axe AI et l'ordonnée IE étant donnés, on trouvera, comme ci-dessus, le paramètre AD, dont on retranchera le neuvième, CD; après

quoi on prendra le milieu B du reste AC. Je divise la base EI en autant de parties égales que l'on voudra EF, FG, GH, HI; aux points F, G, H, j'élève les perpendiculaires FX, GY, HZ, qui rencontrent la courbe aux points X, Y, Z. Par les points E, X, Y, Z, je mène les tangentes ER, XS, YT, ZV qui rencontrent le prolongement des perpendiculaires FX, GY, HZ, IA aux points R, S, T, V. Enfin je prends, sur le prolongement de EI, IK = AB.

Fig. 124 (1)



Il résulte de la proposition précédente et de son corollaire que l'on a $\frac{ZV^2}{HI^2} = \frac{HK}{KI}$; de même $\frac{YT^2}{GH^2} = \frac{GK}{KI}$, $\frac{XS^2}{FG^2} = \frac{FK}{KI}$; enfin $\frac{ER^2}{EF^2} = \frac{EK}{KI}$.

Cela posé, en K j'élève KL perpendiculaire sur EK, et je prends KL = KI = AB. J'imagine maintenant qu'avec K comme sommet, KE pour axe, on décrive la parabole simple ou parabole d'Archimède, de paramètre KL. Soit KMQ cette parabole, j'élève jusqu'à sa rencontre les perpendiculaires EQ, FP, GO, HN, IM qui en seront évidemment les ordonnées, et qui seront dans le prolongement des perpendiculaires FX, GY, etc.

Comme nous l'avons déjà dit, $\frac{ZV^2}{HI^2} = \frac{HK}{KI}$. Mais, en multipliant les deux termes par KL, on a $\frac{HK}{KI} = \frac{HK.KL}{IK.KL}$; or, d'après la nature de la parabole d'Archimède, $HK.KL = HN^2$; d'ailleurs $IK.KL = KL^2$, puisque l'on a pris KL = KI. Donc $\frac{HN^2}{KL^2} = \frac{ZV^2}{HI^2}$. Donc $\frac{HN}{KL} = \frac{ZV}{HI}$.

Nous prouverons de même que l'on aura, entre les tangentes et les ordonnées, les rapports : $\frac{YT}{GH} = \frac{GO}{KL}$; $\frac{XS}{FG} = \frac{FP}{KL}$; enfin $\frac{ER}{EF} = \frac{EQ}{KL}$.

Mais, puisque $\frac{ZV}{HI} = \frac{HN}{KL}$, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, on a $NH.HI = KL.ZV$. De même, $OG.GH = KL.YT$, et $PF.FG = KL.XS$, enfin $EQ.EF = KL.ER$.

Mais pourquoi s'arrêter plus longtemps sur une question aussi facile, lorsque nous arrivons ainsi immédiatement à la méthode d'Archimède? En inscrivant et en circonscrivant les figures au segment parabolique, la somme de tous les rectangles QE.EF, PF.FG, OG.GH, NH.HI, représentera le segment parabolique EQMI; la somme des tangentes ER, XS, YT, ZV, en redoublant la circonscription, conformément aux règles de notre méthode, représentera la courbe même EXYZA. Donc le segment parabolique EQMI est égal au produit de KL par la courbe EXA. Or le segment parabolique EQMI est donné en rectilignes, puisque Archimède a carré la parabole et par conséquent ses segments. Donc le produit $KL \times \overset{\frown}{EXA}$ est donné; mais KL est donné, donc la courbe EXA, et l'on peut trouver une droite qui lui soit égale. C. Q. F. D.

Si quelqu'un trouvait cependant cette démonstration trop rapide, je ne refuse pas de donner à part le raisonnement complet, en suivant les traces d'Archimède; ceux qui estiment que ce qui précède ne suffit pas pourront lire et examiner le raisonnement qui suit :

Il faut prouver que le segment parabolique $EQMI = KL \times \overset{\frown}{EXA}$.

Posons, d'après Archimède, $EQMI = KL \times \beta$. KL et β sont donnés.

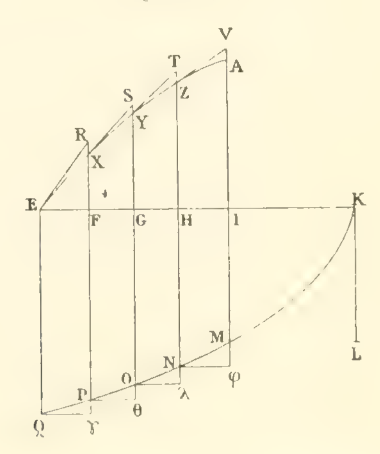
Si nous prouvons que $\beta = \overset{\frown}{EXA}$, notre proposition sera établie.

Je dis donc que $\beta = \overset{\frown}{EXA}$. Si en effet elle n'est point égale à cette courbe, elle sera ou plus grande ou plus petite. Soit d'abord $\beta > \overset{\frown}{EXA}$ et soit, dans cette hypothèse, δ leur différence.

D'après la proposition II, nous pouvons circonscrire à la courbe EXA une figure composée de segments de tangentes et qui soit supérieure à la courbe d'un intervalle moindre que δ. Supposons cette circon-

scription effectuée et représentée dans une figure à part (*fig.* 125), marquée *cinquième* en chiffre romain, où cet ensemble de segments de tangentes, ER + XS + YT + ZV, d'après ce qui a été démontré, est plus grand que la courbe EXA. Mais on suppose également β plus grande que cette courbe, et l'excès de la figure circonscrite sur la courbe est inférieur à celui de β sur la courbe. Donc la figure circonscrite est plus petite que β. Donc le produit de KL par la circonscrite

Fig. 125 (V).



est inférieur à KL × β. Mais KL × β est égal au segment parabolique EQMI. Donc le produit de KL par la circonscrite est inférieur à ce segment parabolique EQMI.

Or nous avons prouvé que

$$KL \times ER = QE \times EF,$$
$$KL \times XS = PF \times FG,$$
$$KL \times YT = OG \times GH,$$
$$KL \times ZV = NH \times HI.$$

Donc, en sommant, le produit de KL par la figure circonscrite est égal à la somme QE × EF + PF.FG + OG.GH + NH.HI. Si maintenant, sur les droites FP, GO, HN, IM qui décroissent continuellement à mesure qu'elles se rapprochent du sommet de la parabole, on abaisse, des points Q, P, O, N, les perpendiculaires (parallèles à la

base) $Q\gamma$, $P\theta$, $O\lambda$, $N\varphi$, il est clair que le rectangle $QEF\gamma = QE.EF$; de même $\theta F = PF.FG$; $\lambda G = OG \times GH$; enfin $\varphi H = NH.HI$. Donc le produit de KL par la circonscrite est égal à la somme des rectangles γE, θF, λG, φH.

Mais nous avons prouvé que ce produit de KL par la circonscrite est inférieur au segment parabolique EQMI. Donc

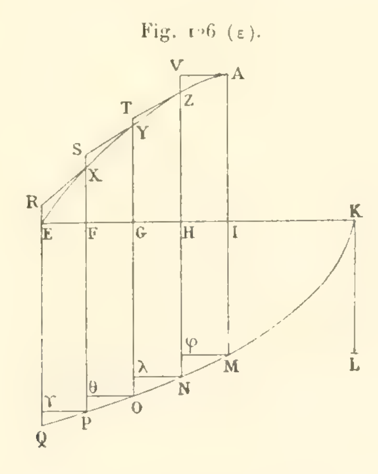
$$\gamma E + \theta F + \lambda G + \varphi H < EQMI;$$

ce qui est absurde, puisque la somme forme une figure composée de rectangles, évidemment circonscrite au segment parabolique, et par conséquent supérieure. Donc β n'est pas plus grande que la courbe EXA.

Nous allons prouver qu'elle n'est pas plus petite. Supposons en effet $\beta < \overset{\frown}{EXA}$, et soit δ l'excès de la courbe sur la droite β.

Circonscrivons à la courbe sur une figure (*fig.* 126) séparée (désignée comme *cinquième* en caractère grec) une suite de segments de

Fig. 126 (ε).



tangentes inférieure à la courbe EXA, mais en sorte que l'excès de la courbe sur elle soit inférieur à δ. Soit cette suite de segments de tangentes : $XR + YS + ZT + AV$.

Comme l'excès de la courbe sur β est égal à δ, et que l'excès de la même courbe sur la figure circonscrite est moindre que δ, la circonscrite sera plus grande que β, donc son produit par KL sera plus

grand que le segment parabolique EQMI. Mais, d'après ce qui a été démontré, le produit de KL par la circonscrite est égal à

$$PF \times FE + OG \times GF + NH \times HG + MI \times IH.$$

En effet, $\frac{XR}{FE} = \frac{FP}{KL}$; donc $KL \times XR = PF \times FE$, et ainsi de suite pour les autres.

Puisque le produit de KL par la circonscrite est plus grand que le segment parabolique EQMI, la somme des rectangles

$$PF.FE + OG.GF + NH.GH + MI.HI$$

est supérieure à ce segment parabolique. Mais si on mène les perpendiculaires (parallèles à la base) $P\gamma$, $O\theta$, $N\lambda$, $M\varphi$, qui rencontrent les ordonnées à l'intérieur de la parabole (car les ordonnées croissent à mesure qu'elles s'éloignent du sommet), les rectangles ainsi construits PE, OF, NG, MH seront respectivement égaux aux précédents. Donc la somme PE + OF + NG + MH sera supérieure au segment parabolique. Ce qui est absurde, car ces rectangles PE, OF, NG, MH composent une figure inscrite dans le segment parabolique et par conséquent plus petite.

Donc β n'est pas inférieure à la courbe EXA. Ne lui étant ainsi ni supérieure, ni inférieure, elle lui est égale. C'est ce que nous avons voulu démontrer longuement pour écarter tout scrupule.

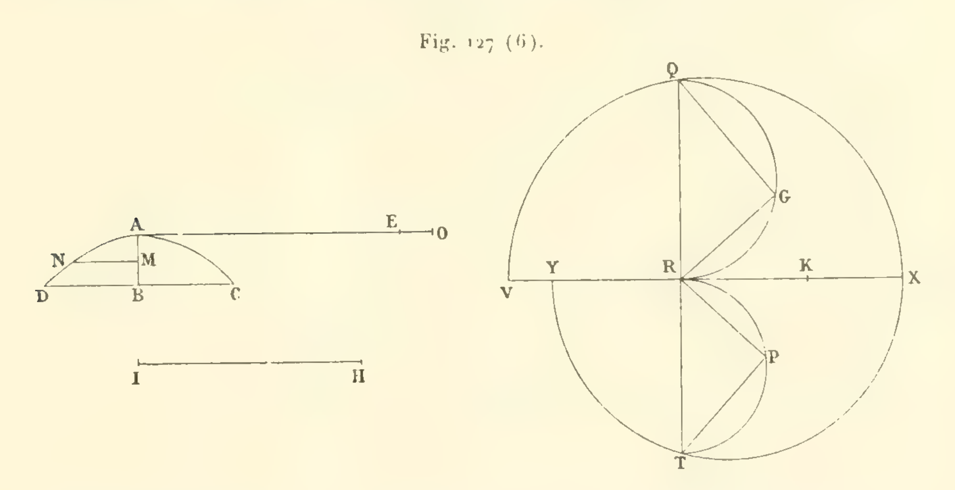
De ce qui a été démontré, ressort que l'on peut établir avec la même facilité l'égalité entre un segment parabolique quelconque EQPF, retranché du premier, et le produit de la donnée KL par la courbe EX. Si donc on donne sur la base un point quelconque F, comme, d'après Archimède, le segment parabolique EQPF est donné en rectilignes, le produit $KL \times \widehat{EX}$ est donné; mais KL est donné, donc l'arc EX. Par conséquent, si l'on donne sur la base un point quelconque F, il est clair que l'arc de courbe correspondant est donné et qu'on peut assigner une droite qui lui soit égale.

Il n'y a pas à objecter que, pour trouver une droite égale à la courbe EXA, il semble falloir construire une parabole simple, ce qui

rendrait le problème solide. Car le tracé de cette parabole n'est supposé que pour rechercher la vérité et faire régulièrement la démonstration; rien n'empêche qu'on ne dissimule ce tracé imaginaire de parabole, et qu'on ne fasse le calcul en ne laissant apparaître que des droites et des cercles. Sauf erreur, voici ce calcul.

Soit (*fig.* 127) la courbe parabolique DAC, telle que les cubes des ordonnées DB et NM soient proportionnels aux carrés des abscisses de l'axe, BA, AM. On donne la hauteur AB, et la demi-base BD, ou la base totale DBC. Je dis que la droite prouvée égale à la courbe DAC est donnée par un calcul véritablement géométrique.

Fig. 127 (6).



Soit AO le paramètre de cette parabole, qui est donné avec l'axe et l'ordonnée, comme il a été montré plus haut; j'en retranche la neuvième partie EO. Je prends égale au reste AE la droite YK, que je prolonge de KX égale à l'ordonnée ou demi-base DB. Sur YX comme diamètre, je décris le demi-cercle YTX et, prenant en R le milieu de YK, j'y élève la perpendiculaire RT qui rencontre le demi-cercle en T. Je prends RV égale à RT, et sur VX comme diamètre je décris le demi-cercle VQX jusqu'à la rencontre duquel j'élève du point R la perpendiculaire RQ. Sur les droites TR, RQ, je décris les demi-cercles TPR, RGQ, et j'y inscris les cordes TP, RG égales à RY. Je joins RP, QG et je dis que le rapport $\frac{\text{arc DAC}}{\text{DBC}} = \frac{2\,\text{QG}^2}{3\,\text{RP}^2}$ et par conséquent est donné. Soit

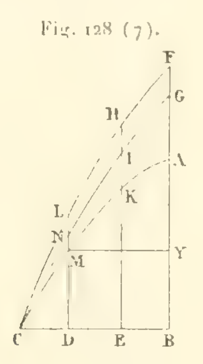
donc posé $\frac{3\mathrm{RP}^2}{2\mathrm{QG}^2} = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{IH}}$. La droite IH donnée par cette construction sera égale à la courbe parabolique DAC.

Si cette construction d'ailleurs ne concorde pas avec la démonstration précédente, il faut la corriger d'après cette dernière.

Si cette propriété de notre courbe parabolique ne suffit pas pour la faire placer par les géomètres au rang des objets particulièrement remarquables de leur Science, ce qui va suivre lui assurera peut-être ce rang. Car qu'y a-t-il de plus singulier que de voir, de cette seule courbe, en dériver une infinité d'autres différentes de cette première et différentes entre elles, et qu'on démontrera néanmoins être égales à des droites données? Voici la proposition générale :

Soient (*fig.* 128) CMA *notre courbe parabolique*, AB *sa hauteur*, CB *sa demi-base; sur cette courbe, on en formera d'autres en nombre infini de*

Fig. 128 (7).



cette façon. Si l'on mène perpendiculairement à la base des droites quelconques DMNL, EKIH, *coupant la courbe aux points* M, K, *la nouvelle courbe* CNIG *à former de cette première sera de telle nature que* DN *soit égale à l'arc correspondant* CM *de la première courbe*, EI *à l'arc* CMK *de la première courbe, et de même pour toutes les autres perpendiculaires. Cette nouvelle courbe* CNIG *sera différente d'espèce de la première.*

On formera sur cette seconde courbe une troisième CLHF, *en sorte que* DL, EH *soient respectivement égales aux arcs* CN, CNI *de la seconde courbe. Sur la troisième, on formera de la même façon une quatrième, sur la quatrième une cinquième, sur la cinquième une sixième, et ainsi de*

suite à l'infini. Je dis que toutes ces courbes CNIG, CLHF, *etc. à l'infini seront, de même que la première parabolique* CMKA, *égales à des droites données.*

Il faut remarquer que toutes ces courbes, en nombre indéfini, sont purement géométriques, et, cependant, on ne peut leur appliquer cette prétendue loi de la nature, dont j'ai parlé au commencement de cette Dissertation. Quoique, en effet, on suppose les droites DN, EI égales aux arcs CM, CMK, elles n'en sont pas moins posées comme égales à des lignes droites, d'après la démonstration précédente. Car, soit donné un point quelconque D, d'après ce qui précède, une droite égale à l'arc CM est donnée; donc la droite DN posée par construction égale à l'arc CM doit être considérée comme une droite véritablement donnée et non supposée égale à un arc. De même pour les autres. Donc la courbe CNIG est véritablement géométrique, et une fois que nous aurons démontré qu'elle est égale à une droite donnée, il s'ensuivra que la courbe qui en dérive, CLHF, est aussi purement géométrique, et de même toutes les autres indéfiniment.

La démonstration est facile en posant d'abord une proposition qui soit générale pour toute cette question.

Proposition VI.

Soient (*fig.* 129) *une courbe quelconque* ONR, *de la nature des précédentes, dont* O *est le sommet,* OVI *l'axe* (*ou l'ordonnée, car la démonstration est la même dans les deux cas*). *Je forme sur elle une autre courbe* OAE, *telles que ses ordonnées soient égales aux arcs correspondants de la première courbe; c'est-à-dire* $VA = \overset{\frown}{ON}$, $IE = \overset{\frown}{OR}$, *et ainsi de suite. Je mènerai comme suit la tangente en un point donné de cette nouvelle courbe. Soit* E *le point donné, je mène l'ordonnée* EI *qui coupe la première courbe en* R. *Je mène en ce point* R *la tangente* RC *à la première courbe. Cette tangente rencontre l'axe au point* C. *Je pose* $\frac{RC}{CI} = \frac{IE}{IB}$, *et je joins* EB. *Je dis que* EB *est tangente en* E *à la nouvelle courbe* EAO.

En effet, si je prends sur l'axe un point quelconque V, et si je mène l'ordonnée VNA coupant la première courbe en N, la tangente RC en S, la seconde courbe en A, enfin EB en Y, il me suffit de prouver que l'on a toujours $VY > VA$, pour établir que EB ne coupe pas la nouvelle courbe du côté du sommet. Or cette preuve est facile à donner.

Fig. 129 (8).

En effet, $VA = \widehat{ON} = \widehat{OR} - \widehat{NR}$. Mais $RS < \widehat{RN}$, suivant le corollaire de la première proposition. Donc $\widehat{OR} - RS > \widehat{OR} - \widehat{RN}$. Mais $VY = \widehat{OR} - RS$, comme nous allons le prouver tout à l'heure. Donc VY (ordonnée de EB) $>$ VA (ordonnée de l'arc OAE). Donc tous les points de EB du côté du sommet sont extérieurs à la courbe; donc EB ne coupe pas la courbe du côté du sommet.

Mais je dis qu'elle ne la coupe pas davantage plus bas. Je prends en effet un point quelconque H, par lequel je mène l'ordonnée HZ, qui coupe la première courbe en D, le prolongement de RC en F, la seconde courbe en Z, le prolongement de EB en Q. Si je prouve qu'en tous cas $HQ > HZ$, j'aurai prouvé que tous les points de EB, même au-dessous de E, sont extérieurs à la courbe, et par suite la droite EB sera démontrée toucher la seconde courbe au point E.

$HZ = \widehat{OD} = \widehat{OR} + \widehat{RD}$, par construction. Mais $RF > \widehat{RD}$, suivant le corollaire de la première proposition, RF étant un segment inférieur de la tangente RC. Donc $\widehat{OR} + RF > \widehat{OR} + \widehat{RD}$. Mais $\widehat{OR} + RF = HQ$, comme nous allons le prouver tout à l'heure, et $\widehat{OR} + \widehat{RD} = HZ$, par

construction. Donc en tous cas $HQ > HZ$. Donc la droite EB est tangente en E à la seconde courbe.

Reste a prouver en premier lieu que $\overset{\frown}{OR} - RS = VY$.

Je mène EM parallèle à l'axe et rencontrant en M le prolongement de VY. Par construction, $\frac{EI}{IB} = \frac{RC}{CI}$. Mais $\frac{EI}{IB} = \frac{YV}{VB} = \frac{YM}{ME}$, et $\frac{RC}{CI} = \frac{RS}{VI}$; donc $\frac{YM}{ME} = \frac{RS}{VI}$. Mais, à cause des parallèles, $ME = VI$; donc $YM = RS$. Mais aussi $EI = VM$; donc $EI - MY = VY$. Or, par construction, $EI = \overset{\frown}{OR}$. Donc $\overset{\frown}{OR} - MY (= RS) = YV$. Premier point qu'il fallait démontrer.

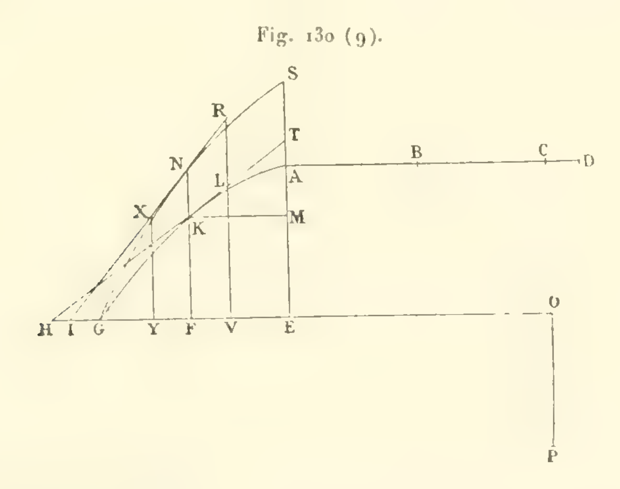
On raisonnera de même au-dessous de l'ordonnée EI. Menant EP parallèle à l'axe, on prouvera que $QP = RF$.

En effet, $\frac{EI}{IB}$ ou $\frac{QH}{HB}$ ou $\frac{QP}{PE} = \frac{RC}{CI}$ ou $\frac{RF}{IH}$. Mais $PE = IH$; donc $QP = RF$. D'ailleurs $HQ = HP + PQ$; $HP = IE = \overset{\frown}{OR}$; $PQ = RF$, comme on vient de le démontrer. Donc $\overset{\frown}{OR} + RF = HQ$. Second point qu'il fallait démontrer.

Il est donc prouvé que EB est tangente à la seconde courbe au point E, ce qu'il fallait démontrer.

Soit maintenant (*fig.* 130) notre courbe parabolique GKA, de hau-

Fig. 130 (9).



teur AE, de demi-base GE, de paramètre AD. Soient, comme précédemment, $CD = \frac{1}{9}AD$, et B le milieu de AC. De cette première courbe

j'en forme une autre à partir du point G, soit GNS, qui rencontre en S l'axe de la première, la propriété de cette nouvelle courbe étant que, si l'on prend un point quelconque F et que l'on élève la perpendiculaire FKN qui rencontre les deux courbes en K et N, on ait toujours FN égal à l'arc GK de la première courbe. Menons KM parallèle à la base et, par ce même point K, TKH tangente à la première courbe et rencontrant l'axe en T, la base en H; par le point N de la seconde courbe, menons la tangente RNXI, qui rencontre la base en I; enfin des deux points R, X, pris arbitrairement de part et d'autre sur cette tangente, abaissons sur la base les perpendiculaires XY, RV.

D'après ce qui précède, on a constamment, quelle que soit la tangente KT, $\frac{KT^2}{FE^2}$ ou $\frac{KL^2}{FV^2} = \frac{FE+AB}{AB}$; mais $\frac{KT^2}{FE^2 (=KM^2)} = \frac{KH^2}{HF^2}$, à cause des parallèles; donc $\frac{KH^2}{HF^2} = \frac{FE+AB}{AB}$. D'autre part, d'après la proposition précédente, $\frac{KH^2}{HF^2} = \frac{FN^2}{FI^2}$, car les côtés sont proportionnels, comme le démontre cette proposition; donc les carrés le sont également. Donc $\frac{NF^2}{FI^2} = \frac{FE+AB}{AB}$; *componendo :* $\frac{(NF^2+FI^2)(=NI^2)}{FI^2} = \frac{FE+2AB}{AB}$. Mais $\frac{NI^2}{FI^2} = \frac{RN^2}{FV^2}$ et aussi $= \frac{NX^2}{FY^2}$; donc, si l'on prend un point quelconque N sur la seconde courbe, le rapport des carrés du segment de tangente et du segment de base correspondant, soit d'un côté, soit de l'autre, sera $\frac{FE+2AB}{AB}$. Si donc je prolonge la base GE de $EO = 2AB$, qu'en O j'élève la perpendiculaire $OP = AB$, on aura toujours, pour notre seconde courbe : $\frac{NR^2}{FV^2}$ ou $\frac{NX^2}{FY^2} = \frac{FO}{OP}$.

Cela posé, il est clair que les autres courbes en nombre indéfini, qu'on tracera comme nous l'avons indiqué, sont de telle nature que, par exemple, dans la troisième, le rapport des carrés du segment de la tangente et du segment de base correspondant sera $\frac{FE+3AB}{AB}$, en prenant F au point où tombe la perpendiculaire abaissée du point de contact sur la base.

Dans la quatrième courbe, le même rapport des carrés des segments correspondants de la tangente et de la base sera $\frac{FE + 4AB}{AB}$, et ainsi de suite indéfiniment.

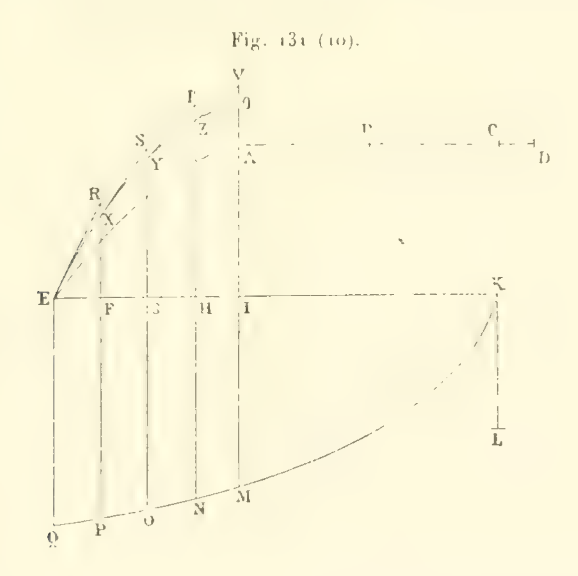
La démonstration est toujours la même et s'applique évidemment en tous cas.

Ceci établi, il est facile d'arriver au théorème général.

Proposition VII.

Soient (*fig.* 131) EA notre courbe parabolique, AI son axe, IE sa demi-base. Je forme sur elle la seconde courbe EXYZO de telle sorte,

Fig. 131 (10).



comme je l'ai dit plus haut, qu'une ordonnée quelconque FX soit égale à l'arc de la première courbe interceptée par cette ordonnée ou perpendiculaire. Je divise la base en un nombre quelconque de parties égales EF, FG, GH, HI; aux points F, G, H, j'élève des perpendiculaires qui coupent la seconde courbe aux points X, Y, Z. Soient AD le paramètre de la première courbe, CD sa neuvième partie, B le milieu du reste AC. Soit, dans le prolongement de la base, IK = 2AB et, élevée en K, la perpendiculaire KL = AB. Par le point K, sur l'axe KE, j'imagine décrite la parabole simple ou d'Archimède ayant KL pour

paramètre; soit KMOQ cette parabole; par les points E, F, G, H, I, j'élève des perpendiculaires à la base qui rencontrent cette parabole aux points Q, P, O, N, M.

D'après le corollaire de la proposition précédente, comme EX0 est la seconde courbe dérivée de la première, c'est-à-dire formée par le procédé que nous avons déjà indiqué plusieurs fois, si l'on y prend un point quelconque Y, et que l'on mène le segment de tangente YT, on a $\frac{YT^2}{GH^2} = \frac{KG}{KL}$. Mais, en multipliant de part et d'autre par KL, $\frac{GK}{KL} = \frac{GK \times KL}{KL^2}$, et, d'après la nature de la parabole simple, $GK \times KL = GO^2$. Donc $\frac{YT^2}{GH^2} = \frac{GO^2}{KL^2}$ et $\frac{YT}{GH} = \frac{GO}{KL}$, ou, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, $GO \times GH = KL \times YT$.

Si l'on mène les autres tangentes ER, XS, ZV, rencontrant les perpendiculaires en R, S, V, on prouvera de même que

$$QE \times EF = KL \times ER, \qquad PF \times FG = KL \times XS;$$

et ainsi de suite indéfiniment.

D'où, en ramenant à la méthode d'Archimède par le même procédé que dans la proposition IV, on conclura que le segment parabolique EQMI est égal au produit de KL par l'arc EX0 de la seconde courbe. De même pour les autres segments paraboliques : par exemple, segm. $EQPF = KL \times \widehat{EX}$; segm. $EQOG = KL \times \widehat{EXY}$; et ainsi de suite indéfiniment.

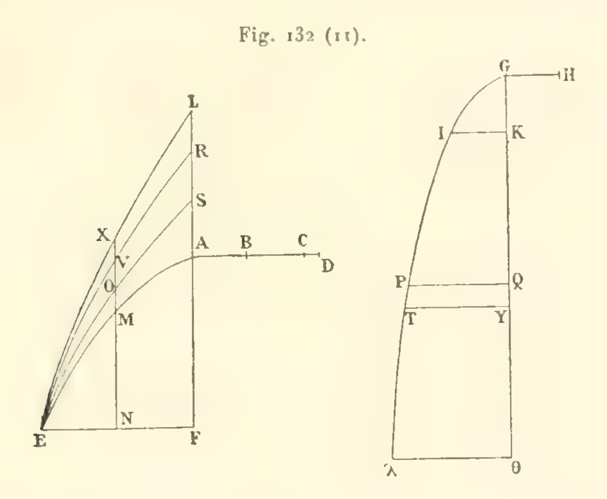
Or tous ces segments paraboliques sont donnés en rectilignes par la quadrature de la parabole qu'Archimède a démontrée; KL est également donné. On a donc également comme données tant la seconde courbe totale EX0 que les arcs EX, EY, etc., interceptés sur elle par les perpendiculaires élevées aux points F, G, etc.

Pour égaler à une droite donnée la troisième courbe, la construction sera la même, sauf que l'on prendra $IK = 3AB$; pour la quatrième courbe, $IK = 4AB$; et enfin on établira, entre toutes les courbes à dériver indéfiniment de la première, cette relation : que deux quel-

conques seront entre elles comme les segments paraboliques de même hauteur d'une même parabole, dont les distances au sommet de la parabole sont d'autant de fois le paramètre qu'il y a d'unités dans les ordres des courbes comparées entre elles.

Soient par exemple (*fig.* 132) EMA notre courbe parabolique, AF son axe, EF sa demi-base, AD son paramètre, CD le neuvième de ce

Fig. 132 (11).



dernier, B le milieu du reste AC. Je forme de cette première courbe la seconde EOS, telle que, si l'on prend un point quelconque N sur la base, NO, perpendiculaire à la base, et qui rencontre les courbes M, O, soit égale à l'arc EM de la première courbe. Je forme ensuite de la seconde courbe la troisième EVR, où NV est égale à l'arc EO de la seconde courbe. De la troisième EVR je forme la quatrième EXL, où NX est égale à l'arc EV de la troisième courbe. Soit à part la parabole simple ou d'Archimède, d'axe indéfini GKQY, de sommet G, de paramètre GH = AB. On demande par exemple le rapport de la quatrième courbe EXL à la primitive EMA.

La première de ces deux courbes étant du quatrième ordre, je prends sur l'axe l'abscisse GY = 4GH et, sur son prolongement, Yθ = EF (demi-base); je mène les ordonnées YT, θλ.

La seconde des deux courbes à comparer étant du premier ordre, je prends sur l'axe l'abscisse GK égale au paramètre pris une seule

fois et, sur son prolongement, KQ = EF (demi-base); je mène les ordonnées KI, QP. D'après ce qui a été démontré et conformément à la règle générale,

$$\frac{\text{segm. parab. } YT\lambda\theta}{\text{segm. parab. } KIPQ} = \frac{(4^e\text{ courbe})EXL}{(1^{re}\text{ courbe})EMA}.$$

Mais, d'après Archimède, le rapport des segments paraboliques est donné, donc celui des courbes est donné; mais la première est donnée, comme il a été démontré; donc la quatrième est donnée, et l'on peut assigner une droite donnée qui lui soit égale. D'ailleurs cette relation constante peut, si l'on veut, être accommodée en langage géométrique, en écartant la parabole et en se servant seulement de la règle et du compas.

Enfin qui ne voit que ce qui a été prouvé et réduit en règle pour les courbes totales vaut pour les arcs de ces courbes à comparer entre eux, au moyen de segments paraboliques ayant pour hauteur les segments de la demi-base qui correspondent aux arcs de courbes?

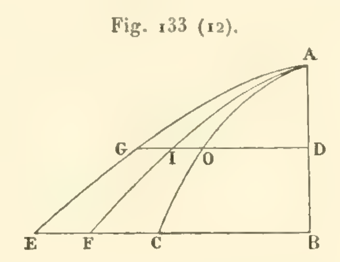
Je n'ajoute rien sur les solides engendrés par ces courbes en nombre infini, ni sur leurs surfaces courbes, ni sur les centres de gravité de ces lignes, de ces solides ou de ces surfaces; car les méthodes générales données à cet égard par de célèbres géomètres ne laissent rien ignorer là-dessus une fois connue la propriété spécifique de la courbe donnée, quoiqu'en beaucoup de cas il ne soit pas inutile que chacun fasse usage de sa propre industrie.

Mais, avant de terminer cet écrit, il me vient à la pensée d'examiner la proposition suivante :

Soient (fig. 133) COA *notre courbe parabolique,* A *son sommet,* AB *son axe,* CB *sa demi-base. On peut en former une infinité d'autres courbes de la manière déjà indiquée, mais non pas, comme auparavant, du côté de la base, au contraire de celui du sommet. Soient donc formées ainsi les courbes* AIF, AGE, *etc. indéfiniment, sous cette condition que, si l'on prend sur l'axe un point quelconque* D *et que l'on mène à l'axe la perpendiculaire* DOIG, *qui coupe les courbes aux points* O, I, G, *la droite* DI

pour la seconde courbe soit égale à l'arc AO *de la première, la droite* DG *pour la troisième, égale à l'arc* AI *de la seconde, et ainsi de suite indéfiniment. Toutes les courbes de cette sorte différeront d'espèce non seulement entre elles et par rapport à la première* AOC, *mais elles différeront*

Fig. 133 (12).



aussi de celles que nous avons formées du côté de la base. On demande si les courbes AIF, AGE, *etc. à l'infini sont égales à des droites données ou bien à d'autres courbes* ([1]).

Que les géomètres le cherchent, ils verront grandir encore la merveille. Il est certain que si les méthodes dont ils se servent pour mesurer les courbes sont générales et suffisantes, comme ils l'affirment, et comme je ne prétends pas dès lors le mettre en doute, ils reconnaîtront la chose au premier coup d'œil et ils épargneront un travail superflu à un géomètre déjà fatigué.

S'ils trouvent quelques points trop concis dans les démonstrations précédentes, je les prie au reste d'y suppléer ou de m'excuser.

([1]) Dans la note de la page 237 du Tome I, il a été dit par inadvertance que les diverses courbes en question pouvaient être superposées par simple translation. De fait, ce sont des développées d'hyperboles, rentrant dans l'équation générale

$$(ny+b)^{\frac{2}{3}} - nx^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}},$$

où n représente l'ordre de dérivation à partir de la développée de parabole, $y^3 = ax^2$, que donne cette équation, si l'on fait $n = 0$ et $b = \frac{8}{27}a$.

APPENDICE A LA DISSERTATION

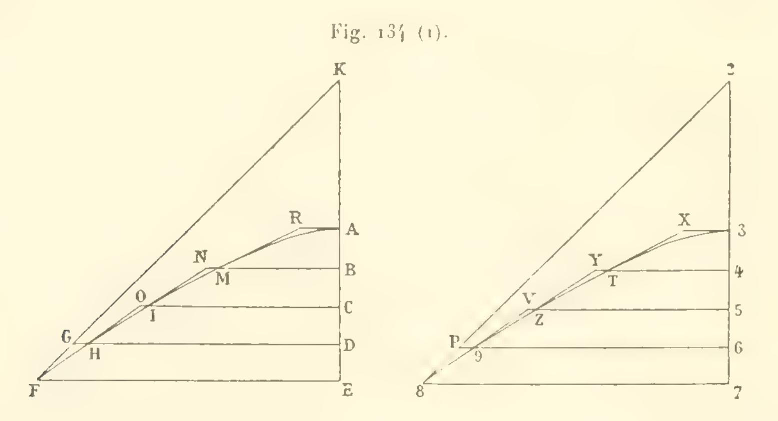
SUR LA COMPARAISON DES LIGNES COURBES AVEC LES LIGNES DROITES.

Pour répondre à la dernière question posée dans la Dissertation, il paraît convenable d'établir d'abord les propositions suivantes.

Proposition I.

Soient (fig. 134) deux courbes AIF, 3Z8 *dont les axes* AE, 37 *soient égaux entre eux. Je mène des ordonnées en nombre quelconque également distantes du sommet dans les deux figures.* Soient, par exemple, BM, CI, DH, EF les ordonnées de la première, 4T, 5Z, 69, 78 celles de la seconde; AB, distance au sommet de l'ordonnée BM, est supposée égale à 43, distance au sommet de l'ordonnée 4T. De même, on suppose CA = 53, DA = 63, enfin EA = 73, supposition déjà faite.

Fig. 134 (1).



Si les ordonnées sont toujours aux longueurs interceptées sur l'axe par les tangentes comme les lignes correspondantes de l'autre figure (c'est-à-dire si, menant les tangentes d'un côté aux points F, H, I, M, de l'autre aux points 8, 9, Z, T, on a toujours par exemple :

$$\frac{\text{ordonnée FE}}{\text{sous-tangente KE}} = \frac{\text{ordonnée 87}}{\text{sous-tangente 72}},$$

$$\frac{\text{ordonnée DH}}{\text{sous-tangente pour le point H}} = \frac{\text{ordonnée 69}}{\text{sous-tangente pour le point 9}},$$

et ainsi pour les autres), *je dis que les deux courbes* AIF, 3Z8 *sont égales, ou plutôt semblables et identiques, les ordonnées d'une figure étant égales à celles de l'autre également distantes du sommet.*

Menons en effet sur la première figure, par les points H, I, M, les segments de tangentes HO, IN, MR, rencontrant les ordonnées aux points O, N, R; sur la seconde figure, les segments de tangentes 9V, ZY, TX, rencontrant les ordonnées aux points V, Y, X. On suppose $\frac{FE}{EK} = \frac{87}{72}$. Mais les angles en E, 7 sont droits; donc les triangles FEK, 872, semblables; donc $\frac{FK}{KE} = \frac{82}{72}$. Mais, si l'on prolonge les ordonnées, DH jusqu'en G, 69 jusqu'en P, $\frac{FK}{KE} = \frac{FG}{DE}$, et $\frac{82}{72} = \frac{8P}{67}$; donc $\frac{FG}{DE} = \frac{8P}{67}$. Mais DE = 67, puisque EA = 73, et DA = 63; donc FG = 8P.

On prouvera de même pour les autres segments de tangentes que : HO = 9V, IN = ZY, MR = TX.

Donc la série des tangentes de la première figure est égale à la série des tangentes de la seconde, d'où, par la méthode d'Archimède de réduction à l'impossible, on conclura facilement l'égalité des courbes AIF et 3Z8, premier point à établir, ainsi que l'égalité des arcs correspondants : FH = 89, HI = 9Z, etc.

Reste à prouver que les ordonnées de l'une des figures sont égales à celles de l'autre.

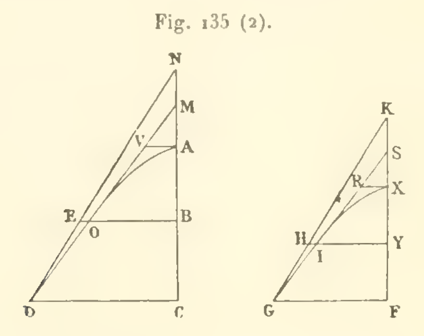
D'après la supposition faite, les ordonnées sont, de part et d'autre, dans le même rapport avec les sous-tangentes; donc les angles GFE, P87, formés par les tangentes et les ordonnées, sont égaux. De même $\widehat{OHD} = \widehat{V96}$, $\widehat{NIC} = \widehat{YZ5}$, $\widehat{RMB} = \widehat{XT4}$. D'ailleurs, tous les arcs de la première courbe, FH, HI, IM, MA sont respectivement égaux aux arcs de la seconde, 89, 9Z, ZI, T3, et l'inclinaison de ces arcs est constamment la même de part et d'autre (car l'inclinaison des courbes est mesurée par celle des tangentes qui font toujours, comme nous l'avons prouvé, des angles égaux dans les deux figures). Donc les courbes AMIFH, 3TZ98 sont non seulement égales entre elles, mais

encore semblables, et si on imagine qu'on les superpose, elles coïncideront entièrement, et auront donc, aussi bien que leurs axes, leurs ordonnées égales ou plutôt identiques. C'est le second point qu'il fallait démontrer.

Proposition II.

Soient (*fig.* 135) *deux paraboles de même nature* AOD, XIG, *d'axes* AC, XF, *de demi-bases* DC, GF; soit par exemple : $\frac{DC^3}{BO^3} = \frac{CA^2}{BA^2}$, et de même $\frac{GF^3}{IY^3} = \frac{FX^2}{YX^2}$; nous restons ainsi sur notre parabole, quoique la proposition soit générale. *Si les axes sont proportionnels aux demi-*

Fig. 135 (2).



bases, c'est-à-dire si $\frac{CA}{DC} = \frac{XF}{GF}$, *je dis que ces deux paraboles sont dans le rapport de leurs axes ou bien de leurs demi-bases*, c'est-à-dire que

$$\frac{\text{courbe AOD}}{\text{courbe XIG}} = \frac{AC}{XF} \text{ ou bien } = \frac{CD}{GF},$$

ces deux derniers rapports étant égaux par supposition.

La démonstration est facile. Je partage chaque axe en un même nombre quelconque de segments, soit deux seulement pour éviter la confusion et la prolixité. Soit donc B le milieu de l'axe AC, Y celui de l'axe FX; je mène les ordonnées BO, YI, puis en D, O, les tangentes DN, OM, dont la première rencontre en E l'ordonnée BO, la seconde en V la parallèle AV aux ordonnées; de même sur l'autre figure, je mène aux points G, I les tangentes GK, IS, qui rencontrent en H, R l'ordonnée YI et la parallèle XR.

Par supposition, $\frac{DC}{CA} = \frac{GF}{FX}$; d'autre part, d'après la nature de la parabole, $\frac{CA}{\text{sous-tang. CN}} = \frac{2}{3}$, et $\frac{FX}{\text{sous-tang. FK}} = \frac{2}{3}$; donc $\frac{DC}{CN} = \frac{GF}{FK}$; donc les triangles DNC, GKF sont semblables; donc $\frac{DN}{NC} = \frac{GK}{KF}$. Mais $\frac{DN}{NC} = \frac{DE}{CB}$ et $\frac{GK}{KF} = \frac{GH}{FY}$; donc $\frac{DE}{CB} = \frac{GH}{FY}$.

On prouvera de même que $\frac{OV}{BA} = \frac{IR}{XY}$.

Les segments de l'axe, AB, BC d'une part, XY, YF de l'autre, étant égaux entre eux, en sommant les segments de tangentes, on aura

$$\frac{DE + OV}{AC} = \frac{GH + IR}{XF}.$$

Mais la somme des segments, DE + OV, dont on peut multiplier le nombre autant qu'on le voudra, représente, par la réduction à l'impossible, comme on l'a déjà indiqué et prouvé, la courbe totale DOA; de même la somme GH + IR, dont on peut aussi multiplier le nombre des termes à volonté, représente la courbe totale GIX. Donc

$$\frac{\text{courbe DOA}}{\text{axe AC}} = \frac{\text{courbe GIX}}{\text{axe XF}};$$

vicissim et convertendo :

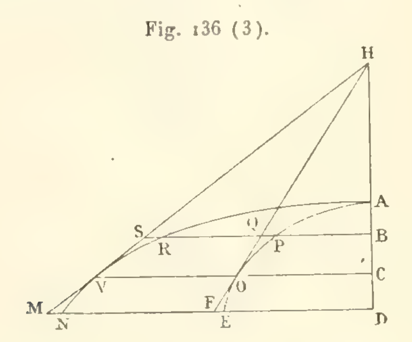
$$\frac{\text{axe AC}}{\text{axe XF}} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{base DC}}{\text{base GF}} = \frac{\text{courbe DOA}}{\text{courbe GIX}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Proposition III.

Soit (*fig.* 136) AO *une courbe d'axe* AC, *de base* CO; *imaginons formée sur elle une courbe de même axe et de même sommet, dont les ordonnées soient proportionnelles à celles de la première courbe*, c'est-à-dire $\frac{\text{base CO}}{\text{base CV}} = \frac{\text{BP ordonnée de la 1}^{re}}{\text{BR ordonnée de la 2}^{e}} = \frac{DE}{DN}$, etc., indéfiniment. *Si en un point quelconque* O *de la première courbe, on mène la tangente* OH *rencontrant l'axe en* H, *et que l'on prolonge* CO *jusqu'à la rencontre de la seconde courbe en* V, *je dis que la droite qui joint* V, H *est tangente*

à la seconde courbe, et que les tangentes qui se correspondent sur les deux courbes coupent toujours l'axe au même point.

Fig. 136 (3).



En effet, menons les ordonnées BPR, DEN, rencontrant les courbes en P, R, E, N et les droites OH, VH ou leurs prolongements en Q, S, F, M. Si nous prouvons que BS, menée au-dessus de CV, est toujours plus grande que BR, et que DM, menée au-dessous, est aussi plus grande que l'ordonnée DN, il sera clair que la droite MVSH est tangente à la seconde courbe en V.

Or, par construction, $\frac{CO}{CV} = \frac{BP}{BR}$, et, en raison du parallélisme des droites COV, BQS, que coupent les trois droites CH, OH, VH, issues d'un même point, $\frac{CO}{CV} = \frac{BQ}{BS}$; donc $\frac{BP}{BR} = \frac{BQ}{BS}$; *vicissim* $\frac{BP}{BQ} = \frac{BR}{BS}$.

Mais, OQH étant tangente à la première courbe en O, $BQ > BP$; donc $BS > BR$. Ce qu'il fallait prouver en premier lieu.

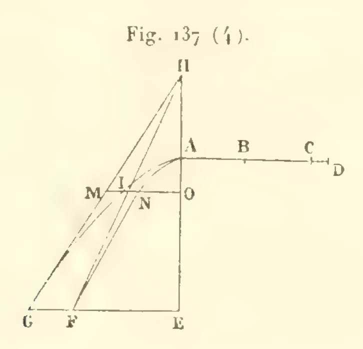
La démonstration est la même pour l'ordonnée menée plus bas. En effet, on suppose $\frac{CO}{CV} = \frac{DE}{DN}$; d'autre part, à cause des parallèles, $\frac{CO}{CV} = \frac{DF}{DM}$; donc $\frac{DE}{DN} = \frac{DF}{DM}$. Mais $DE < DF$; donc $DN < DM$. Donc MVSH est tangente en V à la seconde courbe.

Lemme pour ce qui suit.

Soit (*fig.* 137) notre parabole GIA, d'axe AE, de demi-base EFG, de tangente GH. Construisons sur le même axe AE une autre parabole FNA, telle que l'on ait pour la demi-base : $EF^2 = \frac{1}{2}EG^2$, et de

même pour les ordonnées quelconques : $NO^2 = \frac{1}{2}OI^2$. Soient AD le paramètre de la première parabole GIA, CD sa neuvième partie, B le milieu du reste. Je mène en F la tangente FH à la seconde parabole; elle rencontre l'axe au même point H que la tangente à la première,

Fig. 137 (1).



d'après la proposition précédente, ou bien d'après la nature de ces paraboles, puisque l'on a pour l'une et pour l'autre : $\frac{EA}{EH} = \frac{2}{3}$. Je dis que $\frac{FE^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{2}AB}{EG}$.

En effet, d'après la proposition III de la Dissertation, $\frac{GE^2}{EH^2} = \frac{AB}{EG}$. Prenant la moitié des antécédents, comme $\frac{1}{2}GE^2 = EF^2$ par supposition, $\frac{EF^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{2}AB}{GE}$.

Nous prouverons de même que, si $FE^2 = \frac{1}{3}GE^2$, $\frac{FE^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{3}AB}{EG}$. De même pour les rapports des carrés : $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc. à l'infini.

Puisque, pour le rapport $\frac{1}{2}$, nous avons prouvé que $\frac{EF^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{2}AB}{GE}$, *componendo*, $\frac{(FE^2 + EH^2)\,(= FH^2)}{EH^2} = \frac{\frac{1}{2}AB + GE}{GE}$. Si $EF^2 = \frac{1}{3}GE^2$, on aura $\frac{FH^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{3}AB + GE}{GE}$; si $EF^2 = \frac{1}{4}GE^2$, on aura $\frac{FH^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{4}AB + EG}{EG}$; et ainsi de suite indéfiniment, cette relation ayant d'ailleurs lieu pour toute ordonnée.

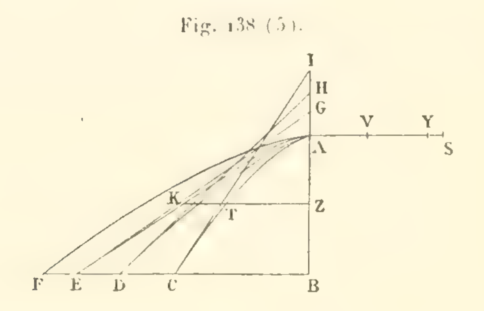
Proposition IV.

Cela posé, nous découvrons sans difficulté le théorème général.

Soient (*fig.* 138) notre parabole AC, AB son axe, BC la demi-base; soient formées sur elle les autres courbes en nombre infini AD, AE,

AF, telles que, si l'on mène une ordonnée quelconque BCDEF, BD soit toujours égale à la première courbe CA, BE à la seconde AD, BF

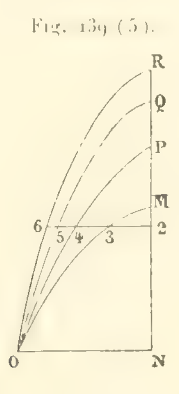
Fig. 138 (5).



à la troisième AE, et qu'il en soit de même pour toutes les courbes et toutes les ordonnées. Je dis que chacune de ces courbes AD, AE, AF, etc. à l'infini, èst toujours égale à une droite donnée, de même que cela a lieu pour les courbes que dans la Dissertation nous avons construites du côté de la base par un procédé analogue.

Voici le théorème général : Soit construite à part (*fig.* 139) la parabole O3M absolument égale et semblable à la parabole AC, ayant par

Fig. 139 (5).



conséquent son axe $MN = AB$, sa demi-base $ON = BC$; c'est seulement pour éviter la confusion que nous faisons une figure à part. Soit $NP^2 = 2NM^2$, $NQ^2 = 3NM^2$, $NR^2 = 4NM^2$, et ainsi de suite indéfiniment. La demi-base ON restant la même, je construis, par les sommets P, Q, R, des paraboles de même nature que la parabole O3M ou AC; soient O4P, O5Q, O6R, etc. ces paraboles.

Je dis que la parabole O4P = courbe AD, que la parabole O5Q = courbe AE, que la parabole O6R = courbe AF; et ainsi de suite indéfiniment.

Comme, en effet, dans nos paraboles O4P, O5Q, O6R, si l'on mène l'ordonnée 23456, on a toujours, d'après la nature de ces paraboles,

$$\frac{ON^3}{(42)^3} = \frac{NP^2}{(P2)^2}, \qquad \frac{ON^3}{(52)^3} = \frac{NQ^2}{(Q2)^2}, \qquad \frac{ON^3}{(62)^3} = \frac{NR^2}{(R2)^2},$$

il est clair, d'après ce qui a été démontré dans la Dissertation, que chacune de ces paraboles est égale à une droite donnée; par suite, notre théorème général une fois démontré, il s'ensuivra que chacune des courbes AD, AE, AF est égale à une droite donnée.

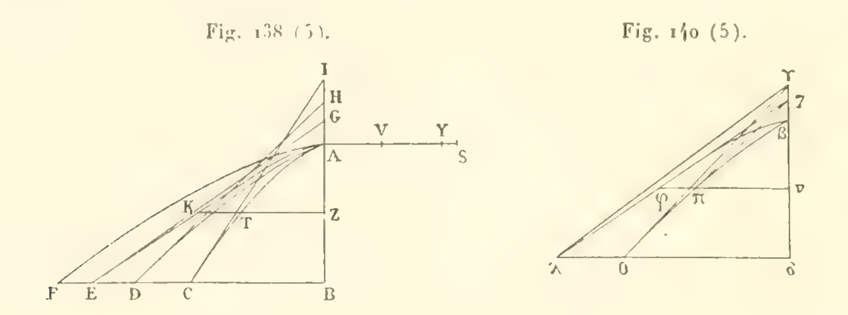
Voici la démonstration du théorème général : Soient AS le paramètre de notre parabole, SY son neuvième, V le milieu du reste. Aux points C, D, E, je mène aux nouvelles courbes les tangentes CI, DH, EG, qui rencontrent l'axe aux points I, H, G. D'après ce qui a été démontré dans la Dissertation (prop. III) : $\frac{BC^2}{BI^2} = \frac{AV}{BC}$; *componendo :* $\frac{CI^2}{BI^2} = \frac{AV + BC}{BC}$. Mais, d'après la Dissertation (prop. VI) : $\frac{CI^2}{BI^2} = \frac{BD^2}{BH^2}$, BH étant la sous-tangente de DH; donc $\frac{BD^2}{BH^2} = \frac{AV + BC}{BC}$; *componendo :* $\frac{DH^2}{BH^2} = \frac{AV + 2BC}{BC}$. Mais, d'après la même proposition, $\frac{DH^2}{HB^2} = \frac{BE^2}{BG^2}$, BG étant la sous-tangente de EG; donc $\frac{BE^2}{BG^2} = \frac{AV + 2BC}{BC}$.

Nous prouverons de même que, si l'on mène à la courbe EA l'ordonnée ZTK, coupant en T la courbe CA, et que l'on imagine au point K la tangente à la courbe AKE : $\frac{KZ^2}{(\text{sous-tangente de K})^2} = \frac{AV + 2ZT}{ZT}$, et cela, quel que soit le point K.

Soit tracée (*fig.* 140) sur une figure à part, pour éviter la confusion, cette même courbe AKE, qui sera désignée dans cette figure nouvelle par $\beta\varphi\lambda$. Soient donc la base $\lambda\delta = EB$, la tangente $\lambda\gamma = EG$, l'axe $\delta\beta = BA$, la sous-tangente $\delta\gamma = BG$, l'ordonnée $\nu\varphi = ZK$. De

cette courbe $\lambda\varphi\beta$, j'en forme une moindre $\theta\pi\beta$, telle que les carrés de ses ordonnées soient moitié des carrés des ordonnées de la première courbe; ainsi $\delta\theta^2 = \frac{1}{2}\delta\lambda^2$, $\nu\pi^2 = \frac{1}{2}\nu\varphi^2$, etc. Je mène à cette nouvelle courbe les tangentes $\theta\gamma$, $\pi 7$, aux points θ, π.

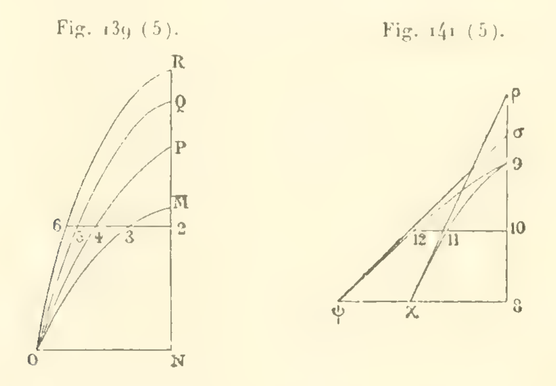
Fig. 138 (5). Fig. 140 (5).



D'après la proposition III ci-dessus, il est clair que les tangentes $\theta\gamma$, $\lambda\gamma$ rencontrent l'axe au même point γ; de même les tangentes en φ, π rencontrent l'axe au même point 7, puisque les ordonnées des deux courbes sont en rapport constant.

Je trace encore à part (*fig.* 141) une parabole de même nature que OM, OP, etc., d'axe $98 = MN = AB = \beta\delta$; de demi-base $\theta\chi = NO\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $BC\sqrt{\frac{1}{2}}$. Soit χ 11 9 cette parabole dont je forme une autre courbe 9 12 ψ, de même axe 9 8, mais dont l'ordonnée $8\psi = \text{arc}\,\chi\,11\,9$; l'ordonnée $10\;11\;12 = \text{arc}\,11\,9$, et de même pour les autres.

Fig. 139 (5). Fig. 141 (5).



Il faut prouver en premier lieu que les courbes $\theta\pi\beta$ et ψ 12 9 sont les mêmes, c'est-à-dire absolument égales et semblables. Voici com-

ment. Nous avons prouvé que $\frac{BE^2}{EG^2}$ ou $\frac{\lambda\delta^2}{\delta\gamma^2} = \frac{AV + 2CB}{CB}$. Prenant la moitié des antécédents, comme nous avons supposé $\theta\delta^2 = \frac{1}{2}\lambda\delta^2$, $\frac{\theta\delta^2}{\delta\gamma^2} = \frac{\frac{1}{2}AV + CB}{CB}$. Nous prouverons de même, pour une autre ordonnée quelconque $\pi\nu$, $\frac{\pi\nu^2}{(\pi 7)^2} = \frac{\frac{1}{2}AV + ZT}{ZT}$, etc.

Il faut maintenant examiner si la courbe $\psi 129$ jouit de la même propriété. Voici comment on y arrivera.

Dans la courbe $\chi 119$, dont la demi-base $\chi 8 = BC\sqrt{\frac{1}{2}}$, et l'axe $89 = AB$, d'après le lemme précédent, si l'on mène les tangentes $\chi\rho$, $\psi\sigma$ aux points χ, ψ : $\frac{(8\chi)^2}{(8\rho)^2} = \frac{\frac{1}{2}AV}{CB}$; *componendo*, $\frac{(\chi\rho)^2}{(8\rho)^2} = \frac{\frac{1}{2}AV + CB}{CB}$.

De même, si l'on suppose la droite $910 = AZ$, c'est-à-dire si les points 10 et Z sont à égale distance du sommet, le rapport du carré de la tangente en 11 au carré de la sous-tangente sera $\frac{\frac{1}{2}AV + ZT}{ZT}$. Mais (prop. VI) : $\frac{(\chi\rho)^2}{(8\rho)^2} = \frac{(\psi 8)^2}{(8\sigma)^2}$, et de même $\frac{\overline{\text{tang}\, 11}^2}{\overline{\text{sous-tang}\, 11}^2} = \frac{\overline{12\ 10}^2}{\overline{\text{sous-tang}\, 12}^2}$. Donc $\frac{(\psi 8)^2}{(8\sigma)^2} = \frac{\frac{1}{2}AV + BC}{BC}$.

Mais, sur l'autre figure (*fig.* 140), nous avons prouvé que $\frac{\theta\delta^2}{\delta\gamma^2} = \frac{\frac{1}{2}AV + BC}{CB}$; donc, dans les deux courbes $\psi 129$, $\theta\pi\beta$, $\frac{\psi 8}{8\sigma} = \frac{\theta\delta}{\delta\gamma}$.

La même relation aura lieu pour tous les autres points; on prouvera de même, par exemple, que $\frac{10\ 12}{\text{sous-tang}\, 12} = \frac{\pi\nu}{\nu 7}$, etc.

Donc (*Appendice*, prop. I) les courbes 912ψ, $\theta\pi\beta$ ayant même axe et leurs ordonnées étant aux sous-tangentes constamment dans le même rapport que leurs correspondantes de l'une à l'autre courbe, ces courbes seront égales entre elles ainsi que leurs demi-bases et les ordonnées à égale distance des sommets.

Mais, par construction, la demi-base $\psi 8 = \widehat{\chi 119}$; donc $\widehat{\chi 119} = \theta\delta$. Mais $\theta\delta = \delta\lambda\sqrt{\frac{1}{2}}$; donc la courbe parabolique $\chi 119 = \delta\lambda\sqrt{\frac{1}{2}}$. Mais $\delta\lambda = BE$ et, dans la construction des courbes dérivées de la première AC, on suppose $BE = \widehat{AD}$.

Donc parab. $\chi\,119 = \sqrt{\frac{1}{2}}\,\widehat{AD}$. Mais on a aussi $\widehat{\chi\,119} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,\widehat{O\,4\,P}$, car la base $\chi\,8 = \sqrt{\frac{1}{2}}\,BC = \sqrt{\frac{1}{2}}\,NO$, et l'axe $89 = AB = NM = \sqrt{\frac{1}{2}}\,NP$. Les paraboles O 4 P, $\chi\,119$ étant de même nature, et l'axe et la base de la parabole $\chi\,119$ étant respectivement dans le rapport $\sqrt{\frac{1}{2}}$ avec l'axe et la base de la parabole O 4 P, on aura aussi (*Appendice*, prop. II) parab. $\chi\,119 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ parab. O 4 P. Puisque nous avons ainsi prouvé que la parabole $\chi\,119$ est dans le rapport $\sqrt{\frac{1}{2}}$, soit avec la parabole O 4 P, soit avec la courbe AD, la courbe AD et la parabole O 4 P seront égales. C. Q. F. D.

On prouvera de même que la courbe AE et la parabole O 5 P sont égales.

En effet, $\frac{BE^2}{BG^2} = \frac{AV + 2BC}{BC}$, comme il a été démontré; *componendo* etc., $\frac{EG^2}{BG^2} = \frac{AV + 3BC}{BC}$. Mais (*Dissertation*, prop. VI): $\frac{EG^2}{BG^2} = \frac{BF^2}{(\text{sous-tang } F)^2}$; donc $\frac{BF^2}{(\text{sous-tang } F)^2} = \frac{AV + 3BC}{BC}$.

Pour la suite, nous suivrons de point en point la démonstration précédente, sauf que dans la figure à part (*fig.* 140), après avoir pris $\lambda\delta = BF$, on prendra $\delta\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}\,BF$ ou $\sqrt{\frac{1}{3}}\,\delta\lambda$; la courbe $\lambda\varphi\beta$ sera égale à la courbe FA, et $\theta\pi\beta$ sera de telle sorte que ses ordonnées suivent le rapport des bases $\frac{\lambda\delta}{\theta\delta}$.

Dans l'autre figure à part (*fig.* 141), où sont les courbes 911χ, 912ψ, on prendra comme ci-dessus $98 = NM = AB = \beta\delta$, mais ensuite la base $8\chi = \sqrt{\frac{1}{3}}\,ON = \sqrt{\frac{1}{3}}\,CB$. La parabole $\chi\,119$ sera de même nature que les paraboles CTA ou O 3 M. On en formera la courbe $\psi\,129$ dont les ordonnées 8ψ, 10 12 seront, comme ci-dessus, égales aux arcs $\chi\,9$, 11 9, et on prouvera, comme ci-dessus, que les courbes $\beta\pi\theta$, 911χ sont égales et semblables, c'est-à-dire identiques.

On conclura l'égalité des bases $\theta\delta$, $\psi\,8$; par suite la base $\psi\,8$ ou la courbe $911\chi = \sqrt{\frac{1}{3}}\,\delta\lambda = \sqrt{\frac{1}{3}}\,BF = \sqrt{\frac{1}{3}}$ courbe AE. Mais on aura démontré précédemment que parab. $\chi\,119 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ parab. O 5 Q. Donc la courbe AE et la parabole O 5 Q seront égales.

On emploiera le même raisonnement pour les cas subséquents, et l'on établira ainsi la vérité générale du théorème.

Qui aura lu attentivement la Dissertation précédente et cet Appendice reconnaîtra aussitôt les principaux fondements de notre méthode et verra qu'on en déduit très facilement la mesure des courbes.

SUR LA TRANSFORMATION

ET LA

SIMPLIFICATION DES ÉQUATIONS DE LIEUX,

POUR LA COMPARAISON SOUS TOUTES LES FORMES

DES AIRES CURVILIGNES, SOIT ENTRE ELLES, SOIT AVEC LES RECTILIGNES,

ET EN MÊME TEMPS

SUR L'EMPLOI DE LA PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE

POUR LA QUADRATURE DES PARABOLES ET HYPERBOLES A L'INFINI.

Archimède n'a employé la progression géométrique que pour la seule quadrature de la parabole; dans ses autres comparaisons entre quantités hétérogènes, il s'est borné à la seule progression arithmétique. Est-ce parce qu'il avait trouvé que la progression géométrique se prêtait moins bien à la quadrature? Est-ce parce que l'artifice particulier dont il s'est servi pour carrer avec cette progression la première parabole peut difficilement s'appliquer aux autres? Quoi qu'il en soit, j'ai reconnu et éprouvé cette progression comme très féconde en quadratures, et je communique volontiers aux géomètres modernes mon invention qui permet de carrer, par une méthode absolument identique, et paraboles et hyperboles.

Toute cette méthode dérive d'une seule propriété bien connue de la progression géométrique, c'est-à-dire du théorème suivant :

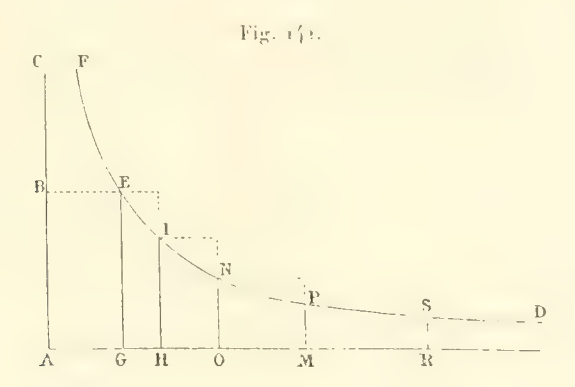
Étant donnée une progression géométrique dont les termes décroissent indéfiniment, la différence des deux termes de la raison de cette progres-

sion est au plus petit des deux comme le plus grand de tous les termes de la progression est à la somme de tous les autres jusqu'à l'infini (¹).

Cela posé, soit d'abord proposée la quadrature des hyperboles :

Je définis hyperboles des courbes d'espèces variant à l'infini, qui, comme DSEF (*fig.* 142), ont cette propriété que, si l'on suppose, sous

Fig. 142.



un angle donné quelconque RAC, les asymptotes RA, AC que l'on peut prolonger indéfiniment comme la courbe elle-même, et que si l'on mène parallèlement à l'une des asymptotes et comme on le voudra les droites GE, HI, ON, MP, RS, etc., on aura toujours le même rapport entre une puissance déterminée de AH et la même puissance de AG d'une part, et une puissance de GE (semblable ou différente par rapport à la précédente) et la même puissance de HI, d'autre part. J'entends par puissances, non seulement les carrés, cubes, bicarrés, etc., dont les exposants sont 2, 3, 4, etc., mais aussi les racines simples dont l'exposant est 1.

Je dis que toutes ces hyperboles à l'infini, sauf une seule, celle d'Apollonius ou la première, peuvent être carrées au moyen d'une progression géométrique par une méthode uniforme et constante.

Soit par exemple l'hyperbole dont la propriété est définie par l'éga-

(¹) Soit S la somme des termes d'une progression géométrique décroissant indéfiniment dont le plus grand terme est a, et la raison $q = \frac{a}{e}$; comme $q < 1$, $e > a$. Fermat énonce la relation $\frac{e-a}{a} = \frac{a}{S-a}$; d'où l'on tire immédiatement $S = a\frac{e}{e-a} = \frac{a}{1-q}$.

lité constante des rapports $\frac{HA^2}{AG^2} = \frac{GE}{HI}$ et $\frac{OA^2}{AH^2} = \frac{HI}{ON}$, etc. Je dis que l'espace indéfini qui a pour base GE et qui est limité d'un côté par la courbe ES, de l'autre par l'asymptote indéfinie GOR, est égal à une aire rectiligne donnée.

Imaginons les termes d'une progression géométrique décroissant indéfiniment; soient AG le premier, AH le second, AO le troisième, etc. Supposons que ces termes soient assez rapprochés les uns des autres pour que, suivant la méthode d'Archimède, on puisse *adégaler*, comme dit Diophante, ou égaler par approximation le parallélogramme rectiligne $GE \times GH$ au quadrilatère mixtiligne GHIE; nous supposerons de plus que les premiers intervalles GH, HO, OM, etc. des termes progressifs soient suffisamment égaux entre eux, pour que l'on puisse facilement employer la méthode d'Archimède de réduction à l'impossible, par circonscriptions et inscriptions. Il suffit de faire cette remarque une fois pour ne pas s'obliger à revenir et à insister constamment sur un artifice bien connu de tous les géomètres.

Cela posé, puisque $\frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AO} = \frac{AO}{AM}$, on aura aussi $\frac{AG}{AH} = \frac{GH}{HO} = \frac{HO}{OM}$, pour les intervalles. Mais, pour les parallélogrammes,

$$\frac{EG \times GH}{HI \times HO} = \frac{HI \times HO}{NO \times OM};$$

en effet, le rapport des parallélogrammes $\frac{GE \times GH}{HI \times HO}$ est composé des rapports $\frac{GE}{HI}$ et $\frac{GH}{HO}$; mais, comme nous l'avons indiqué, $\frac{GH}{HO} = \frac{AG}{AH}$; donc le rapport $\frac{EG \times GH}{HI \times HO}$ est composé des rapports $\frac{GE}{HI}$ et $\frac{AG}{AH}$. D'autre part, par construction, $\frac{GE}{HI} = \frac{HA^2}{GA^2}$ ou $\frac{AO}{GA}$, par suite de la proportionnalité des termes; donc le rapport $\frac{EG \times GH}{HI \times GO}$ est composé des rapports $\frac{AO}{AG}$ et $\frac{AG}{AH}$; mais $\frac{AO}{AH}$ est composé des mêmes rapports; on aura donc pour le rapport des parallélogrammes : $\frac{GE \times GH}{HI \times HO} = \frac{OA}{AH} = \frac{HA}{AG}$.

On prouvera de même que $\frac{HI \times HO}{ON \times OM} = \frac{AO}{HA}$.

Mais les droites AO, HA, GA qui constituent les rapports des parallélogrammes, forment, par construction, une proportion géométrique; donc les parallélogrammes en nombre indéfini $GE \times GH$, $HI \times HO$, $ON \times NM$, etc. formeront une progression géométrique continue dont la raison sera $\frac{HA}{AG}$. Par suite, selon le théorème constitutif de notre méthode, GH, différence des deux termes de la raison, sera au plus petit terme GA, comme le premier terme de la progression des parallélogrammes, c'est-à-dire comme le parallélogramme $EG \times GH$, à la somme de tous les autres parallélogrammes en nombre indéfini, ou autrement, suivant l'*adéquation* d'Archimède, à la figure limitée par HI, par l'asymptote HR et la courbe IND prolongée indéfiniment.

Mais, si l'on multiplie les deux termes par GE, $\frac{HG}{GA} = \frac{GE \times GH}{GE \times GA}$; donc $GE \times GH$ est à cette figure indéfinie dont la base est HI comme $GE \times GH$ est à $GE \times GA$. Donc le parallélogramme $GE \times GA$, qui est une aire rectiligne donnée, est *adégal* à la figure précitée; si l'on ajoute de part et d'autre le parallélogramme $GE \times GH$, qui, par suite des divisions indéfiniment poursuivies, s'évanouira et se réduira à rien, on arrive à cette vérité qu'il serait facile de confirmer par une démonstration plus prolixe, menée à la façon d'Archimède : que dans ce genre d'hyperbole, le parallélogramme AE est équivalent à la figure comprise sous la base GE, l'asymptote GR et la courbe ED indéfiniment prolongée.

Il est facile d'étendre cette invention à toutes les hyperboles définies ci-dessus, sauf la seule exception que nous avons indiquée. Soit en effet une autre hyperbole ayant pour propriété que $\frac{GE}{HI} = \frac{HA^3}{GA^3}$, etc. pour les autres ordonnées.

Prenons, comme ci-dessus, une série indéfinie de termes en progression; on démontrera de même que les parallélogrammes EH, IO, MN, etc. forment de même une progression indéfinie; mais, dans ce cas, le rapport du premier parallélogramme au second, du second au

troisième, etc. sera $\frac{AO}{GA}$, ce que montrera immédiatement la composition des rapports. Donc le parallélogramme EH sera à la figure comme OG à GA, ou, en multipliant les termes par GE, comme OG × GE à GE × GA : *vicissim* OG × GE est à EH ou GE × GH comme GE × GA à la figure. Mais $\frac{OG \times GE}{HG \times GE} = \frac{OG}{GH}$ ou $\frac{2}{1}$ par *adéquation;* car les intervalles voisins de la base sont, par construction, sensiblement égaux entre eux. Donc, dans cette hyperbole, le parallélogramme EGA, qui est égal à une aire rectiligne donnée, sera le double de la figure comprise sous la base GE, l'asymptote GR et la courbe ESD indéfiniment prolongée.

La démonstration sera la même dans tous les autres cas; il n'y a que pour la première hyperbole, c'est-à-dire la simple ou celle d'Apollonius, que la méthode est en défaut. La raison en est que les parallélogrammes EH, IO, NM y sont toujours égaux; les termes constitutifs de la progression, étant dès lors égaux entre eux, ne donnent aucune différence, et c'est précisément la différence qui fait tout le mystère de cette affaire.

Je n'ajoute pas la démonstration que, dans l'hyperbole commune, les parallélogrammes en question sont toujours égaux; la chose se voit immédiatement et dérive aussitôt de cette propriété de l'espèce que l'on a toujours $\frac{GE}{HI} = \frac{HA}{GA}$.

Le même moyen carre toutes les paraboles sans qu'il y en ait cette fois une seule qui, comme pour les hyperboles, échappe à notre méthode.

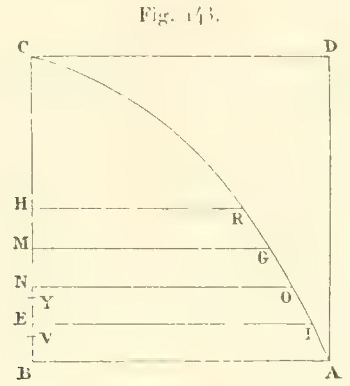
Je ne donnerai qu'un exemple, celui de la première parabole, celle d'Apollonius; sur ce modèle, on pourra faire toutes les démonstrations pour les paraboles quelconques à l'infini.

Soit AGRC une semi-parabole première (*fig.* 143), de diamètre CB, de demi-base AB. Si l'on prend les ordonnées IE, ON, GM, etc., on a toujours $\frac{AB^2}{IE^2} = \frac{BC}{CE}$, $\frac{IE^2}{ON^2} = \frac{EC}{CN}$, etc. à l'infini, d'après la propriété spécifique de la parabole d'Apollonius.

D'après la méthode, imaginons les droites BC, EC, NC, MC, HC, etc.,

formant une progression indéfinie. Les parallélogrammes AE, IN, OM, GH formeront aussi, comme on l'a prouvé ci-dessus, une progression indéfinie.

Fig. 143.



Pour connaître le rapport des parallélogrammes AE, IN, il faut, d'après la méthode, recourir à la composition des rapports.

Or le rapport des parallélogrammes AE et IN est composé des rapports $\frac{AB}{IE}$ et $\frac{BE}{EN}$. Mais, puisque $\frac{AB^2}{IE^2} = \frac{BC}{CE}$, si entre BC et CE on prend la moyenne proportionnelle CV, de même entre EC et NC la moyenne proportionnelle YC, les droites BC, VC, EC, YC, NC formeront une progression géométrique, et l'on aura $\frac{BC}{EC} = \frac{BC^2}{VC^2}$; donc, puisque $\frac{BC}{EC} = \frac{AB^2}{EI^2}$, $\frac{AB}{IE} = \frac{BC}{VC}$. Par conséquent, le rapport des parallélogrammes $\frac{AE}{IN}$ est composé du rapport $\frac{BC}{VC}$ ou $\frac{VC}{CE}$ ou $\frac{EC}{YC}$ et du rapport $\frac{BE}{EN}$ ou, comme on l'a prouvé plus haut, $\frac{BC}{CE}$; mais un rapport composé des deux $\frac{BC}{CE}$ et $\frac{EC}{CY}$ est égal au rapport $\frac{BC}{CY}$; donc le rapport des parallélogrammes $\frac{AE}{IN} = \frac{BC}{YC}$, et par conséquent, d'après le théorème constitutif de notre méthode, le rapport du parallélogramme AE à la figure IRCHE est $\frac{BY}{YC}$ et celui du même parallélogramme AE à la figure totale AIGRCB est $\frac{BY}{BC}$, BC étant le diamètre total. Mais, si l'on multiplie de part et

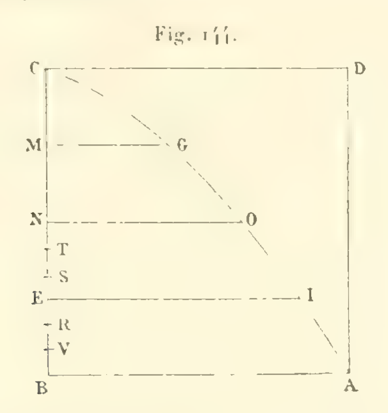
d'autre par AB, $\frac{BY}{BC} = \frac{AB \times BY}{AB \times BC}$; or $AB \times BC$ est le parallélogramme BD, obtenu en menant AD parallèle au diamètre et en la prolongeant jusqu'à la rencontre en D avec la tangente CD; donc le rapport du parallélogramme AE à la figure semi-parabolique ARCB est le même que celui des parallélogrammes $AB \times BY$ et BD; donc $\frac{AE}{AB \times BY} = \frac{ARCB}{BD}$. Mais AE ayant AB pour côté, $\frac{AE}{AB \times BY} = \frac{BE}{BY}$; donc $\frac{BE}{BY} = \frac{ARCB}{BD}$, ou *convertendo*, $\frac{BD}{ARCD} = \frac{BY}{BE}$. Mais, à cause de l'*adégalité* des droites BY, YE, EY, différences des termes de la progression, mais supposées sensiblement égales par suite de la division en un très grand nombre de parties très petites, $\frac{BY}{BE} = \frac{3}{2}$. Le rapport du parallélogramme BD à la figure est donc le rapport de 3 à 2, ce qui est d'accord avec la quadrature de la parabole donnée par Archimède, quoiqu'il se soit autrement servi de la progression géométrique. Si d'ailleurs j'ai trouvé nécessaire de changer sa méthode et de prendre une autre voie que la sienne, c'est que je suis assuré qu'en suivant exactement les traces de ce grand géomètre, on reconnaîtra que l'emploi de la progression géométrique est stérile pour la quadrature des autres paraboles en nombre indéfini, tandis que pour toutes ces paraboles sans exception la démonstration et les règles générales sont immédiatement données par notre procédé.

Soient, pour ne pas laisser lieu au doute, AIGC (*fig.* 144) la parabole dont j'ai parlé dans ma *Dissertation sur la comparaison des lignes courbes avec les lignes droites*, AB sa base, BC son diamètre, IE, IC ses ordonnées telles que l'on ait $\frac{AB^3}{IE^3} = \frac{BC^2}{EC^2}$. Qu'on imagine le reste de la construction comme ci-dessus, c'est-à-dire la progression indéfinie des droites BC, EC, NC, MC, etc. et celle des parallélogrammes AE, IN, OM, etc.

Prenez entre BC et EC les deux moyennes proportionnelles VC, RC; de même, entre EC et CN, les deux moyennes proportionnelles SC, TC.

Comme, par construction, $\frac{BC}{EC} = \frac{EC}{NC}$, les lignes BC, VC, RC, EC, SC, TC, NC seront en progression.

Fig. 144.



D'ailleurs $\frac{AB^3}{IE^3} = \frac{BC^2}{EC^2} = \frac{BC}{NC}$. Mais, dans la progression des sept proportionnelles BC, VC, RC, EC, SC, TC, NC, la première, la troisième, la cinquième et la septième forment aussi une progression continue.

Donc $::$ BC : RC : SC : NC, et en prenant le premier, le second et le quatrième terme de cette nouvelle progression, $\frac{BC}{NC} = \frac{BC^3}{RC^3}$; mais nous avons prouvé que $\frac{BC}{NC} = \frac{AB^3}{IE^3}$; donc $\frac{AB^3}{IE^3} = \frac{BC^3}{RC^3}$, d'où $\frac{AB}{IE} = \frac{BC}{RC}$.

Mais le rapport des parallélogrammes $\frac{AE}{IN} = \frac{AB}{IE} \times \frac{BE}{EN}$ ou $\frac{BC}{RC} \times \frac{BC}{EC}$ $\left(\text{puisque d'ailleurs } \frac{BE}{EN} = \frac{BC}{EC}\right)$.

D'autre part, dans les sept proportionnelles, en prenant la première, la troisième, la quatrième et la sixième, on a $\frac{BC}{EC} = \frac{RC}{TC}$; donc $\frac{AE}{IN} = \frac{BC}{RC} \times \frac{RC}{TC} = \frac{BC}{TC}$; donc $\frac{AE}{IGCE} = \frac{BT}{TC}$.

Donc, d'après ce qui a été démontré, le rapport du parallélogramme à la figure : $\frac{AE}{AICB} = \frac{BT}{BC} = \frac{AB \times BT}{AB \times BC}$, en multipliant de part et d'autre par AB; *vicissim* et *convertendo* : $\frac{BD}{AICB} = \frac{AB \times BT}{AB \times BE} = \frac{BT}{BE}$, en raison de la communauté du côté AB. Mais BT comprend *cinq* intervalles : TS, SE, ER, RV, VB qui, à cause de notre méthode logarithmique, sont

censés égaux entre eux; BE en comprend *trois* : ER, RV, VB; donc, dans ce cas, le rapport du parallélogramme BD à la figure est de 5 à 3.

On peut de là tirer facilement une règle universelle. *Il est clair en effet que le rapport du parallélogramme* BD *à la figure* AICB *est toujours égal au rapport de la somme des exposants des puissances de l'ordonnée et de l'abscisse à l'exposant de la puissance de l'ordonnée.* Ainsi, dans cet exemple, la puissance de l'ordonnée AB est le cube, l'exposant 3; celle de l'abscisse est le carré, exposant 2. On doit avoir, ainsi que nous l'avons établi comme règle constante, le rapport de la somme 3 + 2 ou 5 à 3, exposant de l'ordonnée.

Pour les hyperboles, on trouve aussi facilement une règle universelle. *Dans une hyperbole quelconque* (*fig.* 142) *le rapport du parallélogramme* BG *à la figure indéfiniment étendue* RGED *sera égal au rapport de la différence de l'exposant de la puissance de l'ordonnée et de celui de la puissance de l'abscisse à l'exposant de la puissance de l'ordonnée.* Soit, par exemple, $\frac{HA^3}{GA^3} = \frac{GE^2}{HI^2}$; la différence des exposants du cube et du carré, $3 - 2 = 1$; l'exposant de la puissance de l'ordonnée, qui est au carré, est 2. Dans ce cas le rapport du parallélogramme à la figure sera de 1 à 2.

Pour ce qui regarde les centres de gravité et les tangentes des hyperboles et paraboles, leur invention, dérivée de ma *Méthode de maximis et minimis*, a été communiquée aux géomètres modernes, il y a déjà environ vingt ans. Les plus célèbres mathématiciens de la France voudront bien sans doute le faire savoir aux étrangers, afin que dans l'avenir il n'y ait point de doute à cet égard.

Il est remarquable combien le travail des quadratures peut être avancé par la théorie qui précède; car elle permet de carrer facilement une infinité de courbes auxquelles n'ont jamais pensé les géomètres tant anciens que modernes. Nous allons condenser brièvement ces résultats sous certaines règles.

Soit une courbe dont la propriété conduise à l'équation suivante :

$b^2 - a^2 = e^2$ (on voit immédiatement que cette courbe est un cercle).

On peut ramener la puissance de l'inconnue e^2 à une racine par une division (application ou parabolisme). Nous pouvons en effet poser

$$e^2 = bu;$$

car on est libre d'égaler le produit de l'inconnue u par la connue b au carré de l'inconnue e. On aura donc alors

$$b^2 - a^2 = bu.$$

Mais le terme bu peut être décomposé en autant de termes qu'il y en a dans l'autre membre de l'équation, tout en affectant ces termes des mêmes signes que ceux de l'autre membre. Posons donc

$$bu = bi - by,$$

en représentant toujours, comme Viète, les inconnues par des voyelles. Il viendra

$$b^2 - a^2 = bi - by.$$

Égalons chacun des termes d'un membre au correspondant de l'autre. On aura

$$b^2 = bi \quad \text{d'où} \quad i = b \text{ sera donné},$$

$$-a^2 = -by \quad \text{ou} \quad a^2 = by.$$

Le point extrême de la droite y sera sur une parabole primaire. Ainsi, dans ce cas, tout peut être ramené à un carré; si donc on ordonne tous les e^2 sur une ligne droite donnée, leur somme sera un solide rectiligne donné et connu.

Soit maintenant proposée la courbe dont l'équation est

$$a^3 + ba^2 = e^3.$$

Qu'on applique e^3 à une aire donnée, soit par exemple : $e^3 = b^2u$.

La droite u pouvant être composée de plusieurs inconnues, soit

$$a^3 + ba^2 = b^2i + b^2y.$$

Égalons terme à terme, savoir :

$a^3 = b^2i$, on aura une parabole sous un cube et une racine.

$ba^2 = b^2y$, on aura une parabole sous un carré et une racine, c'est-à-dire primaire.

Or ces deux paraboles sont carrables; donc la somme des e^3 ordonnés sur une droite donnée formera un *bi-plan* qu'on pourra facilement égaler à des quantités rectilignes du même degré.

S'il y a dans l'équation un plus grand nombre de termes, aussi bien que s'ils sont composés avec différentes puissances de l'une ou de l'autre inconnue, ils n'en pourront pas moins d'ordinaire être traités par la même méthode, au moyen de réductions légitimes.

Il est donc clair que si dans la première équation : $b^2 - a^2 = e^2$, au lieu de e^2, nous substituons bu, nous pouvons considérer comme un *plan* la somme de tous les u, ordonnés sur une ligne droite, et la carrer. En effet la somme des u n'est autre chose que celle des e^2, divisée par une droite donnée b.

De même dans la seconde équation, la somme des u n'est autre chose que celle des e^3, divisés par le carré donné b^2.

Donc, aussi bien dans le premier que dans le second cas, la somme des u fait une figure égale à une aire rectiligne donnée.

Ces opérations se font par *synérèse* et s'accomplissent, comme il est clair, au moyen de paraboles.

Mais on n'obtient pas moins de quadratures par *diérèse*, au moyen d'hyperboles, soit seules, soit unies à des paraboles.

Soit proposée, par exemple, la courbe ayant pour équation

$$\frac{b^6 + b^5 a + a^6}{a^4} = e^2.$$

On peut de même poser $e^2 = bu$, ou bien, pour avoir de part et d'autre trois termes dans chaque membre de l'équation

$$bu = b\bar{o} + bi + by.$$

Il viendra

$$\frac{b^6 + b^5 a + a^6}{a^4} \quad b\bar{o} + bi + by$$ et, également terme à terme :

1° $\frac{b^6}{a^4} = b\bar{o}$; multipliant par a^4 des deux côtés, $b^6 = a^4 b\bar{o}$; divisant par b; $b^5 = a^4\bar{o}$, équation d'une hyperbole. On sait en effet que les

équations constitutives des hyperboles renferment dans un membre une quantité donnée, dans l'autre le produit de puissances des deux inconnues.

2° $\frac{b^5 a}{a^4}$ ou $\frac{b^5}{a^3} = bi$. Multipliant par a^3 et divisant par b de part et d'autre : $b^4 = a^3 i$, équation d'une hyperbole différente de la précédente.

3° $\frac{a^6}{a^4}$ ou $a^2 = by$; équation d'une parabole.

On voit donc que, dans l'équation proposée, la somme des u ordonnés sur une droite donnée est égale à une aire rectiligne donnée; car la somme de deux hyperboles carrables et d'une parabole donne une aire égale à un rectiligne ou à un carré donné.

Rien n'empêche au reste de diviser séparément, comme on l'a fait, chacun des termes du numérateur par le dénominateur. Le résultat est en effet le même que si l'on divisait en une fois par le dénominateur le numérateur entier composé de trois termes. Cette division séparée permet de comparer facilement chaque terme d'un des membres de l'équation à son corrélatif dans l'autre.

Soit proposé encore : $\frac{b^5 a - b^6}{a^3} = e^3$.

Posons $e^3 = b^2 u$, ou bien, à cause des deux termes du membre corrélatif, $e^3 = b^2 i - b^2 y$. On aura :

1° $\frac{b^5 a}{a^3} = \frac{b^5}{a^2} = b^2 i$; multipliant par a^2 et divisant par b^2, $b^3 = a^2 i$, équation d'une hyperbole carrable.

2° $\frac{b^6}{a^3} = b^2 y$; multipliant par a^3 et divisant par b^2, $b^4 = a^3 y$, équation constitutive d'une hyperbole carrable.

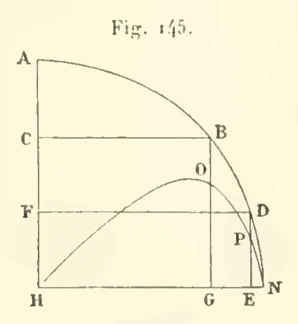
Si donc on revient à la première équation, on aura, dans ce cas, donnée en rectilignes la somme de tous les e^3, ordonnée sur une droite donnée.

Mais rien n'empêche d'aller plus loin dans le travail des quadratures.

Soit (*fig.* 145) une courbe quelconque ABDN, de base HN, de diamètre HA; soient CB, FD les ordonnées sur le diamètre, BG, DE les ordonnées sur la base. Nous supposerons que les ordonnées dé-

croissent constamment de la base au sommet, comme dans la figure : c'est-à-dire HN > FD ; FD > CB, et ainsi de suite.

Fig. 145.



La figure formée par les carrés de HN, FD, CB, ordonnés sur la droite AH, c'est-à-dire le solide $CB^2 \times CA \ldots + FD^2 \times FC \ldots + NH^2 \times HF$, est toujours égale à la figure formée par les rectangles $BG \times GH$, $DE \times EH$ doublés et ordonnés sur la base HN, c'est-à-dire au solide $2BG.GH.GH \ldots + 2DE.EH.EG$, etc., la série des termes de part et d'autre étant supposée indéfinie. Or, pour les autres puissances des ordonnées, la réduction des termes sur le diamètre aux termes sur la base se fait avec la même facilité, et cette observation conduit à la quadrature d'une infinité de courbes inconnues jusqu'ici.

En effet, la somme des cubes de HN, FD, CB, ordonnés de même sur la droite AH, sera égale à celle des produits : $BG.GH^2$, $DE.EH^2$, triplés et ordonnés de même sur la droite HN, c'est-à-dire que le *bi-plan* $CB^3.CA \ldots + DF^3.FC \ldots + HN^3.HF$ sera égal à la somme des *bi-plans* $3(BG.GH^2.HG \ldots + DE.EH^2.EG)$.

De même la somme des bicarrés de HN, FD, CB, ordonnés sur la droite AH, sera égale à *quatre fois* celle des bi-plans $BG.GH^3 \ldots DE.EH^3$, ordonnés de même sur la droite HN.

De là dérivent, comme on va le voir, une infinité de quadratures.

Soit, par exemple, cette courbe ABDN, dont on donne la base HN et le diamètre HA. Appelons analytiquement b le diamètre donné HA, d la base donnée HN, e une ordonnée quelconque FD, a une coordonnée quelconque HF, et soit, par exemple, $b^2 - a^2 = e^2$ l'équation constitutive de la courbe (qui sera un cercle). D'après le théorème général

qui précède, la somme des e^2, ordonnés sur la droite b, est égale à la somme des produits HG.GB, doublés et ordonnés sur la droite HN ou d; mais la somme des e^2, ordonnés sur b, est égale, comme on l'a prouvé plus haut, à un rectiligne donné; donc la somme des produits HG.GB, doublés et ordonnés sur la base d, forme une aire rectiligne donnée; si l'on prend la moitié, la somme des produits HG.GB, ordonnée sur la base d, formera de même une aire rectiligne donnée.

Pour passer facilement, et sans embarras de radicaux, de la première courbe à la nouvelle, nous devons employer un artifice qui est toujours le même, et dans lequel consiste notre méthode.

Soit HE.ED un quelconque des produits à ordonner sur la base; comme nous appelons analytiquement e l'ordonnée FD ou sa parallèle HE, a la coordonnée FH ou sa parallèle DE, nous appellerons ea le produit HE.ED. Égalons ce produit ea, formé de deux droites inconnues et indéterminées, à bu, c'est-à-dire au produit de la donnée b par une inconnue u, et supposons que u soit égale à EP prise sur la même droite que DE; nous aurons $\frac{bu}{e} = a$. Mais, d'après la propriété spécifique de la première courbe : $b^2 - a^2 = e^2$; substituant à a sa nouvelle valeur $\frac{bu}{e}$, il viendra $b^2e^2 - b^2u^2 = e^4$ ou, en transposant, $b^2e^2 - e^4 = b^2u^2$, équation constitutive de la nouvelle courbe HOPN, dérivée de la première, et pour laquelle il est prouvé que la somme des bu ordonnés sur b est donnée. Divisant par b la somme des u ordonnés sur la base, c'est-à-dire la surface HOPN, sera donnée en rectilignes, on aura donc sa quadrature.

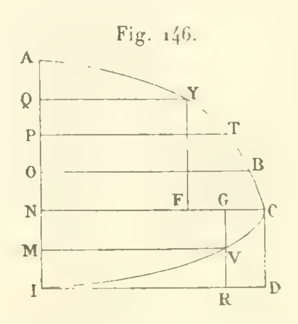
Soit, comme second exemple, $ba^2 - a^3 = e^3$ l'équation constitutive de la première courbe. La somme des e^3 ordonnés sur le diamètre b est donnée, donc la somme des produits $HE^2.ED$ ordonnés sur la base. Mais $HE^2.ED$ est en expression analytique e^2a; égalons ce produit à b^2u, et supposons, comme ci-dessus, $EP = u$. On aura $\frac{b^2u}{e^2} = a$; si donc, au lieu de a, on substitue sa valeur $\frac{b^2u}{e^2}$, et qu'on suive les règles de l'analyse, on aura $b^5u^2e^2 - e^9 = b^6u^3$, équation constitutive de

la nouvelle courbe HOPN dérivée de la première, et pour laquelle la somme des produits $b^2 u$, ordonnés sur la base d, est donnée. Divisant par b^2, la somme des u ordonnés sur la base d sera donnée, donc la quadrature de la figure HOPN. La méthode est générale et s'étend à tous les cas indéfiniment.

Mais il faut remarquer et observer avec soin que, pour les transformations de courbes dont les ordonnées au diamètre décroissent vers la base, les analystes doivent suivre un autre procédé qui diffère du précédent.

Soit (*fig.* 146) la courbe primitive IVCBTYA, de diamètre AI, d'ordonnées MV, NC, OB, PT, QY. Cette courbe est supposée telle que ses

Fig. 146.



ordonnées MV du côté de la base décroissent jusqu'à la base, en sorte que $MV < NC$; que, d'autre part, du côté de A, la courbe s'infléchisse suivant CBYA, en sorte que $CN > BO$, $BO > PT$, $PT > QY$, etc., en sorte que l'ordonnée maxima soit CN.

Si, dans ce cas, nous cherchons la transformation des carrés MV^2, NC^2 en produits sur la base, nous ne les comparerons plus aux produits IR.RV, comme précédemment. Car le théorème général suppose que la somme $MV^2 \ldots + NC^2$ est égale à celle des produits VG.GN, puisque CN, l'ordonnée maxima, peut et doit être regardée comme base par rapport à la courbe dont le sommet est I. Il faut donc, dans une courbe dont les ordonnées décroissent vers la base, comparer les carrés $MV^2 \ldots NC^2$ aux produits GV.GN, c'est-à-dire, pour arriver sur cette figure à une équation analytique : si nous posons $MI = RV = a$, $MV = RI = e$ et $CD = GR = z$ donnée (cette droite menée parallèle-

ment au diamètre par l'extrémité de l'ordonnée maxima est facile à trouver par nos méthodes), on aura $GV.GN = ze - ae$; par suite, la somme des carrés $MV^2 \ldots NC^2$ jusqu'à l'ordonnée maxima sera comparée à la somme des produits $ze - ae$, ordonnés sur la base ID. La somme des autres carrés CN^2, BO^2, PT^2 sera comparée à la somme des produits YF.FN, soit en expression analytique $ae - ze$. Cela établi, on dérivera facilement de la première courbe une nouvelle sur la base; on observera la même règle pour toutes les autres puissances des inconnues.

Pour bien montrer que notre méthode fournit de nouvelles quadratures, dont aucun des modernes n'a encore jamais rien soupçonné, soit proposée la courbe précédente, dont l'équation est

$$\frac{b^5 a - b^6}{a^3} = e^3.$$

Il a été prouvé que la somme des e^3 est donnée en rectilignes. En les transformant sur la base, on aura, d'après la méthode précédente, $\frac{b^2 u}{e^2} = a$; substituant la nouvelle valeur de a, et achevant les calculs suivant les règles, on arrivera à la nouvelle équation $e^3 + u^3 = beu$, qui donne une courbe du côté de la base. C'est celle de Schooten, qui en a donné la construction dans ses *Miscellanea*, section XXV, page 493. La figure courbe AKOGDCH de cet auteur sera donc facilement carrable d'après les règles précédentes.

Il y a également lieu de remarquer que, des courbes dont la somme des puissances des ordonnées se trouve donnée, on peut déduire des courbes facilement carrables, non seulement sur la base, mais aussi sur le diamètre. Supposons, par exemple (*fig.* 145), l'équation constitutive déjà prise $b^2 - a^2 = e^2$; non seulement on en dérivera une nouvelle courbe sur la base ayant pour équation $b^2 e^2 - e^4 = b^2 u^2$, mais encore une nouvelle courbe sur le diamètre en égalant la puissance de l'ordonnée e^2 à un produit bu. Car la somme des produits bu, ordonnés sur le diamètre, sera donnée; donc, en divisant par b la somme des u ordonnés sur le diamètre, on aura la quadrature de la courbe

dérivée de la primitive sur le diamètre, et dont l'équation sera $b^2 - a^2 = bu$. Il est évident que cette nouvelle courbe sur le diamètre est une parabole. Une transformation de cette sorte, non seulement donne des courbes nouvelles dérivées des premières, mais conduit facilement des paraboles aux hyperboles et des hyperboles aux paraboles, comme l'essai le fera voir.

Mais, de même que des courbes où est donnée la somme de puissances des ordonnées, l'analyse précédente dérive des courbes où la somme des ordonnées simples est donnée, de même, de courbes où est donnée la somme des ordonnées, on arrive facilement à des courbes où est donnée la somme des puissances des ordonnées.

Soit, comme exemple, la courbe dont l'équation est $b^2e^2 - e^4 = b^2u^2$, équation où, comme je l'ai établi, la somme des u est donnée. Si l'on pose $u = \frac{ae}{b}$, et qu'on substitue à u sa nouvelle valeur $\frac{ae}{b}$, on aura $b^2e^2 - e^4 = a^2e^2$, et, en divisant tous les termes par e^2, $b^2 - e^2 = a^2$, ou bien $b^2 - a^2 = e^2$. Dans cette nouvelle courbe, qui est un cercle, la somme des e^2 sera donnée.

Si de la première courbe où est donnée la somme des ordonnées, on veut en déduire une nouvelle où soit donnée la somme de leurs cubes, on se servira toujours de la même méthode, mais en prenant des puissances conditionnées des inconnues.

Ainsi, soit proposée la courbe que nous avons plus haut déduite d'une autre et dont l'équation est $b^5u^2e^2 - e^9 = b^6u^3$, et où il est établi que la somme des u, c'est-à-dire des ordonnées, se trouve donnée.

Pour en déduire une nouvelle courbe où la somme des cubes des ordonnées soit donnée, on posera $u = \frac{e^2a}{b^2}$, et on substituera à u sa nouvelle valeur; en opérant conformément aux règles de l'art, on aura l'équation $ba^2 - a^3 = e^3$, qui donnera une courbe où la somme des e^3, c'est-à-dire des cubes des ordonnées, se trouve donnée.

Cette méthode, non seulement conduit à la connaissance d'une infinité de quadratures jusqu'à présent ignorées des géomètres, mais

encore fait découvrir une infinité de courbes dont on obtient les quadratures en supposant celle de courbes plus simples, comme le cercle, l'hyperbole, etc.

Par exemple, dans l'équation du cercle $b^2 - a^2 = e^2$, on a, données en rectilignes, les sommes de toutes les puissances des ordonnées dont l'exposant est pair, carrés, bicarrés, bicubes, etc. Quant à la somme des puissances à exposant impair, comme celles des e^3, e^5, elle n'est donnée en rectilignes que si l'on suppose la quadrature du cercle. Il est facile de démontrer ce que je viens de dire et de le réduire en règle, comme corollaire de la méthode qui précède.

Il arrive aussi souvent que, pour trouver la mesure d'une courbe proposée, il faille réitérer l'opération deux fois ou plus souvent encore.

Soit proposée, par exemple, la courbe déterminée par l'équation suivante :

$$b^3 = a^2 e + b^2 e.$$

Si la somme des e est donnée, ainsi que la droite b, on aura aussi comme donnée celle des rectangles be. En inversant la méthode que nous avons exposée au début de cette Dissertation, posons $be = \overline{o^2}$, d'où $\frac{\overline{o^2}}{b} = e$. Substituant à e sa nouvelle valeur, il viendra

$$b^4 = a^2 \overline{o^2} + b^2 \overline{o^2}.$$

Nous avons là une première opération, inverse de celle indiquée au début de la Dissertation, et qui a conduit à une nouvelle courbe où il reste à chercher si la somme des $\overline{o^2}$ est donnée.

Il faut donc recourir à la seconde méthode qui de la somme des carrés des ordonnées conduit à la somme des ordonnées simples.

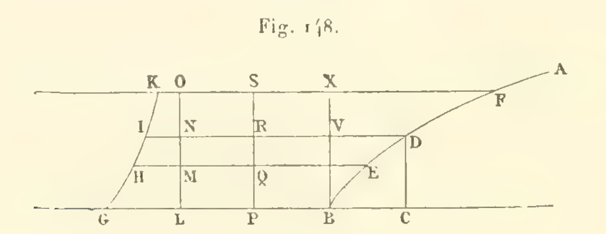
D'après la méthode précédente exposée en seconde ligne, posons $\frac{bu}{o} = a$ et substituons à a la nouvelle valeur que lui assigne cette méthode. Il viendra $b^4 - b^2 \overline{o^2} = b^2 u^2$, et divisant tous les termes par b^2, $b^2 - \overline{o^2} = u^2$, équation du cercle. La somme des u est donc donnée, si l'on suppose la quadrature du cercle.

Si nous remontons à la première courbe : $b^3 = a^2e + b^2e$, il en résulte que l'aire de cette courbe peut être carrée en supposant la quadrature du cercle, et nous sommes facilement et rapidement arrivés à cette conclusion par notre analyse, au moyen de deux courbes différentes de la précédente.

L'utilité de tout ce qui précède sera immédiatement reconnue par un analyste subtil, tant pour l'invention de droites égales à des courbes, que pour nombre d'autres problèmes qui n'ont pas encore été assez approfondis.

Soient (*fig.* 148) AB une parabole primaire, CB son axe, CD l'ordonnée égale à l'axe CB et au paramètre BV. Prenez BP, PL, LG

Fig. 148.



égales entre elles et à l'axe CB, et portées sur son prolongement. Menez à CD les parallèles indéfinies BX, PS, LO (qui seront données) et par un point quelconque F de la courbe, menez à l'axe la parallèle FXSOK rencontrant les droites BX, PS, LO aux points X, S, O. Faites enfin $\frac{FX + XS}{SO}$ ou $\frac{XS}{SO} = \frac{SO}{OK}$. Prenant de même les points D, E, faites $\frac{DR}{RN} = \frac{RN}{NI}$ et $\frac{EQ}{QM} = \frac{QM}{MH}$. Imaginez par les points G, H, I, K, ... une courbe indéfinie qui aura pour asymptote la droite indéfinie LO.

Cette courbe GHIK est celle dont l'espèce est définie par l'équation précédente, $b^3 = a^2e + b^2e$. Je dis donc, d'après la réitération indiquée ci-dessus des opérations analytiques, que l'aire KIHGLMNO, qui se prolonge indéfiniment du côté des points K, O, est égale au *double* du cercle ayant pour diamètre l'axe BC. C'est ainsi que nous avons immédiatement résolu cette question que nous proposait un savant géomètre.

Par la même méthode j'ai carré la courbe de Dioclès ou plutôt j'ai ramené sa quadrature à celle du cercle.

Mais le redoublement des opérations est surtout élégant lorsque l'analyse passe des plus hautes puissances des ordonnées aux plus basses, ou au contraire des plus basses aux plus hautes; cette méthode s'applique en particulier pour trouver la somme des ordonnées dans une courbe quelconque proposée, ainsi qu'à beaucoup d'autres problèmes de quadratures.

Soit proposée, par exemple, la courbe dont l'équation est

$$b^2 - a^2 = e^2,$$

et qu'on voit immédiatement être un cercle. On demande la somme des cubes des ordonnées, c'est-à-dire la somme des e^3.

Si la somme des e^3 est donnée, on peut, par les méthodes précédentes, en raison de la nature de la puissance, déduire de cette courbe une autre sur la base, où la somme des ordonnées soit donnée. Soit posé, d'après la méthode, $\frac{b^2\bar{o}}{e^2} = a$. Substituant à a sa nouvelle valeur, il vient $b^2e^4 - e^6 = b^4\bar{o}^2$, équation d'une courbe où, dans l'hypothèse que la somme des e^3 de la première courbe est donnée, la somme des $\bar{o}$ sera donnée.

Puisque, dans cette nouvelle courbe, la somme des $\bar{o}$ est donnée, on peut en dériver une troisième où l'on cherche la somme des carrés des ordonnées, et non celle des cubes comme dans la première courbe. D'après notre méthode pour les carrés, nous poserons, comme on l'a vu, $\frac{eu}{b} = \bar{o}$; d'où $b^2e^4 - e^6 = b^2e^2u^2$. Divisant tout par e^2, il viendra $b^2e^2 - e^4 = b^2u^2$, courbe où la somme des e^2 doit être donnée. Partant de cette courbe, cherchons-en une où soit donnée la somme des ordonnées; posons par exemple $e^2 = by$; la dernière équation deviendra $by - y^2 = u^2$. Si donc, dans la précédente, la somme des e^2 est donnée, dans celle-ci on aura celle des by, donc celle des y.

Or dans cette dernière courbe, qui est évidemment un cercle, la somme des y est donnée, en supposant toutefois la quadrature du

cercle; donc, en remontant de cette dernière courbe, où finit notre analyse, à la première, il est clair que dans le cercle la somme des cubes des ordonnées est donnée, si l'on suppose la quadrature du cercle. De même pour les puissances cinquième, septième et les autres de degré impair indéfiniment, comme il est facile de le voir. Seulement le nombre des courbes se multiplie à mesure que s'élève le degré de la puissance dont il s'agit. On passera sans difficulté de l'analyse à la synthèse et au véritable calcul de la figure à carrer.

Au reste, il arrive souvent qu'il faut étrangement promener l'analyse par un très grand nombre de courbes pour arriver à la simple mesure pour une équation de lieu proposée.

Soit par exemple : $\frac{b^7 a - b^8}{a^6} = e^2$.

Supposons donnée la quadrature de la figure correspondant à cette équation; la somme des a est donc donnée, donc celle des ba, et si l'on pose $ba = \overline{o^2}$, celle des $\overline{o^2}$. On aura d'ailleurs $a = \frac{\overline{o^2}}{b}$, d'où l'équation $\frac{b^{12}\overline{o^2} - b^{14}}{\overline{o^{12}}} = e^2$.

De cette nouvelle courbe, par l'autre méthode que nous avons indiquée si souvent, on en déduira une troisième. La somme des $\overline{o^2}$ étant donnée, posons $\frac{bu}{\overline{o}} = e$, on aura l'équation $\frac{b^{10}\overline{o^2} - b^{12}}{\overline{o^{10}}} = u^2$.

C'est la troisième courbe où l'on aura la somme des $\overline{o}$, et par conséquent des u. Mais si la somme des u est donnée, on aura, d'après la première méthode, celle des produits bu. Soit $bu = y^2$, d'où $\frac{y^2}{b} = u$, nous aurons l'équation $\frac{b^{12}\overline{o^2} - b^{14}}{\overline{o^{10}}} = y^4$, quatrième courbe où sera donnée la somme des y^2. Par la méthode ordinaire, déduisons-en une autre; soit $\frac{bi}{y} = \overline{o}$; achevant les calculs suivant les règles de l'analyse, $b^4 y^4 i^2 - b^4 y^6 = i^{10}$, cinquième courbe où sera donnée la somme des y, donc celle des i.

Maintenant, par la méthode contraire, déjà souvent employée, cher-

chons une autre courbe où l'on connaisse la somme des carrés des ordonnées; soit $\frac{ia}{b} = y$ (car à défaut de voyelles rien n'empêche de reprendre celles qui ont déjà été employées), on aura $b^2a^4 - a^6 = b^2i^4$, sixième courbe où la somme des i^2 est donnée.

Ramenons aux racines par la méthode connue et déjà employée plusieurs fois; soit $i^2 = be$; on aura la somme des be donnée, et une septième courbe $b^2a^4 - a^6 = b^4e^2$, où la somme des e est donnée, donc celle des a.

De là on en déduira une autre, où la somme des carrés des ordonnées sera donnée.

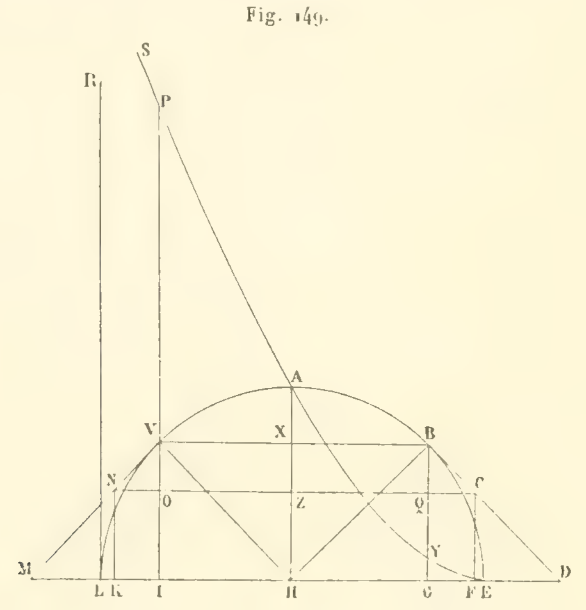
Posons, d'après la méthode, $\frac{a\bar{o}}{b} = e$, d'où $b^2a^4 - a^6 = b^2a^2\overline{o^2}$. Divisant tous les termes par a^2, il vient $b^2a^2 - a^4 = b^2\overline{o^2}$, équation d'une huitième courbe où la somme des a^2 est donnée. Ayant la somme des a^2, on peut déduire enfin une autre courbe où l'on ait la somme des ordonnées. Soit $a^2 = bu$, on aura $bu - u^2 = \overline{o^2}$, dernière équation qui donne une *neuvième* courbe, où la somme des u est donnée. Mais cette dernière courbe est évidemment un cercle et la somme des u n'y est donnée qu'en supposant la quadrature du cercle. Donc, en remontant à l'équation de la première courbe, la quadrature en sera donnée si l'on suppose celle de la dernière courbe ou du cercle.

Nous avons ainsi employé neuf courbes différentes pour arriver à la connaissance de la première.

FRAGMENT SUR LA CISSOÏDE.

Soit la cissoïde EAPS (*fig.* 149) dans le demi-cercle LVABE, dont H est le centre, LE le diamètre, HA le rayon perpendiculaire au diamètre; soit LR la droite perpendiculaire au diamètre et asymptote de la cissoïde.

Fig. 149.



Je dis que l'aire comprise entre EL, la cissoïde EAPS et son asymptote LB prolongées indéfiniment est triple du demi-cercle LAE. Si donc on fait la même construction dans l'autre moitié du cercle, l'ensemble des deux aires, dont E formera le point saillant, sera égal au triple du cercle total.

La démonstration, loin d'être pénible, est assez élégante.

Je prends sur le diamètre deux points I, G quelconques, mais de part et d'autre du centre et à même distance; on aura donc HI = HG, et par suite LI = GE. En I et G j'élève des perpendiculaires qui rencontreront la cissoïde aux points P, Y, le cercle aux points V et B. Par ces derniers points, V, B, je mène les rayons HV, HB et les tan-

gentes VM, BD, qui rencontreront le diamètre en M, D. Au delà de I, je prends une très petite longueur IK arbitraire, et au delà de G, GF = IK; en K et F, j'élève au diamètre les perpendiculaires KN, FC qui rencontreront les tangentes aux points N, C, desquels j'abaisserai sur les droites VI, BG les perpendiculaires NO, CQ.

Cela fait, il est clair que l'aire de la cissoïde est égale à la somme de tous les rectangles PI × IK et YG × GF que l'on peut construire de la sorte; ces rectangles ont des bases égales, KI = GF, et leurs hauteurs sont les ordonnées à angle droit de la cissoïde. Mais, d'après la propriété de cette courbe, $\frac{\mathrm{VI}}{\mathrm{IE}} = \frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IP}}$; d'autre part, $\mathrm{IE} = \mathrm{IH} + \mathrm{HE} = \mathrm{IH} + \mathrm{HV}$; donc $\frac{\mathrm{IV}}{\mathrm{IH} + \mathrm{HV}} = \frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{EP}}$. Maintenant les triangles HVI, VMI, VNO donnent $\frac{\mathrm{IV}}{\mathrm{HI} + \mathrm{HV}} = \frac{\mathrm{NO}}{\mathrm{NV} + \mathrm{VO}}$; donc $\frac{\mathrm{KI}(=\mathrm{NO})}{\mathrm{NV} + \mathrm{VO}} = \frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IP}}$, d'où

$$\mathrm{IP} \times \mathrm{IK} = \mathrm{IE} \times \mathrm{NV} + \mathrm{IE} \times \mathrm{VO}.$$

D'un autre côté, d'après la propriété de la cissoïde, $\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}} = \frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{GY}}$. Mais $\mathrm{GE} = \mathrm{HE} - \mathrm{HG} = \mathrm{HB} - \mathrm{HG}$; donc $\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{BH} - \mathrm{HG}} = \frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{GY}}$. Mais, en raison de la similitude des triangles, on aura aussi

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{BH} - \mathrm{HG}} = \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{BC} - \mathrm{BQ}} = \frac{\mathrm{GF}}{\mathrm{BC} - \mathrm{BQ}};$$

on en conclura que $\mathrm{YG} \times \mathrm{GF} = \mathrm{GE} \times \mathrm{BC} - \mathrm{GE} \times \mathrm{BQ}$.

Mais comme par construction HI = HG et KI = GF, on aura évidemment VN = BC et VO = BQ. Par conséquent, si l'on prend les deux rectangles correspondants,

$$\mathrm{PI} \times \mathrm{IK} + \mathrm{YG} \times \mathrm{GF}[= \mathrm{YG} \times \mathrm{IK}]$$
$$= \mathrm{IE} \times \mathrm{NV} + \mathrm{GE} \times \mathrm{BC}[= \mathrm{LI} \times \mathrm{NV}] + \mathrm{IE} \times \mathrm{VO} - \mathrm{GE} \times \mathrm{BQ}[= \mathrm{GE} \times \mathrm{BO}];$$

mais

$$\mathrm{IE} \times \mathrm{NV} + \mathrm{LI} \times \mathrm{NV} = \mathrm{LE} \times \mathrm{NV},$$

et

$$\mathrm{IE} \times \mathrm{VO} - \mathrm{GE} \times \mathrm{VO} = \mathrm{IG} \times \mathrm{VO} = 2\mathrm{IH} \times \mathrm{VO} = 2\mathrm{VX} \times \mathrm{VO};$$

donc

$$\mathrm{PI} \times \mathrm{IK} + \mathrm{YG} \times \mathrm{IK} = \mathrm{EL} \times \mathrm{VN} + 2\mathrm{VX} \times \mathrm{VO}.$$

Or la somme des produits du diamètre EL par les segments VN des tangentes dans le quart de cercle LVA représente le produit du diamètre par le quart de circonférence LVA, c'est-à-dire le double du demi-cercle LAE; d'autre part, la somme des rectangles $2 VX \times VO$ ou, si l'on mène OZQ parallèle au diamètre, des rectangles $2 VX \times XZ$ représente le demi-cercle LAE.

Donc l'aire de la cissoïde qui est équivalente à la double série de ces rectangles vaut évidemment le triple du demi-cercle.

OBSERVATIONS SUR DIOPHANTE.

1. — Porismes de Bachet, Livre III, définition 6.

« Un triangle rectangle en nombres (c'est-à-dire l'ensemble de trois nombres rationels a, b, c, liés par la relation : $a^2 = b^2 + c^2$) est dit formé des deux nombres p et q, si l'on a

$$a = p^2 + q^2, \qquad b = p^2 - q^2, \qquad c = 2pq. \text{ »}$$

Nous pouvons former un triangle avec trois nombres en progression arithmétique, en le composant, selon cette définition 6, avec le terme moyen et la différence de deux termes; car le produit des trois termes et de la différence sera égal à l'aire dudit triangle, et, par suite, si la différence est l'unité, l'aire du triangle sera représentée par le produit des trois termes.

2. — Diophante, II, 8.

« Résoudre en nombres rationels l'équation indéterminée : $x^2 + y^2 = a^2$. »

Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré; j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir.

3. — Diophante, II, 10.

« Résoudre : $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. »

Un nombre, somme de deux cubes, peut-il être de même partagé en deux autres cubes? C'est là un problème difficile dont la solution a

certainement été ignorée par Bachet et par Viète, peut-être par Diophante lui-même; je l'ai résolu plus loin dans mes Notes sur le problème IV, 2.

4. — **Diophante, III, 10.**

« Résoudre : $x+y+a=\square$, $y+z+a=\square$, $z+x+a=\square$, $x+y+z+a=\square$. »

J'ai indiqué, dans ma Note sur le problème V, 30, comment on peut trouver quatre nombres tels que la somme de deux quelconques d'entre eux, augmentée d'un nombre donné, fasse un carré.

5. — **Diophante, III, 11.**

« Résoudre le problème précédent, en supposant a négatif. »

Ma Note sur V, 31 montre comment on peut trouver quatre nombres tels que la somme de deux quelconques d'entre eux, diminuée d'un nombre donné, fasse un carré.

6. — **Diophante, III, 17.**

« Résoudre : $xy+x+y=\square$, $yz+y+z=\square$, $zx+z+x=\square$. »

Il y a dans Diophante un autre problème, V, 5, sur le même sujet (¹). Cependant on ne sait pas s'il a omis, tout en le connaissant, le problème suivant ou s'il n'en avait pas, plus probablement, donné la solution dans un de ses treize Livres :

Trouver trois carrés tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de la somme des deux mêmes carrés, fasse un carré.

Je puis donner de ce problème des solutions en nombre indéfini. En voici une, par exemple; les trois carrés : $\frac{3\,504\,384}{203\,401}$, $\frac{2\,019\,241}{203\,401}$, 4, satisfont à la condition proposée.

On peut d'ailleurs aller plus loin et étendre la question de Dio-

(¹) V, 5, Diophante suppose que les inconnues du problème III, 17 sont des carrés : il ajoute de plus les conditions : $xy+z=\square$, $yz+x=\square$, $zx+y=\square$.

phante. Ainsi j'ai traité généralement le problème suivant et je puis en fournir des solutions en nombre indéfini :

Trouver quatre nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de la somme des deux mêmes nombres, fasse un carré.

On cherchera, d'après V, 5, trois carrés tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de la somme des deux mêmes carrés, fasse un carré. Soient par exemple les trois carrés donnés par Diophante : $\frac{25}{9}$, $\frac{64}{9}$, $\frac{196}{9}$; nous les prendrons pour les trois premiers nombres de notre problème; soit x le quatrième; en formant son produit avec chacun des précédents et en ajoutant la somme des deux facteurs, nous aurons

$$\frac{34}{9}x+\frac{25}{9}=\square,\qquad \frac{73}{9}x+\frac{64}{9}=\square,\qquad \frac{205}{9}x+\frac{196}{9}=\square;$$

équation triple, que j'ai enseigné à traiter dans ma Note sur VI, 24.

7. — Commentaire de Bachet sur Diophante, III, 22.

Tout nombre premier, de la forme $4n+1$, est une seule fois l'hypoténuse d'un triangle rectangle; son carré l'est deux fois, son cube trois, son bicarré quatre, et ainsi de suite indéfiniment.

Le même nombre premier et son carré sont, d'une seule façon, somme de deux carrés; son cube et son bicarré le sont de deux façons; sa cinquième et sa sixième puissance de trois façons, et ainsi de suite indéfiniment.

Si un nombre premier, qui soit la somme de deux carrés, est multiplié par un autre nombre premier, qui soit également la somme de deux carrés, leur produit sera, de deux façons différentes, somme de deux carrés; si le multiplicateur est le carré du second nombre premier, le produit sera somme de deux carrés de trois façons différentes; si le multiplicateur est le cube du second nombre premier, le

produit sera somme de deux carrés de quatre façons différentes, et ainsi de suite indéfiniment.

Il est, d'après cela, facile de déterminer *de combien de façons différentes un nombre donné peut être hypoténuse d'un triangle rectangle.*

On prendra tous les diviseurs premiers de ce nombre qui seront de la forme $4n+1$; par exemple 5, 13, 17.

Si le nombre donné est divisé par des puissances de ses facteurs premiers, il faut d'ailleurs prendre ces puissances au lieu du facteur simple; supposons par exemple que le nombre donné soit divisé par le cube de 5, par le carré de 13 et par 17 simplement.

On prendra les exposants de tous les facteurs, à savoir : pour 5, l'exposant 3 du cube; pour 13, l'exposant 2 du carré; pour 17, l'unité simple.

On ordonnera, comme on voudra, lesdits exposants; soit, par exemple, l'ordre 3.2.1.

On multipliera le premier par le second, on doublera et on ajoutera la somme du premier et du second; il vient 17. On multipliera 17 par le troisième, on doublera et on ajoutera la somme de 17 et du troisième; il vient 52. Le nombre donné sera hypoténuse de 52 triangles rectangles différents. Le procédé sera le même quel que soit le nombre des facteurs et quelles que soient leurs puissances.

Les autres nombres premiers, qui ne sont pas de la forme $4n+1$, ainsi que leurs puissances, n'ajoutent ni ne diminuent rien au nombre qu'il s'agit de trouver.

Trouver un nombre premier qui soit hypoténuse d'autant de façons que l'on voudra.

Soit à trouver un nombre qui soit hypoténuse de sept façons différentes.

Je double le nombre donné 7; il vient 14. J'ajoute 1, ce qui fait 15. Je prends tous les diviseurs premiers de 15, qui sont 3 et 5. Je retranche l'unité de chacun d'eux, et je prends la moitié des restes; j'ai 1 et 2. Je prends maintenant autant de facteurs premiers que

j'ai ici de nombres distincts, à savoir deux, et je multiplie entre eux ces facteurs premiers en les affectant des exposants 1 et 2; pourvu que ces facteurs premiers soient de la forme $4n+1$, j'aurai ainsi (en multipliant l'un par le carré de l'autre) un nombre satisfaisant à la question proposée.

Il est dès lors facile de trouver le nombre minimum qui soit hypoténuse d'autant de façons que l'on voudra.

Trouver un nombre qui soit somme de deux carrés d'autant de façons que l'on voudra.

Soit proposé de 10 façons; je prends tous les facteurs premiers du double 20 : j'ai 2.2.5. De chacun de ces nombres je retranche l'unité; il vient 1.1.4. J'aurai en conséquence à prendre trois nombres premiers de la forme $4n+1$, par exemple, les nombres 5, 13, 17; à cause de l'exposant 4, je prendrai la quatrième puissance de l'un de ces nombres, je la multiplierai par les deux autres, et j'aurai ainsi le nombre cherché.

Il est d'après cela facile de trouver le nombre minimum qui soit somme de deux carrés d'autant de façons qu'on le voudra.

Pour reconnaître *de combien de façons différentes un nombre donné est somme de deux carrés*, voici la méthode.

Soit proposé le nombre 325. Ses diviseurs premiers, de la forme $4n+1$, sont : 5 par son carré, 13 simplement. Je prends les exposants : 2. 1. J'ajoute leur produit à leur somme, ce qui fait 5; j'ajoute l'unité, ce qui fait 6; je prends la moitié, 3. Le nombre donné sera somme de deux carrés de *trois* façons différentes.

Si l'on a trois exposants, par exemple : 2.2.1, voici comment on opérera. Je prends le produit des deux premiers et j'ajoute leur somme, ce qui fait 8. Je multiplie 8 par le troisième et j'ajoute la somme des facteurs, ce qui fait 17. J'ajoute enfin l'unité, ce qui fait 18, dont la moitié est 9. Le nombre proposé sera somme de deux carrés de *neuf* façons différentes.

Si le dernier nombre dont on aurait à prendre la moitié se trouvait

impair, on en retrancherait l'unité, et l'on prendrait la moitié du reste.

Le problème suivant peut encore être proposé : *Trouver un nombre entier dont la somme avec un entier donné fasse un carré et qui, d'autre part, soit l'hypoténuse d'autant de triangles rectangles que l'on voudra.*

La question est difficile. Si, par exemple, on demande de trouver un nombre qui soit 2 fois hypoténuse, et qui, augmenté de 2, fasse un carré, 2023 est un nombre satisfaisant à ces conditions, et il y en a une infinité d'autres, comme 3362, etc.

8. — Commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 2.

« 1. Pour résoudre : $x^3+y^3=a^3-b^3$, on posera $x=\frac{3a^3b}{a^3-b^3}-b$, $y=a-\frac{3ab^3}{a^3+b^3}$. Pour que les deux nombres x, y soient positifs, il faut que l'on ait $a^3>2b^3$. »

En réitérant l'opération, il est facile de s'affranchir de la condition et de résoudre généralement aussi bien cette question que les suivantes, ce que n'ont pu faire ni Bachet, ni Viète lui-même.

Soient donnés les deux cubes 64 et 125; on en demande deux autres dont la somme soit égale à la différence des deux cubes donnés.

D'après le procédé donné par Bachet pour son problème 3, page suivante, on cherchera deux autres cubes dont la différence soit égale à celle des deux donnés. Bachet a donné ces deux cubes, $\frac{15\,252\,992}{250\,047}$ et $\frac{125}{250\,047}$. Par construction, leur différence est égale à la différence des deux cubes donnés; mais, après les avoir trouvés par l'opération indiquée pour le problème 3, comme le double du moindre ne dépasse pas le plus grand, on peut les transporter dans les données du problème 1.

On aura ainsi deux cubes donnés, et on en cherchera deux autres dont la somme soit égale à la différence des donnés; la condition indiquée pour le problème 1 étant satisfaite, la solution s'obtiendra sans difficulté. Mais la différence des deux cubes trouvés par le problème 3

est égale à la différence des deux cubes primitivement donnés 64 et 125; ainsi rien n'empêche de construire deux cubes dont la somme soit égale à la différence des donnés 64 et 125, ce qui sans doute étonnerait Bachet lui-même.

Bien plus, si l'on passe circulairement par les trois problèmes et qu'on réitère indéfiniment les opérations, on aura une infinité de couples de cubes satisfaisant à la même condition; en effet, après avoir trouvé en dernier lieu nos deux cubes dont la somme soit égale à la différence des donnés, nous pouvons (problème 2) en chercher deux autres dont la différence soit égale à la somme de nos deux cubes, c'est-à-dire à la différence de ceux primitivement donnés; de la différence nous repasserons à la somme et ainsi de suite indéfiniment.

9. — Même commentaire.

« 2. Pour résoudre : $x^3 - y^3 = a^3 + b^3$, on posera $x = \frac{3ab^3}{a^3 - b^3} + a$, $y = \frac{3a^3b}{a^3 - b^3} - b$.

3. Pour résoudre : $x^3 - y^3 = a^3 - b^3$, on posera $x = \frac{3a^3b}{a^3 + b^3} - b$, $y = \frac{3ab^3}{a^3 + b^3} - a$.

Pour que x et y soient positifs, il faut que $a^3 < 2b^3$. »

La condition, imposée pour la solution de ce problème 3, n'est pas légitime, ainsi que je le montrerai en opérant comme pour le problème 1.

Bien plus, d'après ce qui précède, je résoudrai heureusement le problème suivant, dont Bachet a ignoré la solution :

Partager un nombre, somme de deux cubes, en deux autres cubes, et cela d'une infinité de façons, en répétant continuellement les opérations, comme je l'ai indiqué ci-dessus.

Ainsi soit à trouver deux cubes dont la somme soit égale à celle des deux cubes 8 et 1. Je chercherai d'abord (problème 2) deux cubes dont la différence soit égale à la somme des donnés; je trouverai $\frac{8000}{343}$ et $\frac{4913}{343}$. Comme le double du moindre dépasse le plus grand, on est ramené au problème 3, d'où l'on passera au problème 1, et on aura dès lors la solution.

Si l'on en veut une seconde, on repassera par le problème 2 et ainsi de suite.

Pour montrer que la condition posée par le problème 3 n'est pas légitime, soit à trouver, étant donnés les deux cubes 8 et 1, deux autres cubes dont la différence soit égale à celle des donnés.

Bachet dirait, sans doute, que le problème est impossible; je n'en ai pas moins trouvé, par ma méthode, les deux suivants dont la différence est $7 = 8 - 1$. Ces deux cubes sont $\frac{2\,024\,284\,625}{6\,128\,487}$ et $\frac{1\,981\,385\,216}{6\,128\,487}$, et leurs racines sont $\frac{1\,265}{183}$ et $\frac{1\,256}{183}$.

10. — Commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 11.

« Bachet : Résoudre $\frac{x^3+y^3}{x+y} = a$, en supposant que a soit des formes p^2 ou $3p^2$. »

Cette condition doit être complétée de la façon que j'ai indiquée plus loin pour celle du problème suivant [Obs. 12]. Il n'y a pas à s'étonner que Bachet n'ait pas aperçu la méthode générale, qui est réellement difficile; mais il aurait au moins dû avertir le lecteur que celle qu'il donne est seulement particulière.

11. — Diophante, IV, 12.

« Résoudre : $x^3 - y^3 = x - y$. »

Si l'on cherche *deux bicarrés dont la différence soit égale à celle de leurs racines,* on pourra résoudre la question en employant l'artifice de ma méthode.

Qu'on cherche, en effet, deux bicarrés dont la différence soit un cube, et tels que la différence de leurs racines soit 1. On trouvera, par la première opération, les racines $-\frac{9}{22}$ et $\frac{13}{22}$. Le premier de ces deux nombres étant affecté du signe $-$, on réitérera l'opération suivant ma méthode, en égalant la première racine à $x - \frac{9}{22}$, la

seconde à $x + \frac{13}{22}$, et l'on obtiendra ainsi des nombres positifs satisfaisant au problème.

12. — Commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 12.

« Bachet : Résoudre $\frac{x^3 - y^3}{x - y} = a$, en supposant a des formes p^2 ou $3p^2$. »

La condition n'est pas légitime, parce qu'elle n'est pas générale. Il faut ajouter « ou que le nombre exprimant le rapport soit multiple d'un carré par un nombre premier de la forme $3n + 1$ (comme 7, 13, 19, 37, etc.), ou par un produit de nombres premiers de cette forme (comme sont les produits 21, 91, etc.) ». La démonstration et la solution du problème dépendent de ma méthode.

13. — Diophante, IV, 17.

« Résoudre : $x_1 + x_2 + x_3 = \square$, $x_1^2 + x_2 = \square$, $x_2^2 + x_3 = \square$, $x_3^2 + x_1 = \square$. »

Ce problème peut, peut-être, se résoudre plus élégamment comme suit :

Posons $x_1 = x$, $x_2 = 2x + 1$, en sorte que $x_1^2 + x_2 = \square$. Pour x_3, choisissons arbitrairement le coefficient de x et le terme constant, de façon que $x_2^2 + x_3 = \square$; par exemple soit $x_3 = 4x + 3$.

On a ainsi satisfait à deux conditions; il faut encore que l'on ait

$$x_1 + x_2 + x_3 = \square \qquad \text{et} \qquad x_3^2 + x_1 = \square.$$

Mais

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7x + 4, \qquad x_3^2 + x_1 = 16x^2 + 25x + 9.$$

On a donc une double équation où les termes constants sont carrés, dont la solution est facile par suite, en ramenant ces termes à être égaux à un même carré.

Par le même procédé, on peut étendre le problème à 4 nombres et même à autant que l'on voudra; il suffit de faire en sorte que la

somme des termes indépendants de x, dans les expressions des divers nombres, fasse un carré; ce qui est très facile.

14. — Diophante, IV, 18.

« Résoudre : $x_1+x_2+x_3=\square$, $x_1^2-x_2=\square$, $x_2^2-x_3=\square$, $x_3^2-x_1=\square$. »

Le mode de raisonnement que j'ai employé pour la précédente question permet de résoudre également celle-ci et de l'étendre à autant de nombres que l'on voudra.

15. — Diophante, IV, 20.

« Résoudre : $x_1x_2+1=\square$, $x_2x_3+1=\square$, $x_3x_1+1=\square$. »

Soit proposé de trouver trois nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de l'unité, fasse un carré, et que, de plus, chacun de ces trois nombres eux-mêmes, augmenté de l'unité, fasse un carré.

J'ajouterai une solution de cette question, qui a déjà été traitée.

Soit une solution indéterminée du présent problème de Diophante, choisie de telle sorte que, pour x_1 et x_3, les termes indépendants de x, augmentés chacun d'une unité, fassent des carrés. Soient, par exemple, les trois nombres indéterminés :

$$x_1=\frac{169}{5184}x+\frac{13}{36},\qquad x_2=x,\qquad x_3=\frac{7225}{5184}x+\frac{85}{36}.$$

Il est clair qu'ils fournissent une solution de ce problème IV, 20; il faut de plus maintenant satisfaire aux conditions

$$x_1+1=\square,\qquad x_2+1=\square,\qquad x_3+1=\square,$$

c'est-à-dire à une triple équation, qu'il sera facile de résoudre par ma méthode, le terme indépendant de x, après l'addition de l'unité, se trouvant carré dans chacune des expressions.

16. — Diophante, IV, 21.

« Résoudre : $x_1x_2+1=\square$, $x_1x_3+1=\square$, $x_1x_4+1=\square$, $x_2x_3+1=\square$, $x_2x_4+1=\square$, $x_3x_4+1=\square$. »

Cherchez d'abord trois nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de l'unité, fasse un carré; soient, par exemple, les nombres 3, 1, 8.

Cherchez maintenant un quatrième nombre tel que son produit par chacun des trois nombres déjà trouvés fasse un carré après addition de l'unité. Soit x ce nombre; on aura

$$3x+1=\square,\qquad x+1=\square,\qquad 8x+1=\square,$$

triple équation dont la solution s'obtiendra par la méthode que j'ai inventée. Voir ma Note sur le problème VI, 24.

17. — Diophante, IV, 23.

« Résoudre : $x_1x_2x_3+x_1=\square$, $x_1x_2x_3+x_2=\square$, $x_1x_2x_3+x_3=\square$. »

Ce problème peut se résoudre non seulement sans le lemme de Diophante, mais même sans double équation.

Posons

$$x_1x_2x_3=x^2-2x,\qquad x_1=1,\qquad x_2=2x,$$

nous satisferons à deux des conditions du problème.

Pour obtenir x_3, il faut maintenant diviser $x_1x_2x_3$, c'est-à-dire x^2-2x, par x_1x_2, c'est-à-dire $2x$; il viendra $x_3=\frac{1}{2}x-1$, et, en l'ajoutant à $x_1x_2x_3$, nous aurons

$$x^2-\frac{3}{2}x-1=\square.$$

Il faut d'ailleurs que la valeur de x dépasse 2, en raison des positions déjà faites; on formera donc la racine du carré $\square$, en retranchant

de x un nombre arbitrairement choisi qui soit plus grand que 2. Le reste est évident.

18. — Commentaire de Bachet sur IV, 31.

« Bachet (proposition empirique) : Tout nombre est soit carré, soit somme de 2, 3 ou 4 carrés entiers. »

Bien plus, il y a une proposition très belle et tout à fait générale que j'ai été le premier à découvrir :

Tout nombre est : soit triangle, soit somme de 2 ou 3 triangles;

Soit carré, soit somme de 2, 3 ou 4 carrés;

Soit pentagone, soit somme de 2, 3, 4 ou 5 pentagones;

et ainsi de suite indéfiniment, qu'il s'agisse d'hexagones, d'heptagones ou de polygones quelconques; cette merveilleuse proposition pouvant s'énoncer en général en raison du nombre des angles.

Je ne puis en donner ici la démonstration, qui dépend de nombreux et abstrus mystères de la Science des nombres; j'ai l'intention de consacrer à ce sujet un Livre entier et de faire accomplir ainsi à cette partie de l'Arithmétique des progrès étonnants au delà des bornes anciennement connues.

19. — Diophante, IV, 35.

« Résoudre : $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $x_1 x_2 + x_3 = \square$, $x_1 x_2 - x_3 = \square$. »

On peut opérer plus facilement comme suit : Partagez arbitrairement en deux nombres le donné 6; soient, par exemple, les parties 5 et 1. Divisez par le nombre donné, 6, le produit de ces parties, diminué de l'unité, c'est-à-dire 4; il vient $\frac{2}{3}$. Retranchez ce quotient tant de 5 que de 1; les deux restes $\frac{13}{3}$ et $\frac{1}{3}$ peuvent être pris pour les deux premières parties du nombre à partager; la troisième sera dès lors $\frac{4}{3}$.

20. — Commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 44.

« Résoudre : $(x_1 + x_2 + x_3)x_1 = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}$; $(x_1 + x_2 + x_3)x_2 = \beta^2$; $(x_1 + x_2 + x_3)x_3 = \gamma^3$, avec la condition que α soit entier, x_1, x_2, x_3, β, γ pouvant être simplement rationels.

Si l'on pose $x_1 + x_2 + x_3 = x^2$ et $\beta = x^2 - z^2$, on arrive à la condition

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} = 2z^2x^2 - \gamma^3 - z^4; \qquad \text{d'où} \qquad (2\alpha+1)^2 = 16z^2x^2 - 8\gamma^3 - 8z^4 + 1.$$

On résoudra en égalant cette dernière expression à $(4zx - \delta)^2$; mais α ne peut guère être obtenu entier qu'en prenant $\delta = 1$. »

Bachet n'a pas fait des essais suffisamment rigoureux. Prenons en effet [pour γ^3] un cube arbitraire dont la racine soit de la forme $3n + 1$.

Nous aurons, par exemple, à égaler $2x^2 - 344$ à un triangle $\left[\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}\right]$ et $16x^2 - 2751$ à un carré $[(2\alpha+1)^2]$; or on peut, si l'on veut, prendre pour racine de ce carré $4x - 3$, etc.

Rien n'empêche, en effet, de généraliser la méthode et de prendre au lieu de 3 un autre nombre impair tout à fait quelconque, sauf à choisir le cube en conséquence.

21. — Commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 45.

« Diophante enseigne dans ce problème à traiter la *double équation*

$$ax + b = \square, \qquad a_1x + b_1 = \square,$$

pour le cas où a et a_1 sont différents et où d'ailleurs le rapport de a à a_1 n'est pas un carré, mais en supposant que b et b_1 soient des carrés inégaux; Bachet montre que la solution est également possible, b et b_1 étant quelconques : 1° si, en supposant $a > a_1$, le rapport de $ab_1 - ba_1$ à $a - a_1$ est carré; 2° si, avec la même hypothèse $a > a_1$, le rapport de $a_1b - b_1a$ à a_1 est carré. »

Mais que l'on propose, par exemple, la double équation

$$2x + 5 = \square, \qquad 6x + 3 = \square;$$

on pourra prendre les carrés $16 = 2x + 5$, $36 = 6x + 3$; et il y en a une infinité qui satisfont de même à la question. Il n'est pas d'ailleurs

difficile de donner une règle générale pour les problèmes de ce genre, en sorte que les conditions posées par Bachet sont à peine dignes de lui, car on peut aisément étendre à une infinité de cas, bien plus à tous les cas possibles, ce qu'il n'a trouvé que pour deux cas seulement.

22. — Diophante, V, 3.

« Résoudre $x_1 x_2 + a = \square$, $x_2 x_3 + a = \square$, $x_3 x_1 + a = \square$, $x_1 + a = \square$, $x_2 + a = \square$, $x_3 + a = \square$. »

De cette solution, il est facile de déduire celle de la question suivante :

Trouver quatre nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté d'un nombre donné, fasse un carré.

Soient pris en effet, pour trois de ces nombres, ceux qu'on aura trouvés pour le problème de Diophante et qui satisferont dès lors, en outre, à la condition que chacun d'eux, augmenté d'un nombre donné, fasse un carré. Soit $x + 1$ le quatrième nombre à chercher; on aura une triple équation facile à résoudre par ma méthode. Voir la Note sur le problème VI, 24.

Nous aurons ainsi une solution de la question proposée par Bachet sur III, 12, et outre que le procédé est plus général, il a sur celui de Bachet cette supériorité que les trois premiers nombres, augmentés chacun du nombre donné, donnent des carrés.

Toutefois, je ne sais pas encore si le problème peut être résolu en posant la condition que le quatrième nombre, augmenté du donné, fasse également un carré; c'est une recherche qui reste à faire.

23. — Diophante, V, 8.

« Construire trois triangles rectangles numériques dont les aires soient égales. »

Mais peut-on trouver quatre ou même un plus grand nombre, allant jusqu'à l'infini, de triangles de même aire? Rien ne paraît s'opposer

à ce que cette question soit possible; elle est donc à examiner plus profondément.

J'ai résolu le problème; bien plus, pour un triangle donné quelconque, j'en fournis une infinité ayant la même aire. Soit, par exemple, 6 l'aire du triangle 3.4.5, en voici un autre de même aire : $\frac{7}{10} \cdot \frac{120}{7} \cdot \frac{1201}{70}$, ou, si l'on veut le même dénominateur : $\frac{49}{70} \cdot \frac{1200}{70} \cdot \frac{1201}{70}$.

Voici le procédé qui peut, sans exceptions, s'appliquer indéfiniment. Soit un triangle quelconque, d'hypoténuse z, de base b, de hauteur d. On en déduira un autre triangle non semblable, mais de même aire, en formant ce nouveau triangle avec les nombres z^2 et $2bd$, sauf à diviser par $2zb^2 - 2zd^2$ les expressions du quatrième degré qui représentent les côtés. Le triangle ainsi obtenu aura toujours une aire égale à celle du triangle dont il dérive.

Du second triangle ainsi déterminé, on en déduira, par la même méthode, un troisième; de ce troisième un quatrième; du quatrième un cinquième, et on aura ainsi une série indéfinie de triangles dissemblables et de même aire.

Pour que l'on ne doute pas qu'il soit possible d'en donner plus de trois, à ceux de Diophante : 40.42.58, 24.70.74, 15.112.113, j'en ajoute un quatrième dissemblable et de même aire : hypoténuse $\frac{1412881}{1189}$; base $\frac{1412880}{1189}$; hauteur $\frac{1681}{1189}$.

Si l'on réduit tous ces nombres au même dénominateur, on aura, en entiers, les quatre triangles suivants de même aire :

1°	47 560,	49 938,	68 962;
2°	28 536,	83 230,	87 986;
3°	17 835,	133 168,	134 357;
4°	1 681,	1 412 880,	1 412 881.

On pourra en trouver une infinité de même aire en poursuivant l'application du procédé, et dès lors étendre le problème suivant de Diophante au delà des bornes où il l'a restreint.

Voici, obtenu par un autre procédé, un triangle dont l'aire est le sextuple d'un carré, comme celle du triangle 3.4.5 :

2 896 804, 7 216 803, 7 776 485.

24. — Diophante, V, 9.

« Trouver trois nombres tels que le carré de chacun d'eux, soit augmenté, soit diminué de la somme des trois nombres, fasse un carré. »

D'après ce que j'ai dit ci-dessus, il est clair que je puis résoudre le problème :

Trouver autant de nombres que l'on voudra, tels que le carré de chacun d'eux, soit augmenté, soit diminué de la somme de tous ces nombres, fasse un carré.

Bachet n'a probablement pas connu la solution de ce problème; sans quoi il aurait généralisé la question de Diophante, comme il l'a fait pour IV, 31 et ailleurs.

25. — Commentaire de Bachet sur Diophante, V, 12.

« Doutes sur la question de savoir si un nombre qui, comme 21, n'est ni carré, ni somme de deux carrés entiers, peut être partagé en deux carrés. »

Le nombre 21 ne peut être partagé en deux carrés fractionnaires. Je puis le démontrer très facilement; plus généralement aucun nombre divisible par 3, mais non par 9, ne peut être somme de deux carrés, soit entiers, soit fractionnaires.

26. — Même Commentaire.

« Sur les conditions imposées au choix du nombre donné a pour la possibilité du problème

$$x+y=1, \qquad a+x=\square, \qquad a+y=\square. \text{ »}$$

Voici la vraie condition, c'est-à-dire celle qui est générale et qui exclut tous les nombres ne pouvant être choisis :

Il faut que le nombre donné ne soit pas impair, et que la somme

de son double et de l'unité, après division par le plus grand carré qui y entre comme facteur, ne puisse pas être divisée par un nombre premier qui soit inférieur d'une unité à un multiple de 4.

27. — Commentaire de Bachet sur Diophante, V, 14

« Sur les conditions imposées au choix du nombre donné a pour la possibilité du problème :

$$x+y+z=1, \quad a+x=\square, \quad a+y=\square, \quad a+z=\square. »$$

La condition posée par Bachet n'est, elle-même, pas satisfaisante; bien plus, il n'a pas fait ses essais avec assez de soin, car sa règle n'exclut pas le nombre 37, qui ne peut cependant être pris.

Voici comment on doit concevoir la véritable condition :

Prenons deux progressions géométriques suivant la raison 4, et dont les premiers termes soient 1 et 8; superposons-en les termes comme suit :

1,	4,	16,	64,	256,	1024,	4096,	etc.,
8,	32,	128,	512,	2048,	8192,	32768,	etc.

Je considère d'abord le premier terme de la seconde progression, 8; il faut que le nombre donné ne soit ni le double de 1 (terme superposé à 8), ni égal à la somme d'un multiple de 8 et du double de 1.

Je considère en second lieu le second terme de la seconde progression, 32, et je prends le double du terme 4 superposé; j'ajoute à ce double, 8, la somme des termes qui précèdent dans la même progression, celle du dessus (dans ce cas, cette somme se réduit à l'unité); j'ai ainsi 9.

Prenant donc les nombres 32 et 9, je dis que le nombre donné ne doit être ni 9, ni la somme de 9 et d'un multiple de 32.

Je considère maintenant le troisième terme de la seconde progression, 128; je prends le double, 32, du nombre 16 superposé; j'ajoute la somme des termes antécédents dans la même progression du haut, c'est-à-dire 1 et 4; j'ai 37. Prenant donc les deux nombres 128 et 37, je dis que le nombre donné ne doit être ni 37, ni la somme de 37 et d'un multiple de 128.

Je considère encore le quatrième terme de la seconde progression; le même procédé me donne les nombres 512 et 149. Il faudra donc que le nombre donné ne soit ni 149, ni la somme de 149 et d'un multiple de 512.

Voilà la méthode uniforme dont l'application doit se poursuivre indéfiniment, et qui n'a pas été indiquée par Diophante dans sa généralité, ni reconnue par Bachet lui-même; les essais de ce dernier ont même été fautifs, non seulement pour le nombre 37, comme je l'ai déjà indiqué, mais aussi pour 149 et les autres, qui tombent également dans les limites des essais qu'il déclare avoir faits [jusqu'à 325].

28. — **Diophante, V, 19.**

« Résoudre :

$$(x_1+x_2+x_3)^3-x_1=\alpha_1^3,\qquad (x_1+x_2+x_3)^3-x_2=\alpha_2^3,\qquad (x_1+x_2+x_3)^3-x_3=\alpha_3^3. »$$

Ou bien le texte grec est corrompu, ou bien Diophante n'a pas exprimé le moyen par lequel il a obtenu sa solution. Bachet croit qu'il a été aidé par le hasard, ce que je n'admets guère, car je pense que sa méthode n'est pas difficile à retrouver.

Il s'agit de trouver un carré plus grand que 2, mais plus petit que 3, et dont la différence avec 3 se partage en trois cubes (¹).

Prenons, pour racine du carré cherché, une expression composée d'un terme en x et de -1, par exemple : $x-1$. Si je retranche de 3 le carré de cette expression, il reste : $2+2x-x^2$, qu'il s'agit de décomposer en une somme de trois cubes de façon que l'équation se réduise à deux termes de degré consécutif.

On peut y arriver d'une infinité de façons : soit $1-\frac{4}{3}x$ la racine de l'un des cubes; pour celle du second, prenons $1+x$, afin que la

(¹) Si, d'après la marche de Diophante, on pose $x_1+x_2+x_3=z$, $\alpha_1=\frac{z}{m_1}$, $\alpha_2=\frac{z}{m_2}$, $\alpha_3=\frac{z}{m_3}$, on arrive à la condition $z^2\left(3-\frac{1}{m_1^3}-\frac{1}{m_2^3}-\frac{1}{m_3^3}\right)=1$. Diophante suppose $\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}+\frac{1}{m_3^3}<1$; le carré $\frac{1}{z^2}$ doit donc satisfaire aux conditions indiquées par Fermat.

somme de ces deux cubes donne $2x$ pour le terme du premier degré; la racine du troisième ne devra comprendre qu'un terme en x, qu'il faudra d'ailleurs affecter du signe —, pour que la valeur de x reste dans les limites assignées; mais il ne sera pas difficile de choisir le coefficient de ce terme en x de manière que la solution tombe effectivement entre les limites en question.

Cela fait, il est clair que notre premier cube sera plus petit que l'unité, comme nous le désirons; au contraire, le second est plus grand, et le troisième est affecté du signe —; il s'ensuit qu'il faut trouver deux cubes dont la somme soit égale à la différence du second et du troisième; nous arrivons ainsi, comme Diophante, à sa seconde opération.

« Mais nous avons », dit-il « dans les Porismes, que la différence de deux cubes quelconques est aussi la somme de deux cubes. »

Ici Bachet est de nouveau embarrassé et, comme les Porismes de Diophante lui font défaut, il soutient qu'il y a là un problème qui n'est possible que sous une certaine condition; il enseigne en effet à partager en deux cubes la différence de deux cubes, mais seulement lorsque le plus grand des cubes donnés surpasse le double du plus petit, et il avoue franchement qu'il ignore comment on peut en général partager en deux cubes la différence de deux cubes quelconques. J'ai exposé plus haut, à propos du problème IV, 2, la solution générale de cette question et des autres relatives au même sujet.

29. — **Diophante, V, 24.**

« Trouver trois carrés tels que le produit des trois, plus l'un quelconque d'entre eux, fasse un carré. Le problème est ramené à trouver trois triangles rectangles tels que le rapport du produit des bases au produit des hauteurs soit carré. »

Voici comment je restitue et j'explique la méthode de Diophante, qui n'a pas été comprise par Bachet.

Ayant pris comme premier triangle : 3, 4, 5, pour lequel le produit des côtés de l'angle droit est 12, Diophante dit : « On est ramené à chercher deux triangles tels que le produit des côtés de l'angle droit

de l'un soit 12 fois le produit des côtés de l'angle droit de l'autre. » La raison en est que si l'on multiplie entre eux ces deux produits, on aura un nombre plan semblable à 12, et que dès lors, en multipliant ce dernier nombre par 12, on aura un carré, ce que demande le problème proposé.

Diophante continue : « Or l'aire de l'un de ces triangles sera 12 fois celle de l'autre », ce qui est évident de soi-même. « Mais au lieu de 12 fois, on peut prendre 3 fois »; en effet, 3 étant le quotient de 12 par le carré 4, la multiplication générale des bases et des hauteurs donnera toujours un carré, puisque, si l'on divise un carré par un carré, le quotient est encore un carré.

La suite du texte de Diophante ne donne pas la solution cherchée, mais je la restituerai comme suit :

Dans le cas proposé, on formera l'un des deux triangles des nombres 7 et 2, l'autre des nombres 5 et 2. Le premier triangle aura son aire triple de celle du second, et leur couple satisfera à la question.

Au reste, pour trouver deux triangles rectangles dont l'aire soit dans un rapport donné, voici la règle générale.

Soit $\frac{r}{s}$ le rapport donné, en supposant $r > s$. On formera le plus grand triangle des nombres $2r + s$ et $r - s$, le plus petit des nombres $r + 2s$ et $r - s$.

On peut encore former les deux triangles des manières suivantes :

Le premier de $2r - s$ et $r + s$, le second de $2s - r$ et $r + s$;

Le premier de $6r$ et $2r - s$, le second de $4r + s$ et $4r - 2s$;

Le premier de $r + 4s$ et $2r - 4s$, le second de $6s$ et $r - 2s$.

On peut déduire de ce qui précède une méthode pour trouver trois triangles rectangles dont les aires soient proportionnelles à trois nombres donnés, pourvu que la somme de deux de ces nombres soit quadruple du troisième.

Soient donnés, par exemple, les nombres r, s, t, et supposons $r + t = 4s$. On formera les trois triangles comme suit : le premier de $r + 4s$ et $2r - 4s$, le second de $6s$ et $r - 2s$, le troisième de $4s + t$ et $4s - 2t$. (J'ai admis $r > t$.)

On peut également en tirer un moyen de trouver trois triangles rectangles en nombres, tels que leurs aires forment un triangle rectangle.

On ramènera en effet la question à trouver un triangle pour lequel la somme de la base et de l'hypoténuse soit quadruple de la hauteur. Ce problème est facile, et le triangle cherché sera semblable au suivant : 17, 15, 8. Quant aux trois triangles, les nombres générateurs seront : pour le premier, 49 et 2; pour le second, 47 et 2; pour le troisième, 48 et 1.

Enfin on aura également le moyen de trouver trois triangles dont les aires soient proportionnelles à trois carrés donnés, en supposant que la somme de deux de ces carrés soit quadruple du troisième. On pourra aussi trouver de même trois triangles ayant leurs aires égales; enfin nous pouvons construire d'une infinité de façons deux triangles rectangles, ayant leurs aires dans un rapport donné, en multipliant l'un des termes du rapport ou les deux termes par des carrés donnés, etc.

30. — **Diophante, V, 25.**

« Trouver trois carrés, tels que le produit des trois, moins l'un quelconque d'entre eux, fasse un carré. Le problème est ramené à trouver trois triangles rectangles tels que le rapport du produit des hypoténuses au produit des hauteurs soit carré. »

De même que pour le précédent, Bachet a traité ce problème en laissant de côté la méthode de Diophante, qui reste donc à éclaircir et à expliquer. Il s'agit à cet effet de trouver deux triangles rectangles tels que le produit de l'hypoténuse et de la base dans l'un de ces triangles soit dans un rapport donné avec le même produit pour l'autre triangle.

Cette question m'a longtemps tourmenté, et quiconque essayera de la résoudre pourra reconnaître qu'elle est vraiment difficile; j'ai enfin découvert une méthode pour la solution générale.

Soit à chercher deux triangles tels que le produit de l'hypoténuse par la hauteur, dans l'un de ces triangles, soit double du même produit dans l'autre.

Soient a et b les nombres générateurs de l'un des triangles, a et d ceux de l'autre.

Pour le premier, le produit de l'hypoténuse et de la hauteur sera $2ba^3 + 2b^3a$;

Pour le second, le même produit sera $2da^3 + 2d^3a$. On demande que le premier de ces produits soit double du second : par conséquent

$$ba^3 + b^3a = 2da^3 + 2d^3a.$$

Divisant tous les termes par a,

$$ba^2 + b^3 = 2da^2 + 2d^3;$$

transposant :

$$2d^3 - b^3 = ba^2 - 2da^2.$$

Pour résoudre la question, il faut donc que le quotient de $2d^3 - b^3$ par $b - 2d$ soit un carré.

Il s'agit par suite de trouver deux nombres, b et d, tels que l'excès du double du cube de l'un sur le cube de l'autre donne un carré, si on le divise ou si on le multiplie (car cela revient au même) par l'excès du double du second sur le premier.

Soient $x + 1$ l'un de ces nombres et 1 l'autre. L'excès du double du cube du premier sur le cube du second est $1 + 6x + 6x^2 + 2x^3$; l'excès du double du second nombre sur le premier est $1 - x$. Le produit de $1 + 6x + 6x^2 + 2x^3$ par $1 - x$ doit être un carré. Or ce produit est $1 + 5x - 4x^3 - 2x^4$, qu'on peut égaler au carré de $1 + \frac{5}{2}x - \frac{25}{8}x^2$. Le reste n'offre plus de difficulté.

Pour étendre cette méthode au cas d'un rapport quelconque, il suffira de prendre, pour l'un des nombres, la somme de x et de l'excès du plus grand terme du rapport sur le moindre; pour l'autre nombre, ce même excès; c'est ce que nous avons fait au reste pour le rapport de 2 à 1. De cette façon en effet le terme indépendant de x dans le produit final sera un carré, et l'équation pourra se traiter facilement; sa solution conduira à deux nombres représentant b et d et l'on remontera ainsi au problème primitif.

En revoyant ce que j'ai écrit ci-dessus sur cette question de Dio-

phante, j'ai été sur le point de tout effacer parce qu'en réalité ce n'est pas elle qui se ramène au problème dont j'ai exposé la solution; cependant, si je me suis trompé en réduisant une question à une autre, cette dernière n'en est pas moins valablement résolue; mon travail a donc été plutôt mal placé que perdu et je laisse tel quel ce que j'ai écrit dans la marge.

Quant à la question même de Diophante, je l'ai soumise à un nouvel examen et en employant toutes les ressources de ma méthode, j'ai enfin obtenu la solution générale; toutefois je ne vais donner qu'un exemple, dont les nombres montreront suffisamment par eux-mêmes que ce n'est point le hasard, mais une méthode régulière qui a permis de les trouver.

Diophante propose en fait de chercher deux triangles rectangles, tels que le produit de l'hypoténuse par la hauteur pour le premier soit au même produit pour le second dans le rapport de 5 à 1.

Voici deux triangles satisfaisant à

	Premier triangle.	Second triangle.
Hypoténuses........	48 543 669 109,	42 636 752 938,
Bases..............	36 083 779 309,	41 990 695 480,
Hauteurs...........	32 472 275 580,	7 394 200 038.

31. — **Diophante, V, 30**.

« Résoudre $x_1^2 + x_2^2 + a = \square$, $x_2^2 + x_3^2 + a = \square$, $x_3^2 - x_1^2 + a = \square$. »

Grâce à ce problème, nous obtenons la solution d'une question qui, autrement, paraîtrait très difficile : *Étant donné un nombre, en trouver quatre tels que leurs sommes deux à deux, augmentées du nombre donné, fassent des carrés.*

Soit donné le nombre 15; on commencera par chercher, d'après la solution de Diophante, trois carrés tels que leurs sommes deux à deux, augmentées du nombre donné, fassent des carrés. Soient 9, $\frac{1}{100}$, $\frac{529}{225}$ ces trois carrés; on prendra, pour le premier des quatre nombres cherchés : $x^2 - 15$; pour le second : $6x + 9$ (9 étant l'un des carrés trouvés et 6, coefficient de x, le double de la racine de ce carré); d'a-

près le même procédé, on prendra pour le troisième nombre : $\frac{1}{5}x + \frac{1}{100}$, et pour le quatrième : $\frac{46}{15}x + \frac{529}{225}$.

Grâce à ces positions, on satisfait à trois des conditions de l'énoncé; car si l'on fait la somme du premier nombre et de l'un quelconque des trois suivants, et que l'on ajoute 15, on a un carré.

Il faut encore qu'on ait des carrés en ajoutant 15 soit à la somme du second et du troisième, soit à celle du troisième et du quatrième, soit à celle du second et du quatrième. Nous aurons ainsi une triple équation, qui sera facile à traiter, parce que, grâce à la construction dont nous avons emprunté l'artifice au problème de Diophante, dans chacune des expressions à égaler à un carré, le terme constant sera un carré, et qu'il n'y aura en outre qu'un terme en x. Voir à ce sujet ce que j'ai dit sur le problème VI, 24.

32. — **Diophante, V, 31.**

« Résoudre $x_1^2 + x_2^2 - a = \square$, $x_2^2 + x_3^2 - a = \square$, $x_3^2 + x_1^2 - a = \square$. »

Un artifice analogue à celui que nous avons employé sur la précédente question, pour trouver quatre nombres tels que leurs sommes deux à deux, augmentées d'un nombre donné, fassent des carrés, peut servir pour passer de la présente question de Diophante à la recherche de quatre nombres tels que leurs sommes deux à deux, diminuées d'un nombre donné, fassent des carrés.

On prendra pour le premier nombre : $x^2 +$ le nombre donné; pour le second, on ajoutera le premier carré trouvé d'après Diophante à un terme en x ayant pour coefficient le double de la racine de ce carré; etc. Le reste est évident.

33. — **Diophante, V, 32.**

« Résoudre : $x_1^4 + x_2^4 - x_3^4 = \square$.

Pourquoi ne cherche-t-il pas deux bicarrés dont la somme soit un carré? C'est que ce problème est impossible, comme notre méthode de démonstration peut le mettre hors de doute.

34. — Diophante, VI, 3.

« Trouver un triangle rectangle en nombres, dont l'aire, augmentée d'un nombre donné, fasse un carré. » — Viète avait supposé à tort, comme le remarque Bachet, que le nombre donné devait être la somme de deux carrés. Dans les problèmes suivants, l'aire doit être diminuée ou retranchée d'un nombre donné.

Voici sans doute l'origine de l'erreur de Viète : cet illustre savant aura égalé l'aire à la différence de deux bicarrés ([1]), comme $x^4 - 1$, pour en faire un carré, en y ajoutant le quintuple d'un carré, 5 étant le nombre donné.

Ce dernier nombre étant somme de deux carrés, on peut en effet trouver un carré, dont le quintuple, diminué d'une unité, fasse un carré. Prenons pour racine de ce carré à quintupler $x + 1$ (le coefficient de x pourrait être pris différent de l'unité); le quintuple du carré sera $5x^2 + 10x + 5$; en ajoutant l'aire, $x^4 - 1$, on a la somme $x^4 + 5x^2 + 10x + 4$, à égaler à un carré, ce qui est aisé, le terme indépendant de x étant carré, par suite de l'hypothèse ajoutée comme condition.

Mais Viète n'a pas vu que le problème peut se résoudre tout aussi bien en prenant pour l'aire, non pas $x^4 - 1$, mais $1 - x^4$; car alors la question se ramène immédiatement à faire que le nombre donné, 5, 6, ou tout autre quelconque, multiplié par un carré, fasse un autre carré, après addition de l'unité; ce qui peut se résoudre très facilement et sans exception, puisque l'unité est un carré.

J'ai résolu cette question, ainsi que les deux suivantes, par une méthode particulière, qui permet, si nous cherchons, par exemple, un triangle dont l'aire, augmentée de 5, fasse un carré, de donner un tel triangle en nombres minimi : $\frac{9}{3}$, $\frac{40}{3}$, $\frac{41}{3}$; l'aire est 20, et en ajoutant 5, donne le carré 25.

([1]) C'est effectivement la marche que suit Diophante, et qui revient à supposer carré le rapport des deux nombres générateurs du triangle. La solution de Viète (*Zetet.*, V, 9) est présentée sous forme synthétique et correspond à une combinaison particulière : le nombre donné étant supposé de la forme $r^2 + s^2$, il prend pour nombres générateurs $(r+s)^2$ et $(r-s)^2$ et divise les côtés du triangle par $2(r+s)(r-s)^2$.

Mais ce n'est pas ici la place de développer le principe et l'emploi de cette méthode; la marge n'y suffirait pas, car j'aurais bien des choses à dire à ce sujet.

35. — **Diophante, VI, 6.**

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, augmentée de l'un des côtés de l'angle droit, fasse un nombre donné. »

Ce problème et les suivants peuvent être résolus autrement :

Qu'on forme, pour celui-ci, un triangle avec le nombre donné et l'unité, et qu'on divise les côtés par la somme du nombre donné et de l'unité, les quotients constitueront le triangle cherché.

36. — **Diophante, VI, 7.**

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, diminuée de l'un des côtés de l'angle droit, fasse un nombre donné. »

Qu'on forme un triangle avec le nombre donné et l'unité, et qu'on divise les côtés par la différence du nombre donné et de l'unité, on aura le triangle cherché.

Au reste, cette question est susceptible d'une infinité de solutions, par le procédé qui nous permet d'en trouver indéfiniment aux doubles équations de cette sorte; j'ai indiqué plus bas l'emploi de ce procédé, sur la question 24.

Bien plus, on aura de même une infinité de solutions pour les quatre questions suivantes, ce qui n'a été reconnu ni par Diophante, ni par Bachet. Mais pourquoi ni l'un ni l'autre n'ont-ils pas ajouté le problème que voici ?

Trouver un triangle rectangle, tels que l'un des côtés de l'angle droit, diminué de l'aire, fasse un nombre donné.

Ils semblent bien n'en avoir pas connu la solution, parce qu'elle n'est pas immédiatement fournie par la double équation; cependant on peut la trouver aisément avec notre méthode.

Ce troisième cas peut être de même ajouté aux questions suivantes.

37. — **Diophante, VI, 8 et 9.**

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, augmentée (diminuée) de la somme des côtés de l'angle droit, fasse un nombre donné. »

Avec notre méthode, on peut ajouter le problème que voici :

Trouver un triangle rectangle tel que la somme des côtés de l'angle droit, diminuée de l'aire, fasse un nombre donné.

38. — **Diophante, VI, 10 et 11.**

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, augmentée (diminuée) de la somme de l'hypoténuse et d'un des côtés de l'angle droit, fasse un nombre donné. »

Avec notre méthode, on peut ajouter le problème que voici :

Trouver un triangle rectangle tel que la somme de l'hypoténuse et de l'un des côtés de l'angle droit, diminuée de l'aire, fasse un nombre donné.

On ajoutera de même le suivant aux commentaires de Bachet ([1]).

Trouver un triangle rectangle tel que l'hypoténuse, diminuée de l'aire, fasse un nombre donné.

39. — **Diophante, VI, 13.**

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, augmentée de l'un ou de l'autre des deux côtés de l'angle droit, fasse un carré dans les deux cas. »

Diophante ne donne, comme satisfaisant à ce problème, que des triangles d'une seule espèce; notre méthode fournit une infinité de triangles d'espèces différentes, lesquelles dérivent successivement de la solution de Diophante.

Soit, en effet, déjà trouvé le triangle 3.4.5 satisfaisant à cette condition « que le produit des deux côtés de l'angle droit fasse un carré,

([1]) « Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, augmentée (diminuée) de l'hypoténuse, fasse un nombre donné. »

si on lui ajoute le produit du plus grand de ces deux côtés par leur différence et par l'aire du triangle ». Il s'agit d'en déduire un autre jouissant de la même propriété.

Soient 4 le plus grand côté de l'angle droit du triangle cherché et $3+x$ le plus petit. Le produit des deux côtés de l'angle droit, si on lui ajoute le produit du plus grand des deux côtés par leur différence et par l'aire du triangle, fera $36-12x-8x^2$, expression qu'il faut égaler à un carré. D'un autre côté, les côtés 4 et $3+x$ étant ceux de l'angle droit d'un triangle rectangle, la somme de leurs carrés doit faire un carré; or cette somme fait $25+6x+x^2$, seconde expression qu'il faut aussi égaler à un carré.

On a donc une double équation, qu'il est facile de résoudre, savoir

$$36-12x-8x^2=\square, \qquad 25+6x+x^2=\square.$$

40. — Diophante, VI, 14.

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, diminuée de l'un ou de l'autre des deux côtés de l'angle droit, fasse un carré dans les deux cas. »

Avec notre méthode, on pourra résoudre la question suivante qui, autrement, est très difficile :

Trouver un triangle rectangle tel que chacun des deux côtés de l'angle droit, diminué de l'aire, fasse un carré.

41. — Diophante, VI, 15 et 17.

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, diminuée (augmentée) soit de l'hypoténuse, soit de l'un des deux côtés de l'angle droit, fasse un carré. »

On peut, avec notre méthode, essayer la question suivante qui, autrement, est très difficile :

Trouver un triangle rectangle tel qu'en retranchant l'aire, soit de l'hypoténuse, soit de l'un des côtés de l'angle droit, on ait toujours un carré.

42. — Diophante, VI, 19.

« Trouver un triangle rectangle, tel que le périmètre en soit un cube et que la somme de l'aire et de l'hypoténuse fasse un carré.

» ... Il faut trouver un carré qui, augmenté de 2, fasse un cube.... »

Peut-il y avoir, en nombres entiers, un autre carré que 25 qui, augmenté de 2, fasse un cube? Cela paraît certainement au premier abord difficile à discuter; cependant, je puis prouver, par une démonstration rigoureuse, que 25 est bien le seul carré entier qui soit inférieur à un cube de deux unités. En nombres fractionnaires, la méthode de Bachet fournit une infinité de tels carrés, mais la théorie des nombres entiers, qui est très belle et très subtile, n'a pas été connue jusqu'à présent, ni par Bachet, ni par aucun auteur dont j'aie vu les écrits.

43. — Commentaire de Bachet sur Diophante, VI, 24.

« Ce commentaire est consacré à la théorie de la *double équation.* »

Là où ne suffisent pas les *équations doubles* ou διπλοισότητες, il faut recourir à des *équations triples* ou τριπλοισότητες, découverte qui m'appartient et qui conduit à la solution d'une foule de très beaux problèmes.

Soit, par exemple, à égaler à des carrés les expressions

$$x+4, \quad 2x+4, \quad 5x+4,$$

il y a là une *équation triple* qu'il est aisé de résoudre par l'intermédiaire d'une *équation double.*

Si, en effet, on substitue à x une expression qui, augmentée de 4, fasse un carré, par exemple x^2+4x, les trois expressions ci-dessus à égaler à des carrés deviendront

$$x^2+4x+4, \quad 2x^2+8x+4, \quad 5x^2+20x+4.$$

La première est un carré par construction; il reste donc à satisfaire aux conditions

$$2x^2+8x+4=\square, \qquad 5x^2+20x+4=\square,$$

c'est-à-dire à une *équation double* qui, à la vérité, ne fournira qu'une solution unique, mais de cette solution on pourra en tirer une autre, de cette seconde une troisième, et ainsi de suite indéfiniment.

A cet effet, lorsqu'on aura trouvé une valeur pour x, on substituera à x le binome formé de x plus la valeur qui vient d'être obtenue. Ce procédé fournira une infinité de solutions dérivant chacune de la précédente et venant s'ajouter aux antérieures.

C'est grâce à cette invention que nous pouvons donner une infinité de triangles de même aire, ce que Diophante semble n'avoir pas su faire, comme il ressort de son problème V, 8, où il cherche seulement trois triangles de même aire pour résoudre le problème suivant avec trois inconnues; mais cette dernière question, d'après la découverte qui m'est due, peut être étendue à un nombre indéfini d'inconnues.

44. — Même Commentaire.

A ce traité des *équations doubles*, nous pourrions faire de nombreuses additions sur des points ignorés des anciens et aussi bien des modernes. Mais il suffira, pour établir l'importance de notre méthode et en montrer l'usage, de résoudre ici la question suivante, dont la difficulté est incontestable.

Trouver un triangle rectangle en nombres, tel que l'hypoténuse soit un carré, ainsi que la somme des côtés de l'angle droit.

Le triangle cherché est représenté par les trois nombres suivants :

4 687 298 610 289, 4 565 486 027 761, 1 061 652 293 520,

et il est formé des deux nombres 2 150 905 et 246 792.

J'ai, par une autre méthode, trouvé la solution de cette autre question :

Trouver un triangle rectangle en nombres, tel que le carré de la différence des côtés de l'angle droit, moins le double carré du plus petit de ces côtés, fasse un carré.

Le triangle 1525, 1517, 156, formé des nombres 39 et 2, est un de ceux qui satisfont à la question.

J'ajoute d'ailleurs avec confiance que les deux triangles ci-dessus sont les petits en nombres entiers qui satisfassent aux questions proposées.

Voici quelle est ma méthode : Cherchez, suivant le procédé ordinaire, la solution de la question proposée. Si, après l'achèvement des calculs, l'opération n'aboutit pas, parce que la valeur à donner à l'inconnue se trouve affectée du signe — et doit être regardée comme plus petite que zéro, j'affirme hardiment qu'il ne faut pas désespérer et rester à bayer, comme dit Viète, mais comme il l'a fait après les anciens analystes; il faut au contraire essayer de nouveau la question en substituant à l'inconnue le binome x moins le nombre trouvé dans la première opération comme valeur affectée du signe de soustraction. On aura ainsi une nouvelle équation qui conduira à une solution en nombres vrais.

C'est par ce moyen que j'ai résolu les deux questions ci-dessus; autrement elles sont très difficiles. J'ai de même montré qu'une somme de deux cubes peut être décomposée en deux autres cubes, et j'ai donné la construction qui peut nécessiter la réitération de l'opération jusqu'à trois fois; il arrive en effet souvent que la vérité cherchée oblige l'analyste le plus habile et le plus industrieux à recommencer plusieurs fois le calcul, ainsi que l'expérience le fera aisément reconnaître.

45. — Problème 20 de Bachet sur Diophante, VI, 26.

« Bachet. — Trouver un triangle rectangle dont l'aire soit un nombre donné. »

L'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré.

Je vais donner la démonstration de ce théorème que j'ai découvert; je ne l'ai pas trouvée au reste sans une pénible et laborieuse méditation; mais ce genre de démonstration conduira à des progrès merveilleux dans la science des nombres.

Si l'aire d'un triangle était un carré, il y aurait deux bicarrés dont la différence serait un carré; il s'ensuit qu'on aurait également deux carrés dont la somme et la différence seraient des carrés. Par conséquent, on aurait un nombre carré, somme d'un carré et du double d'un carré, avec la condition que la somme des deux carrés, qui servent à le composer, soit également un carré. Mais si un nombre carré est somme d'un carré et du double d'un carré, sa racine est également somme d'un carré et du double d'un carré, ce que je puis prouver sans difficulté. On conclura de là que cette racine est la somme des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'un des carrés composants formera la base, et le double de l'autre carré la hauteur.

Ce triangle rectangle sera donc formé par deux nombres carrés, dont la somme et la différence seront des carrés. Mais on prouvera que la somme de ces deux carrés est plus petite que celle des deux premiers dont on a également supposé que la somme et la différence soient des carrés. Donc, si on donne deux carrés dont la somme et la différence soient des carrés, on donne par là même, en nombres entiers, deux carrés jouissant de la même propriété et dont la somme est inférieure.

Par le même raisonnement, on aura ensuite une autre somme plus petite que celle déduite de la première, et en continuant indéfiniment on trouvera toujours des nombres entiers de plus en plus petits satisfaisant aux mêmes conditions. Mais cela est impossible, puisqu'un nombre entier étant donné, il ne peut y avoir une infinité de nombres entiers qui soient plus petits.

La marge est trop étroite pour recevoir la démonstration complète et avec tous ses développements.

Par le même procédé, j'ai découvert et démontré qu'il n'y a aucun nombre triangulaire, sauf l'unité, qui soit un bicarré.

46. — Commentaire de Bachet sur Diophante Nomb. polyg. 9.

« Trouver un polygone, le côté en étant donné, et inversement. »

Je mettrai ici, sans démonstration, une proposition très belle et très remarquable que j'ai découverte :

Dans la progression naturelle commençant à l'unité, le produit d'un nombre quelconque par le nombre immédiatement supérieur fait le double du triangle du premier nombre; si le multiplicateur est le triangle du nombre immédiatement supérieur, on a le triple de la pyramide du premier nombre; si c'est la pyramide du nombre immédiatement supérieur, on a le quadruple du triangulotriangulaire du premier nombre; et ainsi de suite indéfiniment, suivant une règle uniforme et générale.

J'estime qu'on ne peut énoncer sur les nombres de théorème qui soit plus beau ou plus général. Je n'ai ni le temps ni la place d'en mettre la démonstration sur cette marge.

47. — Bachet, Appendice, II, 27.

« $1 = 1^3$, $3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$, ... »

Voici comment j'énoncerai cette proposition d'une façon plus générale :

Dans toute progression constitutive de polygone, l'unité constitue la première *colonne ;* la somme des deux nombres suivants, diminuée du premier triangle multiplié par l'excès sur 4 du nombre des angles du polygone, forme la seconde *colonne;* la somme des trois nombres suivants, diminuée du second triangle multiplié par l'excès sur 4 du nombre des angles du polygone, forme la troisième *colonne;* et ainsi de suite indéfiniment, suivant la même loi (¹).

(¹) Soit la progression arithmétique commençant à l'unité, et de raison $k-2$: 1, $1+(k-2)$, $1+2(k-2)$, ..., $1+(n-1)(k-2)$, $1+n(k-2)$, ...: le $n^{\text{ième}}$ poly-

48. — Bachet, Appendice, II, 31.

$$« \; a^3 \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \Sigma_1^n (na)^3. \; »$$

Il suit de là que le produit du cube du plus grand nombre $[(na)^3]$ par le nombre des termes $[n]$ est plus petit que le quadruple de la somme des cubes $[\Sigma_1^n (na)^3]$.

gone de k angles est la somme des n premiers termes

$$P_n^k = \frac{n}{2}[n(k-2)-(k-4)] = n + \frac{n(n-1)(k-2)}{2}.$$

Si, dans la même progression, on désigne par Σ_m la somme des m termes qui suivent les $\frac{m(m-1)}{2}$ premiers, on aura

$$\Sigma_m = P^k_{\frac{m(m+1)}{2}} - P^k_{\frac{m(m-1)}{2}} = m + \frac{k-2}{2} m(m^2-1).$$

Dès lors, d'après Fermat, la $m^{\text{ième}}$ *colonne*, terme qu'il a forgé :

$$C_m = \Sigma_m - (k-4)\frac{m(m-1)}{2} = m\left[m + \frac{m(m-1)(k-2)}{2}\right];$$

c'est le produit par m du polygone ayant m pour côté.

En supposant $k=4$, le polygone ayant m pour côté devient le carré m^2, et la colonne $C_m = m^3$; on retrouve donc comme cas particulier le théorème énoncé par Bachet et qui était déjà connu dans l'antiquité.

TRADUCTION

DES LETTRES ET DES FRAGMENTS EN LATIN

DANS LA CORRESPONDANCE DE FERMAT.

TRADUCTION

DES LETTRES ET DES FRAGMENTS EN LATIN

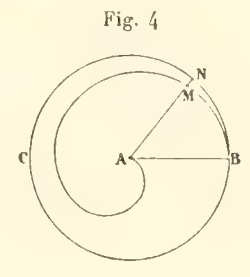
DANS LA CORRESPONDANCE DE FERMAT.

N° 3 (1).

(Lettre de Fermat à Mersenne, du 3 juin 1636.)

4. ... Soit dans le cercle CNB (*fig.* 4) la spirale AMB dont la propriété soit telle que, si l'on mène une droite quelconque, par exemple AMN, le rapport de la circonférence totale du cercle à l'arc NCB soit égal au rapport de AB^2 à AM^2.

Fig. 4



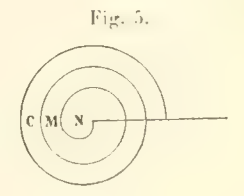
Cette spirale diffère de celle d'Archimède en ce que, dans cette dernière, c'est au rapport de AB à AM que se trouve égal le rapport de la circonférence à l'arc NCB.

Je dis que l'aire comprise entre la spirale et la droite AB est la moitié de l'aire du cercle; en second lieu, et c'est là une propriété bien remarquable, que l'aire engendrée par la première révolution,

(1) Pour le n° 2 de la Correspondance (*Proposition géostatique*), *voir* la traduction par Mersenne, Tome II, pages 10 et 11.

aire marquée N (*fig.* 5), est la moitié de l'aire M engendrée par la seconde révolution, tandis que l'aire C engendrée par la troisième

Fig. 5.



révolution est précisément égale à cette aire M, et qu'il en est de même pour chacune des autres aires engendrées par les révolutions suivantes; toutes ces aires consécutives sont donc égales entre elles.

N° 5.

NOUVEAUX THÉORÈMES DE MÉCANIQUE.

PAR M. DE FERMAT.

1. Il y a déjà longtemps que je soupçonnais qu'Archimède n'a pas établi avec assez de rigueur les fondements de la Mécanique; il est clair en effet qu'il suppose parallèles entre eux les mouvements de chute des graves et, sans cette hypothèse, ses démonstrations ne peuvent subsister. Je ne nie pas au reste qu'elle ne soit en accord, autant qu'on peut le désirer, avec l'expérience sensible; car, en raison de la grande distance du centre de la Terre, on peut supposer parallèles les lignes de chute des graves, de même qu'on suppose que les rayons solaires sont parallèles entre eux. Mais, pour qui recherche la vérité intime et précise, une pareille hypothèse ne peut être satisfaisante.

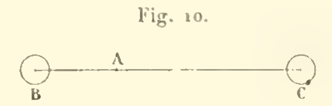
Il semble donc qu'il faille considérer en général, pour un lieu quelconque du monde, les propriétés des leviers, et, pour les déterminer, recourir, en Mécanique, à de nouveaux fondements empruntés à des principes immédiatement vrais. J'énoncerai seulement les propositions de cette nouvelle science, me réservant de donner les démonstrations en temps et lieu.

2. J'imagine ou plutôt je considère deux genres de leviers : l'un dont le mouvement est seulement rectiligne, non pas circulaire; l'autre dont les extrémités décrivent des cercles, et qui est le seul dont les anciens se soient occupés; ils n'ont pas, au contraire, reconnu le premier, qui pourtant semble beaucoup plus simple.

J'éclaircis par des exemples les propriétés de ces deux genres; le centre du premier doit être supposé le même que celui de la Terre, tandis que le centre du second doit au contraire être nécessairement situé en dehors de ce centre.

3. Soient donc (*fig.* 10) A le centre de la Terre, CB une droite qu'on imagine passer par ce centre et constituer un levier; en B et C je suppose des poids B et C en sorte que l'on ait : : poids B : poids C : : CA : AB. Je dis que le levier CB, dans ces conditions, restera en équilibre.

Fig. 10.

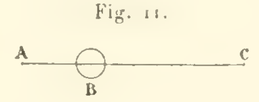


Si, au contraire, on diminue tant soit peu le poids B, le levier se mouvra en droite ligne vers le côté B, tout en passant toujours par le centre A et ce mouvement continuera tant que les distances au centre ne seront pas dans le rapport inverse de celui des poids.

Voilà ma *première proposition*, d'après laquelle on peut dire que la Terre est un grand levier, en imitant Gilbert qui l'appelle un *grand aimant*.

4. Cela posé, j'énonce une autre proposition plus singulière, à savoir que les graves seront d'autant plus facilement soulevés par une puissance (agissant soit sur la surface de la Terre, soit ailleurs) qu'ils seront plus près du centre de la Terre.

Fig. 11.



Soient A ce centre (*fig.* 11), C un point en dehors. Je joins CA dont

je prends un point quelconque B. Si en ce point j'imagine un poids B qui soit suspendu par un fil ou une tige CB, la puissance en C nécessaire pour le soutenir sera à ce poids B dans le rapport AB : AC.

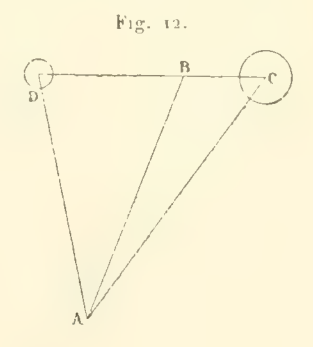
De là on déduit très facilement et l'on démontre que les graves ne pèsent point au centre de la Terre, proposition que l'on a, au reste, déjà cherché à prouver.

5. Le second genre de leviers peut être désigné par le nom d'*Archimède;* mais le rapport inverse entre les distances et les poids (démontré pour le levier simple) ne peut avoir lieu ici et, par conséquent, les propositions VI et VII d'Archimède ne peuvent subsister.

C'est ce que j'affirme avec confiance. Je considère au reste ce levier en général, que les bras soient ou non dans le prolongement l'un de l'autre, qu'ils soient parallèles à l'horizon ou inclinés sur lui.

Une seule démonstration résout toute la question : Soit, en dehors du centre de la Terre A, un levier DBC (*fig.* 12) de centre B, de bras

Fig. 12.



BD et BC. Menons les droites DA, BA, CA et supposons des graves placés en D et C en sorte que l'on ait

$$\frac{\text{poids C}}{\text{poids D}} = \frac{\text{DA}}{\text{CA}} \times \frac{\text{angle BAD}}{\text{angle CAB}}.$$

Je dis que le levier DBC, suspendu au point B, restera en équilibre.

J'affirme la vérité absolue de cette proposition, comme celle des précédentes, et je suis en mesure de l'établir par une démonstration tirée de la Géométrie et de la Physique la plus pure.

6. Par là tombent entièrement les définitions des centres de gravité d'après les anciens; on ne peut en effet trouver, si l'on excepte la sphère, aucun corps qui ait un point tel qu'en suspendant par ce point le corps en dehors du centre de la Terre, il garde la position qu'on lui donne.

Il convient donc de définir le centre de gravité d'un corps comme un point situé à l'intérieur de ce corps et tel que, si on le fait coïncider avec le centre de la Terre, le corps garde la première position qu'on lui donne; c'est, en effet, le seul cas où il y ait réellement un centre de gravité.

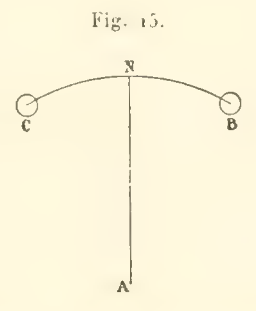
7. Enfin je puis montrer et réfuter l'erreur de Guidobaldo et autres qui croient que le levier peut être en équilibre, même si les bras ne sont pas parallèles à l'horizon.

N° 7.

(Lettre de Fermat à Roberval, août 1636.)

3. ... Soient A le centre de la Terre (*fig.* 15), CNB un levier suivant un arc de cercle décrit de A comme centre avec AN pour rayon.

Fig. 15.

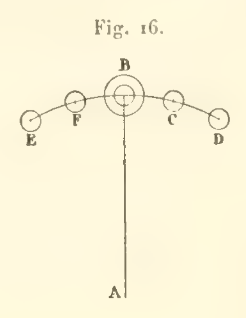


Je suppose égaux les arcs CN, NB et, placés en C, B, des poids égaux. J'admets que le levier CB, suspendu en N, restera en équilibre et qu'il en sera de même si d'autres poids égaux sont placés en d'autres points quelconques des bras CN, NB, pourvu que ces points d'attache soient à égale distance de part et d'autre du point N; en effet, des

poids égaux également distants, d'une part, du centre de la Terre, d'autre part, du centre du levier ou de la balance, ne peuvent détruire l'équilibre.

Soient encore A le centre de la Terre (*fig.* 16), EFBCD un levier en arc comme ci-dessus, de centre ou milieu B. Qu'on place un poids B en B, ou que, le divisant en poids égaux E, F, B, C, D, on place ces parties aux points E, F, B, C, D à des intervalles EF, FB, BC, CD

Fig. 16.



égaux, j'admets que le poids B, placé en B et supporté par ce point B, y pèsera autant que l'ensemble des parties E, F, B, C, D placées sur le levier suspendu en B.

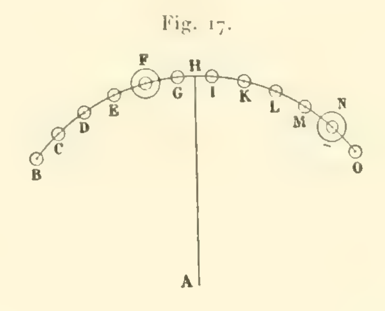
Il en est ainsi parce que, EFBCD étant un arc de cercle, les parties du poids B sont toujours à la même distance du centre de la Terre que le poids total B. L'erreur d'Archimède consiste à n'avoir pas fait cette remarque et à avoir supposé parallèles les lignes de chute des graves.

Ces suppositions faites, je puis démontrer ma proposition. Voici seulement le cas dans lequel le centre du levier est à la même distance que ses extrémités du centre de la Terre (ce cas ne suppose pas la vérité du principe du premier levier géostatique, vérité que vous paraissez mettre en doute).

Soit FHN (*fig.* 17) un levier dont le centre H et les extrémités F, N sont à la même distance du centre de la Terre A. De A comme centre, avec AH pour rayon, je décris l'arc de cercle FHN qui relie les extrémités du levier. Si l'on a : : Poids F : Poids N : : Arc HN : Arc HF, je dis que le levier FHN, suspendu au point H, restera en équilibre.

Il est clair que le rapport des arcs est le même que celui des angles au centre A; il vous sera facile, d'après la construction et les deux

Fig. 17.



axiomes qui précèdent, d'arriver à la conclusion du théorème.

N° 9.

(Lettre de Fermat à Étienne Pascal et Roberval, du 23 août 1636.)

4. ....Axiome I. — Si un grave en repos est suspendu en un point quelconque, il pèse suivant la ligne droite qui joint le point de suspension au centre de la Terre. La vérité de cet axiome est évidente, car autrement le grave ne peut être en repos.

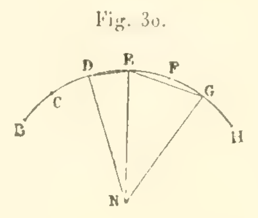
Axiome II. — Dans un levier en arc de cercle, suspendu par son milieu, si de part et d'autre du point de suspension et en des points à égale distance on place des graves égaux, le corps composé de tous ces graves et suspendu par son milieu restera en repos.

Axiome III. — Dans un levier en arc de cercle, moindre qu'une demi-circonférence et ayant pour centre celui de la Terre (ce qu'il faut toujours supposer dans mon levier), si le point de suspension divise inégalement le levier, et que de part et d'autre du point de suspension, sur les points d'une division du levier en parties égales, on place des graves égaux, le corps composé de tous ces graves ne demeurera pas en repos, mais s'inclinera du côté du plus grand bras. Ceci est évident, même dans vos hypothèses; car, si le levier est plus petit que la demi-circonférence, le sinus du plus petit arc sera plus petit que le

sinus du plus grand arc; vous ne nierez donc pas que l'inclinaison ne se fasse du côté du plus grand arc.

Cela supposé, représentons par une figure le levier DEG (*fig.* 30) et achevons la construction à l'exemple d'Archimède. Le grave en D, si on le divise en parties égales suivant les arcs BC, CD, DE, EF, pèsera toujours suivant la droite DN; car si D est le point de suspension, l'ensemble reste en repos (axiome II); donc il pèse suivant DN (axiome I). Donc, soit que le grave soit tout entier en D, soit qu'il soit distribué également par parties sur les arcs BC, CD, DE, EF, il pèse toujours suivant la même droite DN.

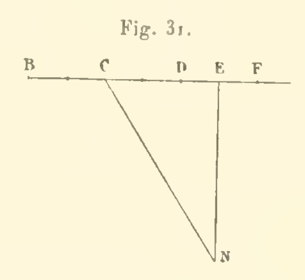
Fig. 30.



De même, le grave en G, qu'il soit tout entier en ce point, ou qu'il soit distribué par parties égales sur les arcs FG, GH, pèsera toujours suivant la droite GN. Mais, comme les graves disposés sur les arcs égaux BC, CD, DE, EF, FG, GH sont égaux, l'ensemble total pèsera suivant la droite EN; la conclusion s'ensuit évidemment, ou bien il est aisé de l'établir par une réduction à l'absurde, en se servant de l'axiome III.

Il est certain qu'Archimède a raisonné d'une façon tout à fait sem-

Fig. 31.

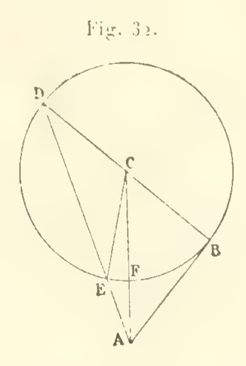


blable; car il prend, par exemple, en C (*fig.* 31) le centre de gravité de la droite BD pour prouver que des graves égaux, situés en B, D,

pèsent suivant la droite CN; mais l'hypothèse qu'il fait à cet égard n'est vraie que pour la balance DEF perpendiculaire à la droite EN : elle est fausse pour les autres qui sont rencontrées sous des angles inégaux par les droites issues du centre de la Terre. Dans mon levier, cette difficulté ne se présente pas, puisque toujours et en tout point la droite issue du centre de la Terre le rencontre normalement.

Soient DCB une balance (*fig.* 32), A le centre de la Terre, C celui

Fig. 32.



de la balance; décrivez le cercle de centre C et de rayon CB. Joignez DEA, BA, CFA et CE. Supposez en B et D des poids égaux, et soit l'angle ACD plus grand que l'angle ACB; je dis que la balance, si elle est suspendue au point C, s'inclinera du côté de B, et cela suivant les suppositions mêmes d'Archimède.

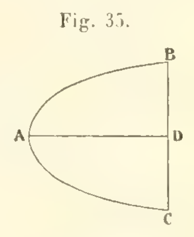
Transportons en effet le poids D en E; d'après Archimède, le poids agit toujours comme s'il était en D, puisqu'il reste sur la droite joignant le point D au centre de la Terre. Si donc on suppose qu'il est retenu en E par la droite CE, les bras CE et CB seront en équilibre, si l'on suppose que CB et CD soient en équilibre. Les angles ECF, FCB seront donc égaux, car un triangle isoscèle, aux extrémités duquel on place des poids égaux, doit se mouvoir tant que la perpendiculaire à l'horizon, c'est-à-dire la droite qui joint le sommet au centre de la Terre, ne bissecte pas l'angle au sommet; c'est au reste ce dont témoigne l'expérience. Mais l'angle ECB est double de l'angle en D; donc l'angle FCB est égal à l'angle en D. Donc les droites CA, DA sont parallèles, ce qui est absurde; donc la balance ne restera pas en équi-

libre, mais elle s'inclinera du côté de B, puisque l'angle BCF est évidemment plus grand que l'angle ECF.

. . . .

7. Soit une parabole AB (*fig.* 35) de sommet A; si l'on fait tourner la figure DAB autour de la droite DA prise comme axe fixe, on engendrera le conoïde parabolique d'Archimède, dont le volume est à celui du cône de même base et de même sommet dans le rapport de 3 à 2.

Fig. 35.



Mais si l'on fait tourner la même figure DAB autour de la droite DB prise comme axe, on engendre un conoïde d'un nouveau genre; on demande de trouver le rapport de son volume à celui du cône de même base et de même sommet, question qui n'est pas sans difficulté.

J'ai démontré que ce rapport est celui de 8 à 5; j'ai également trouvé le centre de gravité du même conoïde.

N° 12.

(Lettre de Fermat à Mersenne pour Sainte-Croix, septembre 1636.)

Mon Révérend Père,

1. Quoique j'aie à dire que je ne suis point un Œdipe, mais un Dave, et que j'avoue très volontiers que je ne suis point parvenu à résoudre la question de M. de Sainte-Croix, je vous demanderai la permission de vous adresser, en échange des nombres qu'il a divulgués, la solution de votre problème, et de lui proposer à mon tour quelques questions qu'il ne débrouillera pas, je crois, de si tôt, malgré les promesses qu'il vous fait et la singulière puissance de son esprit.

2. Pour rendre donc l'épreuve plus honorable, ainsi qu'il le dit, en choisissant des problèmes plus difficiles, voici ceux que je propose :

1° Trouver un triangle rectangle en nombres, tel que son aire soit un carré.

2° Étant donnée la somme de l'hypoténuse d'un triangle rectangle en nombres et du produit des trois côtés, trouver les limites entre lesquelles l'aire se trouve comprise.

Ne vous étonnez pas de l'addition d'une longueur et d'un solide; car dans les problèmes numériques, comme on le sait, toutes les quantités sont homogènes.

3° Trouver deux bicarrés dont la somme soit un bicarré ou deux cubes dont la somme soit un cube.

4° Trouver trois carrés formant une progression arithmétique dont la raison soit également un carré.

3. A ces quatre problèmes, j'ajouterai deux théorèmes que j'ai découverts et dont j'attendrai la démonstration de M. de Sainte-Croix. Si mon attente est vaine, je donnerai cette démonstration. Les deux propositions sont d'ailleurs très remarquables :

1° Tout nombre est la somme de 1, 2 ou 3 triangles; de 1, 2, 3 ou 4 carrés; de 1, 2, 3, 4 ou 5 pentagones; de 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 hexagones; de 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 heptagones; et ainsi de suite indéfiniment.

Diophante paraît supposer la seconde partie de ce théorème et Bachet s'est efforcé d'en confirmer la vérité par l'expérience, mais il n'a pas donné de démonstration. Je crois avoir été le premier à découvrir cette proposition si générale et si belle; mais je ne sais pas si je puis, à titre de réciprocité, demander qu'elle soit admise.

2° Si l'on retranche l'unité du produit par 8 d'un nombre quelconque, on a un nombre qui est seulement somme de quatre carrés, non seulement en entiers, ce que d'autres peuvent avoir reconnu, mais même en nombres fractionnaires, ce que je m'engage à démontrer.

Cette proposition entraîne des conséquences remarquables, qui peuvent être à la main de M. de Sainte-Croix, mais semblent en tout cas avoir inutilement tenté le génie et les efforts de Bachet.

4. Avant de résoudre la question que vous avez proposée sur les cubes, je répondrai à ce que vous me demandez pour le nombre 672, que je ne crois nullement qu'il soit le seul à satisfaire à la condition imposée; mais, avec ma méthode, c'est le seul qui se présente après 120.

Cependant, dans les questions de ce genre, rien n'empêche qu'avec une autre méthode on ne rencontre d'autres nombres satisfaisant à la condition proposée; si M. de Sainte-Croix en a de la sorte obtenu d'autres, je serais très heureux qu'il voulût bien me les communiquer en même temps que sa méthode. Les questions de ce genre sont, en effet, très belles et très difficiles et personne, que je sache, ne les a encore traitées; j'ai obtenu, par un procédé particulier, des solutions pour un nombre indéfini de questions.

5. Quant au problème sur les nombres 3 et 11, j'avoue qu'il me paraît des plus difficiles et qu'après beaucoup de tentatives je n'en possède pas encore la solution. Je croirais, jusqu'à preuve du contraire, que cette solution est plutôt due au hasard qu'à la Science; mais je me trompe probablement plutôt que M. de Sainte-Croix. S'il consent à faire connaître les nombres qu'il a trouvés, je lui demanderai d'ajouter le procédé suivi pour les construire.

6. Enfin, pour votre question des cubes, voici comment je la conçois :

Étant donnés autant de nombres en progression arithmétique que l'on voudra, et connaissant la raison de la progression et le nombre des termes, trouver la somme de leurs cubes.

7. Premier cas : le premier terme est 1, et la raison de la progression est également l'unité.

Soient proposés autant de nombres que l'on voudra, par exemple

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

la somme de leurs cubes est égale au carré du triangle ayant le nombre des termes pour côté. S'il y a 9 termes, comme dans le cas proposé, le triangle est 45, et son carré, 2025, sera égal à la somme des cubes.

Cette proposition, pour ce premier cas, a été démontrée par Bachet et par d'autres; les cas suivants ont été trouvés par moi.

8. Si le premier terme est l'unité, la raison de la progression étant un nombre quelconque, par exemple 4 dans la progression

1, 5, 9, 13, 17,

je prends le triangle ayant pour côté la somme du dernier terme et de la raison moins l'unité. Ce triangle est 210 et son carré 44100.

De ce carré, je retranche :

1° La somme des cubes d'autant de nombres commençant à l'unité et dans la progression naturelle, qu'il y a d'unités dans la raison de la progression moins 1; cette somme doit être, d'autre part, multipliée par le nombre des termes.

Dans l'exemple proposé, le produit à soustraire d'après cette règle est 180.

2° Le triple de la somme des carrés d'autant de nombres commençant à l'unité et dans la progression naturelle, qu'il y a d'unités dans la raison moins 1; ce triple doit être, d'autre part, multiplié par la somme des termes de la progression donnée.

Dans l'exemple proposé, le nombre à soustraire d'après cette règle est 1890.

3° Le triple de la somme d'autant de nombres commençant à l'unité et en progression naturelle, qu'il y a d'unités dans la raison moins 1; ce triple doit, d'autre part, être multiplié par la somme des carrés des termes de la progression donnée.

Dans l'exemple proposé, le nombre à soustraire d'après cette règle est 10170.

Ainsi la somme des nombres à retrancher de 44100 est 12240; le reste est 31860; je le divise par 4, raison de la progression, et j'ai ainsi le nombre 7965 qui est la somme des cubes des nombres 1, 5, 9, 13, 17.

La méthode s'applique toujours de la même façon et dans tous les cas.

9. Mais je n'ai pas encore dit comment on doit calculer tant la somme des nombres 1, 5, 9, 13, 17 que la somme de leurs carrés, ce qui est indispensable pour effectuer la seconde et la troisième opération.

La règle pour le premier calcul est donnée par Bachet dans son opuscule *Des nombres polygones;* quant au second, on opérera comme suit :

Prenez la somme des carrés d'autant de nombres commençant à l'unité et en progression naturelle, qu'il y a d'unités dans la somme du plus grand terme de la progression et de la raison moins 1.

Le calcul de cette somme est facile, d'après ce qu'Archimède en a dit dans son livre *Des spirales.*

De cette somme retranchez :

1° La somme des carrés d'autant de nombres commençant à l'unité et en progression naturelle, qu'il y a d'unités dans la raison de la progression moins 1. Vous aurez multiplié cette somme par le nombre des termes;

2° Le double de la somme d'autant de nombres commençant à l'unité et en progression naturelle, qu'il y a d'unités dans la raison de la progression moins 1. Vous aurez multiplié ce double par la somme des termes de la progression donnée.

Après ces soustractions, vous divisez le reste par la raison de la progression, et vous aurez la somme des carrés des termes.

Des règles données pour ces deux cas vous pourrez immédiatement ou sans grande difficulté déduire celles qui s'appliquent aux autres.

10. Au reste je n'ai pas voulu m'arrêter là, mais j'ai résolu le problème qui est peut-être le plus beau de toute l'Arithmétique, c'est-à-dire celui où l'on cherche, pour une progression quelconque, non plus seulement la somme des carrés ou des cubes des termes, mais celle des puissances quelconques, pour tous les degrés jusqu'à l'infini, bicarrés, carrécubes, bicubes, etc.; la méthode étant aussi générale que possible.

11. Pour que M. de Sainte-Croix sache que je n'attends à cet égard ni un sphinx, ni un Œdipe, voici la solution du problème pour la somme des bicarrés. On peut l'énoncer comme suit sous forme de théorème :

Soient pris à partir de l'unité autant de nombres que l'on voudra en progression naturelle; si l'on ajoute 2 au quadruple du dernier et qu'on multiplie la somme par le carré du triangle qui est la somme des nombres, après avoir retranché du produit la somme des carrés des termes, on aura le quintuple de la somme de leurs bicarrés.

Exemple : Soient pris les nombres 1, 2, 3, 4; en ajoutant 2 au quadruple du dernier, on a 18, qu'il faut multiplier par 100, carré du triangle somme des nombres; du produit 1800 on retranche la somme des carrés des termes, c'est-à-dire 30. Il reste 1770, dont le cinquième, 354, est égal à la somme des bicarrés.

Je résous de même le problème pour une progression quelconque, en imitant la construction qui précède.

Si vous ou M. de Sainte-Croix le désirez, je vous communiquerai la méthode générale pour les puissances quelconques jusqu'à l'infini.

12. En attendant, j'ajouterai une très belle proposition que j'ai trouvée et qui m'a fourni la lumière pour les questions de ce genre :

Dans la progression naturelle, on a le double du triangle ayant pour côté le dernier nombre, en multipliant celui-ci par le nombre immédiatement supérieur; on a le triple de la pyramide ayant pour côté le dernier nombre, en multipliant celui-ci par le triangle du nombre immédiatement supérieur; on a le quadruple du triangulo-

triangle du dernier nombre, en multipliant celui-ci par la pyramide du nombre immédiatement supérieur; et ainsi de suite à l'infini, par une méthode uniforme.

13. Pour votre proposition des triangles rectangles, elle me semble énoncée dans votre lettre avec quelque peu d'obscurité; je la résoudrai peut-être, si vous me la proposez plus clairement.

Votre tout dévoué,

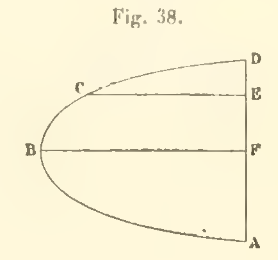
FERMAT.

N° 13.

(Lettre de Fermat à Roberval, du 22 septembre 1636.)

6... Si autour de la droite DA (*fig.* 38) on fait tourner la parabole qui a B pour sommet, BF pour axe et AF pour ordonnée, on

Fig. 38.



engendre un conoïde d'une nouvelle espèce qui est tel que, si on le partage en deux parties égales par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, sa moitié sera au cône de même base et de même hauteur dans le rapport de 8 à 5.

Si au contraire on le coupe en deux parties inégales par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, soit en E par exemple, le rapport du segment de conoïde ABCE au cône de même base et de même hauteur sera $\frac{5ED^2 + 2AE.ED + DF.AE}{5ED^2}$; et de même le rapport du segment de conoïde DCE au cône de même base et de même hauteur sera $\frac{5AE^2 + 2AE.ED + DF.DE}{5AE^2}$.

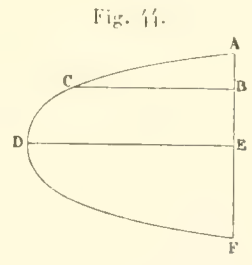
N° 15.

(Lettre de Fermat à Roberval, du 4 novembre 1636.)

7. Soit la parabole ACDF (*fig.* 44) d'axe DE, de base AF. Menons une droite CB parallèle à DE et par suite perpendiculaire à AF. Si l'on fait tourner la figure ADE autour de DE comme axe, on engendre le conoïde d'Archimède; autour de AE comme axe, on a au contraire mon conoïde.

Si maintenant on fait tourner la figure ACB autour de AB comme axe, on aura un segment de mon conoïde; mais autour de CB comme axe, on engendrera encore un conoïde d'une autre espèce. On demande le rapport de son volume à celui du cône de même base et de même hauteur.

Fig. 44.

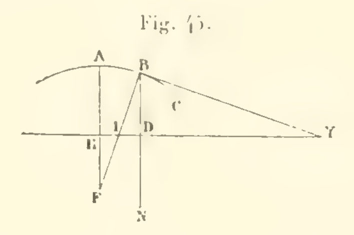


J'ai résolu ce problème : j'ai même trouvé mieux, un ellipsoïde tel que si vous trouvez le cône de même volume, je donnerai la quadrature du cercle. Mais ce sera pour une autre fois.

. . . .

9. Soit ABC (*fig.* 45) une conchoïde de pôle B et d'intervalle HA. Soit B un point donné sur cette conchoïde.

Fig. 45.



Je dis en premier lieu que cette courbe doit être représentée con-

vexe vers le bas de la figure, quoique Pappus et Eutocius aient jugé différemment.

En second lieu, je construis comme suit la tangente : Joignez FIB, abaissez la perpendiculaire BD; construisez DN par la condition

$$BF \times FI + BD^2 = BD \times DN$$

et DY par la suivante : $\frac{ID}{DN} = \frac{BD}{DY}$.

La droite YB sera tangente à la conchoïde.

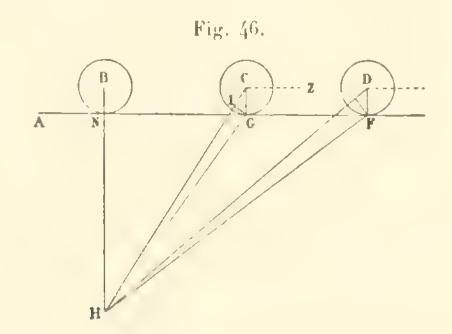
N° 16.

Objections de M. de Fermat contre une proposition mécanique de M. de Roberval.

Si cette proposition mécanique de M. de Roberval était vraie, que dans un levier quelconque les poids doivent être, pour l'équilibre, en raison inverse des perpendiculaires abaissées du centre du levier sur les lignes de direction, la proportion qu'il donne, dans son Traité, entre le grave et la puissance sur le plan incliné, ne pourrait subsister. Je le démontre manifestement :

Soit (*fig.* 46) un point N sur la surface de la Terre, H le centre de la Terre. Je joins NH, et je mène ANGF perpendiculaire à HN; cette

Fig. 46.



droite ANGF est une des parallèles à l'horizon pour ceux qui sont au point N. Soient enfin des sphères de centres B, C, D, tangentes en N, G, F à la droite ou au plan par ANGF.

En premier lieu, il est clair que la sphère B sera mise en mouvement par une puissance aussi faible que l'on voudra, ce que M. de Roberval ne nie pas; que, d'autre part, si elle est placée au point N, elle y sera en équilibre; mais, au contraire, elle n'y restera en aucun autre point du plan.

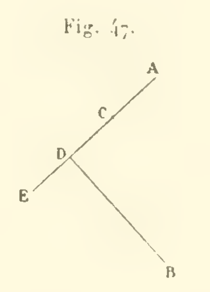
Achevez la figure comme ci-contre. La droite HG, qui joint le point de contact G au centre H de la Terre, fait un angle obtus avec CG; donc la sphère C se mettra en mouvement dans le sens GN. Il en sera de même pour la sphère D. Soit donc en Z une puissance retenant la sphère C par une tendance parallèle à ANGF, c'est-à-dire suivant ZC. Imaginez un levier de centre fixe G et abaissez sur HC la perpendiculaire GI.

La tendance de la sphère C au mouvement naturel est dirigée suivant CH, celle qui la retient est dirigée suivant CZ, droite à laquelle GC est perpendiculaire. Donc, d'après l'hypothèse de M. de Roberval, GI : GC :: Puissance Z : Poids C. C. Q. F. D.

Mais pour retenir la sphère D, il faudra une puissance supérieure, et cette puissance devra être d'autant plus forte que la sphère sera plus éloignée du point N (ce qui est remarquable), tandis que M. de Roberval admet que le rapport de la puissance au poids ne varie pas pour un plan donné. Il peut voir combien cela est éloigné de la vérité.

Soient (*fig.* 47) B le centre de la Terre, ACDE un plan incliné. Qu'en

Fig. 47.



A et en C la puissance nécessaire pour retenir le grave soit la même, cela pouvait paraître rationel aux yeux de M. de Roberval.

Mais, si l'on abaisse la perpendiculaire BD, puisqu'il y a équilibre

en D et que la puissance qui y retient est aussi faible que l'on voudra, comment sa proposition peut-elle subsister?

Ma démonstration est d'ailleurs valable pour un plan quelconque, car tout plan est parallèle à un certain horizon.

Ainsi ce qu'a démontré M. de Roberval est renversé et une voie très facile s'ouvre pour établir une nouvelle proportion en rapport avec ses hypothèses.

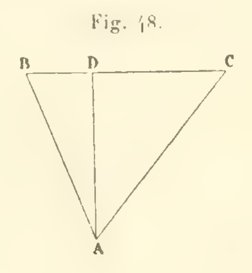
Je voulais ajouter une seconde figure pour exposer ce que je pense de sa dernière proposition, mais je n'ai pas le temps.

N° 17.

(Lettre de Fermat à Roberval du 7 décembre 1636.)

1... Soient BDC un levier (*fig.* 48), D son milieu, A le centre de la Terre, DA perpendiculaire au levier. Soient en B et C des poids

Fig. 48.



égaux, tendant naturellement vers le centre de la Terre suivant les droites BA, CA; que le levier soit suspendu en D et maintenu par une puissance quelconque; je dis que les corps B et C pèsent autant que s'ils étaient réunis en D et soutenus par la même puissance.

N° 18.

(Lettre de Fermat à Roberval du 16 décembre 1636.)

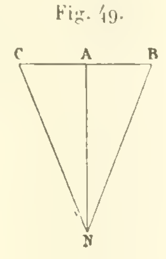
8... Pour les paraboles cubiques, carrécubiques et ainsi de suite indéfiniment de deux en deux puissances, la méthode dont je me suis servi ne donne pas le rapport des conoïdes aux cônes; j'ai au contraire

une méthode qui donne le centre de gravité pour tous les conoïdes sans exception; votre proposition permettrait donc de trouver leur rapport aux cônes.

10... Soit un levier CAB (*fig.* 49), dont le milieu A est joint au centre N de la Terre par une droite AN perpendiculaire au levier. Soient en C et B des poids C et B égaux et semblables, qui tendent vers le centre suivant les droites CN, BN.

D'après votre principe, si ces droites NC, NB étaient perpendiculaires au levier, celui-ci serait maintenu en équilibre par une puissance en A égale à la somme des poids B et C. Mais, puisque ces droites font des angles aigus NCA, NBA, il faut en A pour l'équilibre une puissance qui sera soit la même, soit plus petite, soit plus grande.

Fig. 49.



Si la même puissance détermine l'équilibre, le principe dont je me suis servi dans ma dernière lettre est vrai; or, si vous accordez ce principe, la démonstration de la proposition de mon levier s'ensuit immédiatement.

S'il faut une puissance soit plus grande, soit plus petite, dans le premier cas, cette puissance devra être d'autant plus grande que les angles des droites CN, BN avec le levier seront plus petits; dans le second cas, elle devra être d'autant plus petite. Soit supposé comme sur la figure, au-dessus du point A, le même levier suivant la même direction; les angles des lignes CN, BN augmenteront évidemment; donc la puissance nécessaire en A pour maintenir l'équilibre variera avec la distance au centre de la Terre, et par suite le poids composé des deux graves B et C variera lui-même avec cette distance.

Vous ne pouvez accorder la première partie du dilemme, sans que votre proposition ne tombe aussitôt; il vous faut donc admettre, ou bien que la puissance en A varie avec la valeur des angles ou bien que, tout en étant toujours la même quelle que soit la valeur de ces angles, elle est différente de la puissance qui soutiendrait le levier si la direction des poids était perpendiculaire à celui-ci.

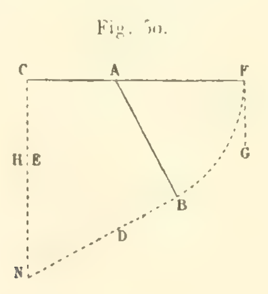
Quelle que soit l'hypothèse que vous choisissiez, il sera prouvé très clairement que dans votre démonstration s'est glissé un paralogisme que la vérité que nous cherchons ne permet pas de dissimuler et que peut-être vous-même devrez reconnaître.

11. Sur la première figure (*fig.* 50), qui est la quatrième de votre Lettre, voici ce que vous dites ([1]) :

. . . .

C'est là-dessus que repose toute votre démonstration.

Fig. 50.



Mais en premier lieu, si vous dites que, pour toute valeur des angles égaux, la puissance nécessaire à l'équilibre est toujours la même, je démontrerai immédiatement ma proposition du levier; il vous faut donc accorder que cette puissance varie avec les angles.

Ceci admis, soit sur la figure N le centre de la Terre, où concourent les droites CE, BD, et soient en E et D des graves dans le rapport donné, ce qu'on est libre de supposer, d'après votre construction.

Au reste elle n'a pour objet que de trouver le rapport des poids sur

([1]) *Voir* le texte français, t. II, p. 79, ligne 10 à page 80, ligne 4.

le levier en équilibre au moyen de puissances imaginaires qui pour toutes leurs parties agissent toujours suivant une même direction; car autrement des puissances de ce genre, qui n'existent nullement dans la nature, seraient absolument inutiles.

Vous supposez en H et G des puissances égales aux poids E et D et agissant pour toutes leurs parties suivant une même direction. Puis vous concluez, par votre premier axiome, que les effets des puissances H et E sont égaux; la puissance H agissant en C suivant HC perpendiculairement au levier, et le poids E agissant suivant la même perpendiculaire, ces puissances étant égales, agissant suivant la même droite, suivant le même angle sur le levier et à la même distance de son centre, l'action du poids E ne peut, suivant vous, différer de celle de la puissance imaginaire H.

Si vraisemblable que paraisse cette conclusion, elle ne peut que paraître très fausse à qui recherche la vérité intime des choses.

Supposons, par exemple, que le poids E soit sphérique; toutes ses parties tendent vers le centre N suivant des droites qui concourent à ce centre et dont les prolongements rencontrent le levier AC sous des angles aigus. Par conséquent, elles forment un ensemble de puissances agissant de part et d'autre du point C à des distances égales deux à deux, suivant des distances obliques par rapport au levier. Au contraire, toutes les parties de la puissance H étant supposées agir suivant une même direction, elles forment un ensemble de puissances agissant de part et d'autre du point C à des distances égales deux à deux, mais suivant des directions normales par rapport au levier.

Or, puisque la somme de toutes les parties de la puissance H est égale à la somme de toutes les parties de la puissance ou poids E (puisqu'on suppose que la puissance H est égale au poids E), il s'ensuit, d'après ce qui a été établi, que les effets des puissances H et E agissant en H et E sont inégaux; par suite, ce que notre démonstration conclut justement pour la puissance H est étendu à tort au poids E.

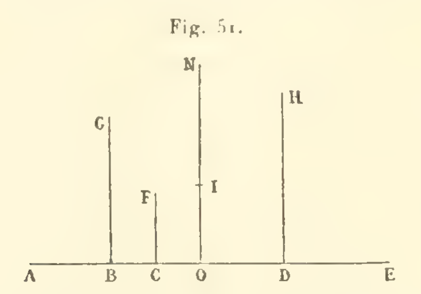
N° 19.

(Lettre de Fermat à Roberval, de février 1637.)

1. Soient donnés autant de points que l'on voudra, par exemple cinq, A, G, F, H, E (*fig.* 51) (mais la proposition est générale), on demande de trouver un cercle tel que, si d'un point quelconque de la circonférence on mène des droites aux points donnés, la somme des carrés de ces droites soit égale à une aire donnée.

Je joins deux points quelconques A, E; des autres points donnés j'abaisse sur la droite AE les perpendiculaires GB, HD, FC. Je prends une fraction conditionnée, le cinquième dans l'exemple choisi, de la somme de tous les segments limités sur AE d'un côté par le point A, de l'autre par les points donnés ou les pieds des perpendiculaires; ainsi soit $AO = \frac{1}{5}(AB + AC + AD + AE)$; en O j'élève une perpendiculaire indéfinie ON sur laquelle je prends OI égale à la même fraction conditionnée par le nombre des points (ici un cinquième) de la somme des perpendiculaires GB, FC, HD. Je suppose enfin menées

Fig. 51.



les cinq droites AI, GI, FI, HI, EI. La somme de leurs carrés doit être inférieure à l'aire donnée; retranchez-la donc de cette aire et soit par exemple Z^{pl} la différence. Prenez-en le cinquième (c'est-à-dire la fraction conditionnée) et construisez le carré équivalent M^2. Le cercle décrit de I comme centre, avec M pour rayon, satisfera à la question; c'est-à-dire que, quelque point que vous preniez sur sa circonférence, la somme des carrés des droites qui le joignent aux points donnés sera égale à l'aire donnée.

J'ajouterais bien la démonstration, mais elle est assez longue; et je préfère vous inviter tous deux à la chercher.

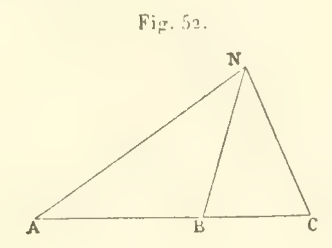
2. Je n'ai pas seulement trouvé ces propositions, mais en général toutes celles des lieux plans, et même beaucoup de lieux dont Apollonius n'a rien écrit et qui cependant sont très beaux. Par exemple :

Étant donnés trois points A, B, C (*fig.* 52) en ligne droite, trouver une circonférence de cercle telle que, si l'on en prend un point N quelconque, $AN^2 + NB^2 - NC^2$ soit égal à une aire donnée.

J'ai également fait de nombreuses découvertes sur les lieux solides et en surface.

Je n'ajoute pas les cas du premier lieu plan ci-dessus; ils se distinguent immédiatement. Si les points donnés sont au nombre de trois seulement et forment par suite un triangle, le centre du cercle formant le lieu est le centre de gravité de ce triangle, proposition singulière et assez remarquable.

Fig. 52.



3. Mais je ne m'arrête pas là. J'établis la proposition sous une forme très générale et j'en ai fait la construction :

Trouver le cercle lieu des points tels que si l'on joint l'un d'eux à autant de points donnés que l'on voudra, et que l'on augmente ou diminue dans un rapport donné chacun des carrés des droites ainsi menées, la somme des carrés ainsi augmentés ou diminués soit égale à une aire donnée.

Exemple : Soient donnés, sur la figure précédente, les trois points A, B, C; on demande un cercle tel que, si l'on prend sur sa circonférence un point N quelconque, $\frac{1}{2}NA^2 + 2BN^2 + 3CN^2$ par exemple, fasse une

aire donnée. Étendre la construction à un nombre quelconque de points et à des coefficients quelconques.

Apollonius ne semble pas avoir connu cette proposition qui est certainement très belle.

N° 36.

(Lettre de Fermat à Mersenne, du 26 décembre 1638.)

4. Si autant de points donnés que l'on voudra sont joints à un même point par des droites et si la somme des carrés de ces droites est égale à une aire donnée, leur point de concours sera sur une surface de sphère donnée de position.

N° 37.

(Lettre de Fermat à Mersenne, du 20 février 1639.)

4. « $x^3 - 9x^2 + 13x = \sqrt{288} - 15$.

On demande la valeur de x. Ce problème reçoit trois solutions dont nous donnons la première, $3 - \sqrt{2}$, qui satisfait exactement à la question. Qui donnera les deux autres sera pour nous un grand oracle. »

Ces deux autres solutions sont : $3 + \sqrt{18}$ et $3 - \sqrt{8}$.

N° 42.

(Lettre de Fermat à Roberval, août 1640.)

6. Par un point donné à l'extérieur ou à l'intérieur d'une parabole, mener une droite qui détermine un segment de parabole d'aire donnée. Si le point est intérieur à la parabole, déterminer l'aire minima qui peut être ainsi retranchée de la parabole par une droite passant par le point donné.

N° 62.

(Lettre de Fermat à Gassendi, 1646?)

1. Galilée a défini mouvement uniformément accéléré celui dans lequel, à partir du repos, les accroissements de vitesse sont égaux pour des temps égaux.

Quant à celui dans lequel les accroissements de vitesse seraient égaux pour des espaces parcourus égaux, il dit qu'il convient d'autant moins pour représenter le mouvement de chute des graves, que, suivant cette hypothèse, le mouvement se ferait dans un instant, comme il pourrait, dit-il, le démontrer très facilement.

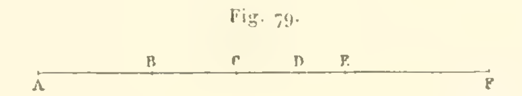
On peut, pourvu qu'elle soit vraie, accorder à ce perspicace lyncéen la conclusion qu'il n'a pas démontrée. Mais s'il a, du premier coup d'œil, vu ou cru voir dans l'obscurité la démonstration, on ne s'étonnera pas qu'elle soit réclamée par ses lecteurs, qui ne sont pas lyncéens.

Pour maintenir donc l'honneur de Galilée et pour faire qu'il n'y ait plus de doute sur sa proposition et qu'on n'en dispute plus en invoquant des raisons seulement probables, je vous envoie cette démonstration suivant la méthode d'Archimède.

2. Si autant de droites que l'on voudra, issues d'un même point, sont en progression géométrique continue, leurs différences seront également en progression suivant la même raison.

Soient, par exemple, les droites AF, BF, CF, DF, EF, etc. (*fig.* 79) en progression continue, leurs différences AB, BC, CD, DE seront en progression suivant la même raison.

Fig. 79.



En effet, si AF : BF :: BF : CF, et que l'on retranche respectivement chacun des deux derniers termes du premier qui lui correspond, on aura dans le même rapport AB : BC :: AF : BF, et de même pour les autres. On prouvera de même que AF : CF :: AB : CD; que

BF : DF :: BC : DE, etc.

3. Si l'on imagine un point se mouvant de F vers A (*fig.* 80) d'un mouvement continuellement accéléré suivant le rapport des espaces parcourus, et que l'on prenne une série de longueurs en progression

continue, comme AF, BF, CF, DF, EF, etc., le temps dans lequel l'espace DE sera parcouru sera égal au temps du parcours de l'espace DC;

Fig. 80.

en un mot, chacun des espaces ED, DC, CB sera parcouru dans un même temps.

4. Je prouverai d'abord que les espaces CB, BA sont parcourus dans le même temps, d'après l'hypothèse faite sur le mouvement.

Si le temps pour AB n'est pas égal en effet au temps pour BC, il sera soit plus grand, soit plus petit.

Supposons-le d'abord plus grand. Le rapport du temps pour AB au temps pour BC sera donc celui d'une longueur plus grande que BF à BF. Soit Z cette droite, on aura : Temps AB : Temps BC :: Z : BF.

Prenez entre AF, BF autant de moyennes proportionnelles RF, MF, NF qu'il faudra pour que la plus petite, soit NF, soit inférieure à Z. Qui ne voit que ce résultat sera nécessairement atteint soit par l'insertion d'une seule moyenne, soit par le redoublement de l'opération effectué autant que de besoin?

De la sorte, AF, RF, MF, NF, BF forment une progression continue, et, comme on a AF : BF :: BF : CF :: AB : BC, on peut continuer la même progression suivant le même rapport, de façon à avoir un même nombre de termes BF, OF, VF, XF, CF, de BF à CF.

Ceci posé, considérons chacun des espaces AR, RM, MN, NB, et comparons-les respectivement aux espaces BO, OV, VX, XC, chacun à chacun, c'est-à-dire AR à BO, etc.

Si, sur l'espace AR, le mouvement était uniforme selon le degré de vitesse acquis en R, et si, sur l'espace BO, le mouvement était également uniforme suivant le degré de vitesse acquis en O, on aurait

$$\frac{\text{Temps pour AR}}{\text{Temps pour BO}} = \frac{\text{AR}}{\text{BO}} \times \frac{\text{Vitesse en B}}{\text{Vitesse en R}},$$

ce qui est bien connu et a, au reste, été démontré par Galilée lui-même, prop. 5 du *Traité du mouvement uniforme*.

Mais, par la première proposition, AR : BO :: AF : BF, et d'après l'hypothèse de l'accélération du mouvement suivant les espaces : Vitesse en B : Vitesse en R :: BF : RF. Donc

$$\frac{\text{Temps pour AR}}{\text{Temps pour BO}} = \frac{AF}{BF} \times \frac{BF}{RF} = \frac{AF}{RF}.$$

Si maintenant on suppose, sur l'espace RM, un mouvement uniforme suivant le degré de vitesse acquis en M, et, sur l'espace OV, un mouvement uniforme suivant le degré de vitesse acquis en O, on prouvera de même que

Temps MR : Temps OV :: RF : MF.

De même, considérant les vitesses aux points N, V :

Temps MN : Temps VX :: MF : NF.

Enfin, considérant les vitesses aux points B et X pour les derniers espaces :

Temps NB : Temps XC :: NF : BF.

Mais, d'après la construction, les rapports AF : RF, RF : MF, MF : NF, NF : BF sont égaux; par suite, en sommant les temps suivant AB et suivant BC, le rapport de ces temps totaux pour des mouvements définis comme nous l'avons dit sera égal au rapport AF : RF ou NF : BF.

Mais le temps du mouvement accéléré sur AR est inférieur au temps du mouvement uniforme sur AR avec la vitesse en R; en effet, par hypothèse, la vitesse croît continuellement de R à A; donc, dans le mouvement accéléré, le mobile va plus vite de R en A que s'il parcourait l'espace RA avec la vitesse qu'il a en R.

On prouvera de même que le temps du mouvement accéléré sur RM est inférieur au temps du mouvement uniforme sur RM, avec une vitesse correspondant à celle acquise au point extrême M.

Enfin on établira que, pour le mouvement accéléré sur la ligne totale AB, suivant l'hypothèse faite, le temps sera moindre que pour

ce mouvement imaginaire composé de mouvements uniformes, avec des vitesses correspondant à celles acquises aux points extrêmes des espaces AB, BM, MN, NB.

Mais, au contraire, le temps du mouvement accéléré sur BO est plus long que celui du mouvement uniforme sur BO avec la vitesse au point B, parce que la vitesse croît toujours de O à B dans le mouvement accéléré, d'après l'hypothèse; elle reste donc toujours inférieure à la vitesse correspondant au point B.

En raisonnant de même, on conclura que, suivant l'hypothèse faite, le mouvement accéléré sur la ligne totale BC demandera un temps plus long que le mouvement imaginaire composé de mouvements uniformes avec les vitesses correspondant aux premiers points des espaces BO, OV, VX, XC.

Ainsi le temps du mouvement accéléré sur AB est moindre que le temps du mouvement imaginaire sur AB, et au contraire le temps du mouvement accéléré sur BC est plus grand que le temps du mouvement imaginaire sur BC; donc le rapport des temps des mouvements accélérés sur AB et BC est moindre que le rapport des temps des mouvements imaginaires sur les mêmes lignes AB et BC. Mais le premier de ces deux rapports a été supposé égal à celui des droites Z : BF; le second a été démontré égal à celui des droites NF : BF. Donc

$$Z : BF < NF : BF,$$

ce qui est absurde, puisque $Z > NF$.

Donc le temps du mouvement accéléré sur AB n'est pas plus grand que celui du mouvement accéléré sur BC. On démontrera avec la même facilité que le temps du mouvement accéléré sur AB n'est pas plus petit que celui du mouvement accéléré sur BC.

Supposons-le en effet plus petit s'il est possible; le rapport des temps des mouvements accélérés sur AB et BC sera donc égal à celui d'une droite inférieure à BF et de BF. Soit G cette droite inférieure à BF, et par suite : Temps AB : Temps BC :: G : BF.

Entre BF et CF intercalons une série de moyennes proportionnelles

dont la plus grande OF soit plus grande que G. En employant le même raisonnement que dans la première partie de la démonstration, et en comparant les espaces sur AB entre les extrémités des moyennes avec les espaces analogues BO, OV, VX, XC, en changeant toutefois les vitesses uniformes, et en supposant, par exemple, que le mouvement sur AR se fasse avec le degré de vitesse acquis en A; que le mouvement sur BO se fasse avec la vitesse acquise en O, et de même pour les autres espaces; il est clair que toutes les vitesses sur AB seront augmentées par la substitution des mouvements uniformes, tandis que sur BC elles seront diminuées, contrairement à ce qui avait lieu d'après les suppositions de la première partie de la démonstration. On conclura dès lors que le rapport des temps des mouvements uniformes sur AR et BO est égal à celui de RF à AF, puisque, si les vitesses augmentent, les temps diminuent.

De même, pour les mouvements uniformes :

$$\text{Temps RM} : \text{Temps OV} :: \text{MF} : \text{MR},$$

et enfin le rapport des temps des mouvements imaginaires composés de mouvements uniformes sur AB et BC sera égal au rapport RF : AF, puisque tous les rapports des temps partiels sont égaux à ce même rapport, qui vaut d'ailleurs OF : BF, d'après la première proposition.

Mais sur AB le temps du mouvement accéléré est plus grand que le temps du mouvement imaginaire composé de mouvements uniformes, puisque nous avons supposé que, dans ces mouvements uniformes, les vitesses sont augmentées (on a pris en effet celles qui répondent aux premiers points des espaces AR, RM, etc.); au contraire, sur BC le temps du mouvement accéléré est moindre que le temps du mouvement imaginaire composé de mouvements uniformes, les vitesses dans ce cas étant diminuées et répondant aux derniers points des espaces BO, OV, etc.

Donc le rapport du temps des mouvements accélérés sur AB et BC est supérieur au rapport des temps des mouvements imaginaires sur les mêmes droites AB et BC. Mais le premier de ces deux rapports est

supposé égal au rapport G : BF; le second a été démontré égal au rapport OF : BF; donc G : BF > OF : BF, ce qui est absurde, puisque G < OF, par construction.

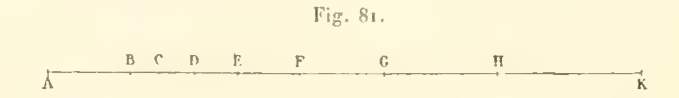
Par conséquent, le temps du mouvement accéléré sur AB n'est pas inférieur au temps du mouvement accéléré sur BC; mais nous avons prouvé qu'il n'est pas non plus supérieur; donc ces deux temps sont égaux.

Par la même raison, il est clair que le temps du mouvement accéléré sur CD est égal à celui du mouvement accéléré, soit sur AB, soit sur BC, et, en continuant indéfiniment le même raisonnement, que tous les espaces sans exception sont parcourus en des temps égaux.

5. Cela établi, une troisième proposition va révéler la pensée de Galilée ou montrer la vérité de son affirmation.

Imaginons le mouvement d'un grave tombant du point A, où il est en repos, jusqu'en H (*fig.* 81), par exemple, et supposons, s'il est pos-

Fig. 81.



sible, que la vitesse de chute s'accélère en raison de l'espace déjà parcouru. Admettons que le mouvement de A à H ait demandé une minute ou tout autre temps déterminé, et supposons que le mouvement se continue de H en K; je dis que le mouvement sur HK se fera en un instant.

Si, en effet, il ne se fait pas en un instant, il demandera un certain temps déterminé, qui pourra être multiplié par un nombre tel que le produit dépasse le temps employé pour parcourir AH. Supposons que ce multiplicateur soit 5, c'est-à-dire que 5 fois le temps du mouvement sur HK fasse plus que le temps du mouvement sur AH.

Prenez GA troisième proportionnelle aux droites KA, HA et continuez la série des proportionnelles suivant la même raison jusqu'à ce que le nombre des espaces entre leurs extrémités surpasse 5; soient

par exemple au delà du point H six espaces donnés par cette progression continue, HG, GF, FE, ED, DC, CB.

Comme on vient de le démontrer, le temps du mouvement sur HG est égal au temps du mouvement sur HK; il en est de même du mouvement sur GF, etc. Donc le temps du mouvement sur HB sera six fois le temps du mouvement sur HK; mais cinq fois le temps du mouvement sur HK fait plus que le temps du mouvement sur AH; donc, *a fortiori*, le temps du mouvement sur HB dépasse le temps du mouvement sur HA, ce qui est absurde.

Donc l'assertion de Galilée est vraie, quoiqu'il ne l'ait pas démontrée.

6. Je vous ai écrit, illustre Gassend, en termes brefs et familiers, voulant seulement vous éviter de nouvelles difficultés de la part de Cazré ou de tout autre adversaire de Galilée; on en viendrait ainsi à des volumes sans fin, alors qu'une seule démonstration peut, de l'aveu même des auteurs, renverser leur travail ou le rendre inutile et superflu.

N° 67.

(Lettre de Fermat à Auzout? 1658.)

Faire toujours disparaître les irrationelles dans les équations algébriques est une opération difficile et qui jusqu'à présent n'a pas été suffisamment travaillée par les analystes.

Supposons, par exemple, plus de quatre radicaux dans une équation dont il faille faire disparaître les irrationelles suivant les règles de l'art. L'analyste ne pourra guère se tirer d'embarras; plus il poussera ses calculs, plus la difficulté augmentera, jusqu'à ce que, fatigué de répéter sans fin les opérations, il reconnaisse qu'il n'a rien changé. L'Analyse doit-elle s'arrêter à cet obstacle et se laisser ainsi imposer silence par les irrationelles? Il faut que les savants étudient cette question et découvrent une méthode satisfaisante.

Soit proposé par exemple :

$$\sqrt{ba - a^2} + \sqrt{z^2 + da + a^2} + \sqrt{ma} + \sqrt{d^2 - a^2} - \sqrt{ra + a^2} = b + a.$$

Que l'analyste opère sur cette équation suivant les règles de l'art et qu'il se débarrasse des radicaux, ou bien qu'il reconnaisse l'insuffisance des règles.

N° 68.

(Lettre de Fermat à Carcavi, du 20 août 1650.)

2. Soit quatre termes irrationels homogènes, dont la somme soit, dans le cas proposé, égalée à une droite, suivant l'équation

$$\sqrt[3]{z^2 a - a^3} + \sqrt[4]{b^4 - d^2 ba + a^4} + \sqrt{ba - a^2} + \sqrt[5]{a^5 - b^4 a} = b + a - e.$$

On demande la tangente en un point donné de la courbe dont cette équation [en *a* et *e*] représente la propriété spécifique.

N° 70.

(Lettre de Pascal à Fermat, du 29 juillet 1654.)

4. Soit un nombre quelconque de lettres, par exemple les huit A, B, C, D, E, F, G, H; formez-en toutes les combinaisons 4 à 4, 5 à 5, 6 à 6, jusqu'à celle des 8. Je dis que, si l'on ajoute à la moitié du nombre des combinaisons 4 à 4 (savoir 35, moitié de 70) le nombre des combinaisons 5 à 5 (qui est 56), celui des combinaisons 6 à 6 (qui est 28), celui des combinaisons 7 à 7 (qui est 8), enfin celui des combinaisons 8 à 8 (c'est-à-dire 1), on a le quatrième terme de la progression géométrique commençant à 2 et ayant 4 pour raison; je dis le quatrième, parce que 4 est la moitié de 8.

Les termes de cette progression géométrique, commençant à 2 et ayant 4 pour raison, sont en effet : 2, 8, 32, 128, 512, etc. Le 1er est 2, le 2e est 3, le 3e est 32 et le 4e est 128; or

$$128 = 35 + 56 + 28 + 8 + 1;$$

ce terme est ainsi la somme des nombres des combinaisons de 4, 5, 6, 7 et 8 lettres.

8. ... La différence de deux cubes consécutifs quelconques, diminuée de l'unité, est égale au sextuple de la somme des nombres jusqu'à la racine du plus petit cube inclusivement.

Soient R et S les deux racines, qui diffèrent d'une unité; je dis que $R^3 - S^3 - 1$ est égale au sextuple de la somme des nombres depuis 1 jusqu'à S.

Soit $S = a$, et par suite $R = a + 1$,

$$R^3 \text{ ou } (a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1^3 \quad \text{et} \quad S^3 \text{ ou } a^3 = a^3.$$

La différence $R^3 - S^3 = 3a^2 + 3a + 1^3$, et en retranchant l'unité,

$$R^3 - S^3 - 1 = 3a^2 + 3a.$$

Mais, d'après le lemme, le double de la somme des nombres depuis 1 jusqu'à S ou a est $a(a+1)$ ou $a^2 + a$. Donc $3a^2 + 3a$ sera le sextuple de cette somme.

Or $3a^2 + 3a = R^3 - S^3 - 1$; donc $R^3 - S^3 - 1$ est le sextuple de la somme des nombres depuis 1 jusqu'à S ou a. C. Q. F. D.

N° 79.

PREMIER DÉFI AUX MATHÉMATICIENS,

3 JANVIER 1657.

B. Proposez, si vous le voulez bien, à Wallis et aux autres mathématiciens anglais, la question numérique suivante :

1. Trouver un cube qui, ajouté à la somme de ses parties aliquotes fasse un cube.

2. Par exemple, $343 = 7^3$. Les parties aliquotes de ce nombre sont : 1, 7, 49; si l'on ajoute 343 à leur somme, on a $400 = 20^2$. On demande un autre cube ayant la même propriété.

3. On demande aussi un nombre carré qui, ajouté à la somme de ses parties aliquotes, fasse un cube.

J'attends la solution de ces questions; si elle n'est fournie ni par l'Angleterre, ni par la Gaule Belgique ou Celtique, elle le sera par la Narbonnaise, qui l'offrira à Sir Digby et la lui dédiera en gage d'une amitié naissante.

N° 81.

SECOND DÉFI AUX MATHÉMATICIENS,

FEVRIER 1657.

Il est à peine quelqu'un qui propose des questions purement arithmétiques, il est à peine quelqu'un qui sache les résoudre. Est-ce parce que l'Arithmétique a plutôt été traitée jusqu'à présent au moyen de la Géométrie que par elle-même? C'est la tendance qui apparaît dans la plupart des Ouvrages tant anciens que modernes, et dans Diophante lui-même. Car s'il s'est écarté de la Géométrie un peu plus que les autres en astreignant son analyse à ne considérer que des nombres rationels, il ne s'en est pas dégagé tout à fait, comme le prouvent surabondamment les *Zététiques* de Viète, dans lesquelles la méthode de Diophante est étendue à la quantité continue, et par suite à la Géométrie.

Cependant l'Arithmétique a un domaine qui lui est propre, la théorie des nombres entiers; cette théorie n'a été que très légèrement ébauchée par Euclide et n'a pas été assez cultivée par ses successeurs (à moins qu'elle n'ait été renfermée dans ces livres de Diophante, dont l'injure du temps nous a privés); les arithméticiens ont donc à la développer ou à la renouveler.

Pour éclairer leur marche, je leur propose de démontrer comme théorème ou de résoudre comme problème l'énoncé suivant; s'ils y parviennent, ils reconnaîtront au moins que des questions de ce genre ne le cèdent ni pour la subtilité, ni pour la difficulté, ni pour le mode de démonstration, aux plus célèbres de la Géométrie :

Étant donné un nombre non carré quelconque, il y a une infinité de carrés déterminés tels qu'en ajoutant l'unité au produit de l'un d'eux par le nombre donné, on ait un carré.

Par exemple, on donne 3, nombre non carré.

$$3 \times 1^2 + 1 = 4 \text{ (carré)},$$
$$3 \times 16 + 1 = 49 \text{ (carré)}.$$

Au lieu des carrés 1 et 16, on peut trouver une infinité d'autres carrés satisfaisant à la condition proposée, mais je demande une règle générale, s'appliquant à tout nombre non carré quelconque qui peut être donné.

On demande par exemple un carré, tel qu'en ajoutant l'unité à son produit par 149 ou par 109 ou par 433, etc., on ait un carré.

N° 84.

(Lettre de Fermat à Digby, du 15 août 1657.)

4. Un nombre, somme de deux cubes, étant donné, le partager en deux autres cubes.

Ce problème n'a été résolu par Diophante que pour les carrés; il ne l'a pas essayé pour les cubes, au moins dans les livres qui nous restent de son grand Ouvrage.

Par exemple, je propose le nombre 28, somme des deux cubes 1 et 27.

Il s'agit de partager ce nombre 28 en deux autres cubes rationels et de donner la solution générale de ce problème.

8. Diophante a proposé de partager un nombre carré en deux carrés, et de même, étant donné un nombre, somme de deux carrés, de le partager en deux autres carrés.

Mais ni lui ni Viète n'ont essayé d'élever la question jusqu'aux cubes; pourquoi hésiter ou différer de traiter une proposition pour laquelle l'honneur de la solution a été réservé aux analystes modernes?

Je propose donc de « partager un nombre cube en deux cubes rationels »; de même : « Étant donné un nombre, somme de deux

cubes, le partager en deux autres cubes rationels », et je voudrais savoir ce qu'on pense de ce problème en Angleterre et en Hollande.

N° 96.

(Lettre de Fermat à Digby, juin 1658.)

1. Que les très illustres Srs Vicomte Brouncker et John Wallis aient enfin donné des solutions légitimes des questions numériques que j'avais proposées, je le reconnais volontiers; bien plus, j'en suis très heureux. Cependant, si vos éminents correspondants n'ont pas voulu avouer que les questions proposées les aient jamais embarrassés, même un seul moment, j'aurais désiré qu'au contraire ils aient bien voulu reconnaître de prime abord que ces problèmes étaient dignes d'être étudiés en Angleterre; leur triomphe eût été d'autant plus éclatant que la lutte eût paru plus difficile. On peut faire cette concession à la fierté d'une nation aussi illustre et aussi féconde en grands génies; mais pour agir désormais en toute franchise, si les Français avouent que les Anglais ont satisfait aux questions proposées, que les Anglais à leur tour reconnaissent que ces questions valaient bien la peine de leur être proposées, et qu'ils ne dédaignent plus d'examiner attentivement et de pénétrer la nature des nombres entiers, qu'enfin ils appliquent la puissance et la subtilité de leur esprit à de nouveaux progrès dans cette théorie.

2. Pour qu'ils me l'accordent plus volontiers, je leur proposerai un exemple tiré de Diophante et de son célèbre commentateur Bachet.

Dans la plupart des questions des Livres IV et V, Diophante suppose que tout nombre entier est ou bien carré ou bien somme de deux, de trois ou de quatre carrés. Dans son commentaire sur le problème IV, 31, Bachet avoue qu'il n'est pas parvenu à démontrer complètement cette proposition. René Descartes lui-même, dans une lettre qui sera prochainement publiée et dont j'ai eu récemment con-

naissance, avoue ingénuement qu'il ignore la démonstration et déclare que le chemin pour y parvenir lui paraît des plus difficiles et des plus embarrassés. Je ne vois donc pas que l'on puisse douter de l'importance de cette proposition. Or j'annonce à vos éminents correspondants que j'en ai trouvé une démonstration complète.

Je pourrais ajouter nombre de propositions très célèbres dont je possède également la preuve irréfutable; par exemple :

Tout nombre premier, de la forme $4n+1$, est somme de deux carrés; ainsi 5, 13, 17, 29, 37, 41, etc.

Tout nombre premier, de la forme $3n+1$, est somme d'un carré et du triple d'un autre carré; ainsi 7, 13, 19, 31, 37, 43, etc.

Tout nombre premier, de la forme $8n+1$ ou $8n+3$, est somme d'un carré et du double d'un autre carré; ainsi 3, 11, 17, 19, 41, 43, etc.

Quant à la proposition de Bachet ci-dessus, je l'ai proposée autrefois généralisée à M. de Sainte-Croix, et j'ai également la démonstration pour cette extension que voici :

Tout nombre entier est soit triangle, soit somme de 2 ou 3 triangles; soit carré, soit somme de 2, 3 ou 4 carrés; soit pentagone, soit somme de 2, 3, 4 ou 5 pentagones; soit hexagone, soit somme de 2, 3, 4, 5 ou 6 hexagones; et ainsi de suite en continuant indéfiniment.

3. Tous ces théorèmes que j'ai découverts comme une infinité d'autres concernant les nombres entiers, et dont je possède des démonstrations générales, je pourrais les proposer à vos éminents correspondants et leur créer ainsi au moins quelque occupation. Mais il sera plus dans la franchise de ma nation de leur soumettre au contraire des énoncés dont j'avouerai que j'ignore la démonstration, quoique je sois persuadé de leur vérité.

On sait qu'Archimède n'a pas dédaigné de travailler sur des propositions de Conon qui étaient vraies, mais non prouvées, et qu'il a su les munir de démonstrations d'une haute subtilité. Pourquoi n'espére-

rais-je pas un semblable secours de vos éminents correspondants, pourquoi, Conon français, ne trouverais-je pas des Archimèdes anglais?

1° Toutes les puissances du nombre 2, ayant pour exposant un des termes de la progression géométrique suivant la raison du même nombre 2, donnent des nombres premiers, si on leur ajoute l'unité.

Soit la progression géométrique suivant la raison 2, avec ses exposants :

1	2	3	4	5	6	7	8
2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.

Le premier terme 2, augmenté de l'unité, fait 3, nombre premier.

Le second terme 4, augmenté de l'unité, fait 5, nombre premier.

Le quatrième terme 16, augmenté de l'unité, fait 17, nombre premier.

Le huitième terme 256, augmenté de l'unité, fait 257, nombre premier.

Prenez en général toutes les puissances de 2, dont l'exposant est un terme de la progression, il en sera de même. Ainsi, le seizième est 65 536; ajoutant 1, on a 65 537, qui est premier. De cette façon, on peut déterminer et calculer sans difficulté un nombre premier plus grand que tout nombre donné.

Je demande une démonstration de cette proposition, qui est certainement très belle, que je crois très vraie, et grâce à laquelle on peut, comme je viens de le dire, résoudre immédiatement un problème autrement très difficile, savoir : étant donné un nombre quelconque, trouver un nombre premier qui soit plus grand. Et cela donnera peut-être à vos éminents correspondants la clef pour pénétrer tout le mystère des nombres premiers, c'est-à-dire étant donné un nombre quelconque, reconnaître, par la voie la plus facile et la plus courte, s'il est premier ou composé.

2° Le double de tout nombre premier, de la forme $8n - 1$, est somme de trois carrés.

Soit un nombre premier quelconque de la forme $8n - 1$, comme 7,

23, 31, 47, etc.; je dis que chacun des doubles 14, 46, 62, 94, est somme de trois carrés.

J'affirme que cette proposition est vraie, mais seulement à la façon de Conon, attendant qu'un Archimède la démontre.

3° Si l'on fait le produit de deux nombres premiers, terminés par 3 ou par 7, et de la forme $4n+3$, ce produit sera la somme d'un carré et du quintuple d'un autre carré.

Tels sont les nombres 3, 7, 23, 43, 47, 67, etc. Prenez-en deux, par exemple 7 et 23; leur produit 161 est la somme d'un carré et du quintuple d'un autre carré. En effet $161 = 81 + 5 \times 16$.

Je dis que cette proposition est vraie en général et j'attends seulement la démonstration. D'ailleurs le carré de chacun de ces nombres est également somme d'un carré et du quintuple d'un autre carré, ce que je propose également de démontrer.

4. Pour ne pas paraître trop pauvre en démonstrations, j'ajouterai une proposition que je puis prouver :

Il n'y a aucun nombre triangle, sauf l'unité, qui soit un bicarré.

Tout le monde sait que les triangles sont : 1, 3, 10, 15, 21, 28, 36, 45, etc.

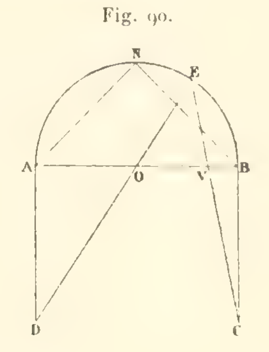
Il n'y a absolument dans toute cette série, indéfiniment prolongée, aucun bicarré, sauf l'unité.

5. Enfin, pour ne pas paraître me réfugier dans les nombres faute de propositions géométriques, en voici quelques-unes, qui ne rougiront pas de se montrer en Angleterre. Les deux premières sont tirées de ma restitution des porismes d'Euclide.

Soit sur le diamètre AB (*fig.* 90) le demi-cercle ANB; prenez en N le milieu de la demi-circonférence ANB, joignez NA, NB, et élevez en A, B les perpendiculaires AD, BC, égales à AN ou NB. Prenez sur la demi-circonférence un point quelconque E, joignez DE, EC, qui couperont le diamètre aux points O et V. Je dis que dans ce cas on aura $AV^2 + BO^2 = AB^2$.

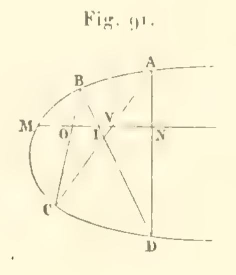
Dans mon Traité, j'ai énoncé ce théorème ou problème sous une forme plus générale, mais, pour le moment, il suffit de ce cas particulier.

Fig. 90.



Soient une parabole quelconque AMC (*fig.* 91), A, B deux points quelconques pris sur cette parabole, MN un diamètre quelconque. Prenez sur la parabole un autre point quelconque C et joignez-le à A et B. Vous couperez ainsi le diamètre toujours dans le même rapport.

Fig. 91.



Car si vous prenez un autre point quelconque, tel que D, vous aurez MO : OV :: MI : IN; les segments interceptés sur le diamètre seront toujours dans le même rapport.

Voilà des propositions que j'ai découvertes et démontrées et que j'offre en échange du théorème sur le tronc de cône oblique.

6. Mais je n'hésite pas au reste à proposer aussi en cette matière aux Anglais des questions que je n'ai pas encore complètement résolues.

Étant donnés des points, des droites et des cercles, trouver une

parabole qui passe par les points donnés et touche les droites ou les cercles donnés.

Il suffit de quatre données. Par exemple : Étant donnés deux points, une droite et un cercle, trouver une parabole qui passe par les points donnés et soit tangente à la droite et au cercle donnés. Il y a en tout quinze problèmes.

Je propose la même chose pour les ellipses ou les hyperboles; mais, dans ce cas, il faut cinq données, points, droites ou cercles : ce qui fait en tout 21 problèmes.

Dans mon *Traité des contacts sphériques*, j'ai autrefois traité les problèmes analogues pour la sphère et notamment résolu avec bonheur la question suivante : Étant données quatre sphères, en trouver une cinquième qui soit tangente aux quatre sphères données.

Vous pourrez trouver ce Traité complet chez M. de Carcavi.

J'inviterai enfin vos éminents correspondants à mettre de côté tant soit peu les formules de l'Analyse et à traiter les problèmes de Géométrie par la méthode d'Euclide et d'Apollonius, car il est à désirer que l'on ne voie pas se perdre peu à peu, dans les constructions et les démonstrations, cette élégance à laquelle visaient surtout les anciens, comme le prouvent assez les Données d'Euclide et les autres livres d'Analyse énumérés par Pappus, livres dont j'ai jadis complété la restitution en ajoutant aux travaux de Viète, de Ghetaldi et de Snellius mes Traités des lieux plans, des lieux solides et de ligne, des lieux en surface et des porismes, Traités que M. de Carcavi a également tous entre les mains.

N° 106.

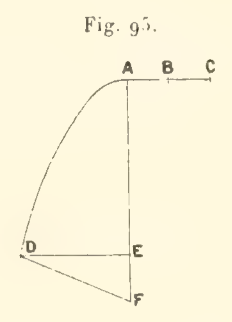
(Lettre de Fermat à Carcavi, juin 1660.)

1. En supposant la quadrature de l'hyperbole, on peut obtenir un cercle de surface équivalente à la surface courbe engendrée par la rotation d'une parabole autour d'une ordonnée.

Soit donnée la parabole AD (*fig.* 95) ayant AE pour axe, DE pour ordonnée ou demi-base, ABC pour côté droit. On demande de con-

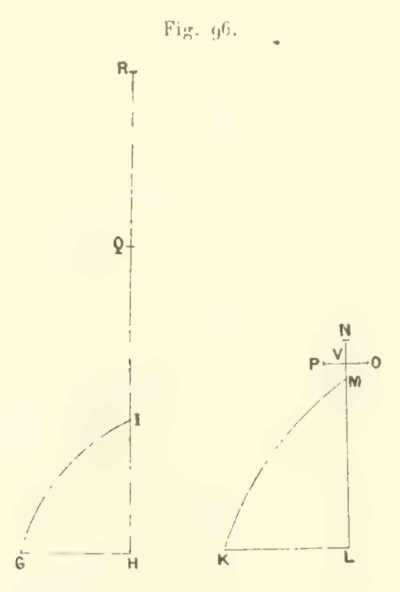
struire un cercle dont la surface soit équivalente à celle de la surface courbe du solide engendré par la rotation de la figure ADE autour de l'ordonnée DE.

Fig. 95.



Prenez en B la moitié du côté droit AC, prolongez l'axe AE d'une droite EF égale à AB ou à la moitié du côté droit, et joignez DF. Construisez à part (*fig.* 96) une droite IQ égale à l'axe AE et prenez-en le double IR. Faites FE ou AB : DF :: QI : QH, et par le point H

Fig. 96.

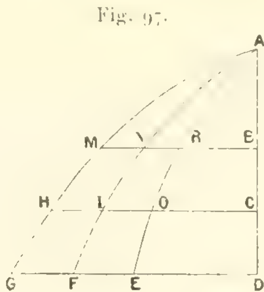


menez HG perpendiculaire à HIR et égale à DE. Décrivez une hyperbole IG ayant I pour sommet, IR pour axe transverse, Q pour centre et passant par le point G. Décrivez également à part une autre hyperbole ayant pour axe transverse MN égale au quart du côté droit de la

parabole (c'est-à-dire que $MN = \frac{1}{2} AC$), pour centre V, et pour côté droit OVP égale à l'axe transverse. Soient MK cette hyperbole, M son sommet, ML son axe qu'on prolongera jusqu'à ce qu'il soit égal à l'axe AE de la parabole, enfin LK la perpendiculaire ou ordonnée en L. Construisez un carré égal à l'excès du rectangle $QH \times HG$ sur la somme des deux aires hyperboliques IGH, MKL, dont on suppose la quadrature. La diagonale de ce carré sera le rayon du cercle équivalent à la surface courbe dont nous cherchons la mesure.

2. Soit la cycloïde primaire ANIF (*fig.* 97) d'axe AD, de demi-base DF. Construisez à l'intérieur ou à l'extérieur d'autres courbes telles que leurs ordonnées soient dans un rapport constant avec celle de la cycloïde.

Fig. 97.



Par exemple, GFD, HIC, MNB étant des ordonnées de la courbe extérieure AMHG, je suppose que le rapport GD : DF est donné et que l'on a GD : DF :: HC : CI :: MB : BN. De même pour la courbe intérieure AROE, je suppose donné le rapport FD : DE avec l'égalité des rapports FD : DE :: IC : CO :: NB : RB.

Je dis que les arcs des courbes extérieures, comme AMHG, sont toujours égaux à la somme d'une droite et d'un arc de cercle; que les arcs des courbes intérieures, comme AROE, sont toujours égaux à des arcs de paraboles primaires ou d'Archimède.

Je vous communiquerai, dès que vous le désirerez, l'énoncé du théorème général et sa démonstration.



TRADUCTION

DE

L'INVENTUM NOVUM

DU PÈRE JACQUES DE BILLY.

NOUVELLES DÉCOUVERTES

DANS

LA SCIENCE DE L'ANALYSE,

RECUEILLIES PAR LE RÉVÉREND PÈRE JACQUES DE BILLY,
PRÊTRE DE LA SOCIÉTÉ DE JÉSUS,
DANS LES DIVERSES LETTRES QUI LUI ONT ÉTÉ ENVOYÉES, A DIFFÉRENTES ÉPOQUES,
PAR MONSIEUR PIERRE DE FERMAT,
CONSEILLER AU PARLEMENT DE TOULOUSE.

Savant lecteur,

Il suffit qu'en tête de cet Ouvrage apparaisse le nom de Fermat, pour que vous attendiez quelque chose de grand; un tel homme n'a rien pu imaginer qui soit petit, rien même qui soit médiocre; son esprit était illuminé de tant de clartés qu'il ne souffrait rien d'obscur; vous eussiez dit un soleil qui en un instant dissipe les ténèbres, et dont les rayons innombrables portent une éclatante lumière au sein même des abîmes. Jusqu'à présent Diophante a provoqué, et cela à juste titre, une admiration universelle; mais, pour grand qu'il soit, ce n'est qu'un pygmée par rapport à notre géant, qui a accompli le tour immense du monde mathématique et parcouru de nouvelles régions inconnues à tout autre; Viète a été célébré par tous ceux qui, pendant notre siècle, se sont occupés des opérations algébriques, et pour la renommée de quelqu'un il suffit qu'on puisse dire de lui que, dans l'Analyse, il a pénétré la pensée de cet auteur; Viète cependant n'a pas atteint le sommet de la Science, comme le montreront les nombreux exemples développés ci-après; si Claude-Gaspar Bachet n'avait pas été pour moi un intime ami, je n'en aurais pas moins une con-

stante admiration pour la singulière subtilité de son analyse; ses travaux sur Diophante montrent assez clairement jusqu'à quel point sa vue était pénétrante dans les questions numériques; cependant elle est encore faible si on la compare à celle de notre *Linceo*, qui lui dévoile ce qu'il y a de plus abstrus.

Mais pour ne pas recommander par son nom seul ce petit Traité, je veux dès maintenant dire en quelques mots quelles récentes découvertes lui sont dues et quelle en est la portée. En premier lieu, il y a certaines équations doubles difficiles pour lesquelles les analystes n'ont pu jusqu'à présent trouver qu'une solution unique; Bachet lui-même affirme qu'on ne peut en trouver deux, tandis que Fermat va en donner tout à l'heure une infinité, sans être arrêté par les nombres faux et plus petits que zéro qui se présentent souvent dans les calculs de ce genre; il les soumettra en effet à un subtil traitement qui les réduit immédiatement à des nombres vrais. En second lieu, personne, que je sache, n'a encore résolu d'équation triple, à moins de l'avoir d'avance formée artificiellement et combinée de telle sorte que la solution en apparaisse immédiatement, même aux yeux des novices; Fermat a trouvé une méthode singulière pour résoudre les équations arbitrairement proposées de ce genre, en exceptant un seul cas que nous indiquerons ci-après. En troisième lieu, qui jamais a donné autant de solutions que l'on veut pour les expressions composées de cinq termes de degrés successifs? Qui, des racines primitives, a su en tirer de dérivées du premier ordre, du second, du troisième, et ainsi de suite indéfiniment? Personne sans doute; à Fermat seul appartient cette découverte. Il n'a pas puisé ces inventions dans les ouvrages d'autrui, comme ont coutume de le faire certains arrangeurs, il les a tirées de son propre fonds, élaborées lui seul; et puisqu'il m'a fait l'amitié de me les communiquer dans ses lettres, je crois devoir les livrer à l'impression, en commençant par reproduire textuellement, pour ne dévier en rien de sa pensée, un abrégé de toute sa méthode, auquel il a donné pour titre : *Appendice à la Dissertation de Claude-Gaspar Bachet sur les doubles équations de Diophante*. Voici ses propres paroles :

« Le subtil et savant analyste Bachet a distingué assez heureusement, à propos de la question VI, 24 de Diophante, les divers modes et cas de l'équation double; cependant il n'a pas moissonné tout le champ ouvert devant lui ; en effet, rien n'empêche de donner des solutions en nombre indéfini pour les problèmes auxquels il n'en trouve qu'une ou deux tout au plus. Bien plus, il est aisé d'accomplir ce progrès et d'obtenir ce résultat par une opération facile.

» Soit proposé le sixième mode qu'il détaille assez prolixement pages 439 et 440; tous les cas qu'il a énumérés (¹), grâce au procédé que je vais indiquer, sont susceptibles d'une infinité de solutions qui dérivent successivement de la première, si l'on réitère indéfiniment la même analyse.

» Voici ce procédé : Cherchez la solution de la question proposée, selon la méthode ordinaire, c'est-à-dire celle de Bachet ou de Diophante; ayant ainsi obtenu une valeur numérique de l'inconnue, recommencez l'analyse, en prenant, pour valeur de la nouvelle inconnue, x plus le nombre trouvé précédemment comme solution. Le problème se trouvera ainsi ramené à une nouvelle équation double dans laquelle les termes indépendants de x se trouveront carrés, en vertu de l'emploi de la première solution; par suite la différence entre les deux expressions se trouvera composée seulement de termes en x^2 et en x, c'est-à-dire de degrés consécutifs; cette nouvelle équation double pourra donc se résoudre d'après la méthode de Diophante ou de Bachet. La seconde solution ainsi obtenue permettra, par le même artifice, d'en calculer une troisième, celle-ci une quatrième, et ainsi de suite indéfiniment.

» Cette remarque, qui a échappé à Diophante, à Bachet et même à Viète, comble la plus grave lacune que présente actuellement l'analyse de ces questions. Mais le principal intérêt de ma découverte res-

(¹) Le sixième mode de Bachet correspond à l'ensemble des différents cas pour lesquels il obtient une solution de l'équation double sous sa forme générale :

$$ax^2 + bx + c = \square, \qquad a'x^2 + b'x + c' = \square.$$

sort surtout dans les problèmes, pour lesquels la première analyse donne, comme valeur de l'inconnue, un nombre affecté du signe —, et qu'il faut par suite regarder comme plus petit que zéro. Ma méthode s'applique en effet dans ce cas, non seulement aux problèmes qui se traitent par des équations doubles, mais à tous en général, comme on peut le reconnaître à l'essai.

» Voici la façon d'opérer : Cherchez, suivant le procédé ordinaire, (*voir* page 271, lignes 6 à 16) une solution en nombres vrais. » Ici s'arrête cet *Appendice* de Fermat.

Voici maintenant la matière de mon petit Traité; il est divisé en trois Parties : la première concerne les solutions en nombre indéfini des doubles équations, solutions qui peuvent d'ailleurs se présenter, soit avec le signe +, soit avec le signe —; la seconde Partie s'élève aux triples équations et révélera des secrets dont jusqu'à présent on n'a rien soupçonné; la troisième enfin aborde le problème de rendre égale à un carré une expression formée de cinq ou quatre termes, et donne le moyen d'obtenir des racines en nombre indéfini, qui dérivent successivement des primitives.

PREMIÈRE PARTIE.

DES SOLUTIONS EN NOMBRE INDÉFINI DANS LES DOUBLES ÉQUATIONS.

1. Il convient tout d'abord de rappeler brièvement la méthode ordinaire pour traiter une double équation. Voici en quoi consiste cette méthode : On prend la différence des deux expressions qui doivent séparément être égalées à un carré; on choisit deux facteurs dont le produit forme cette différence, puis on égale soit à la plus grande expression le carré de la demi-somme des facteurs, soit à la plus petite expression le carré de la demi-différence des facteurs; on obtient ainsi la valeur de la racine qui, substituée à l'inconnue dans chacune des deux expressions, donnera des nombres carrés. Je vais donner des

exemples pour trois cas seulement, les autres pouvant être aisément ramenés à ceux-là.

2. *Premier cas :* Les expressions à égaler à un carré sont composées seulement d'un terme en x et d'un terme indépendant, comme les deux suivantes :

$$2x + 12 = \square, \qquad 2x + 5 = \square.$$

La différence de ces deux expressions est $7 = 7 \times 1$; la somme des deux facteurs est 8, et le carré de la demi-somme est 16. J'égale donc $16 = 2x + 12$, d'où 2 pour la valeur de x dans chaque expression. Autrement la différence des mêmes facteurs est 6, le carré de la demi-différence est 9, que j'égale à la plus petite expression, $2x + 5$; d'où la même valeur $x = 2$.

Les deux expressions donnent nécessairement, par substitution, les carrés 16 et 9.

3. *Second cas :* Les expressions sont composées de termes en x^2, en x, et indépendants; de plus les coefficients de x^2 sont carrés. Par exemple :

$$4x^2 + 20x + 8 = \square, \qquad 4x^2 + 4x - 8 = \square.$$

La différence est $16x + 16 = 4 \times (4x + 4)$; la somme des facteurs : $4x + 8$, le carré de la demi-somme : $4x^2 + 16x + 16$. En égalant à la première expression, on aura $x = 2$.

Remarquez que dans ce cas, parmi les couples, en nombre indéfini, des facteurs dont le produit donne la différence ci-dessus, il faut choisir celui où le coefficient de x est double de la racine carrée du coefficient de x^2 dans chacune des deux expressions (on le suppose le même dans l'une et dans l'autre); c'est ainsi que nous avons pris $4x$, pour que le carré de sa moitié fasse $4x^2$.

Les deux expressions donnent, après substitution, les carrés 64 et 16.

4. *Troisième cas,* celui qu'il importe surtout de remarquer, car c'est

celui qui nous servira le plus souvent : Dans chacune des deux expressions, le terme indépendant de x est un carré ; ce peut d'ailleurs être le même carré, ou bien il peut différer de l'une à l'autre, comme si l'on a, par exemple,

$$x^2 - 8x + 16 = \square, \qquad 3x^2 - 48x + 64 = \square.$$

Mais alors on divisera le plus grand carré par le moindre, 64 par 16, et l'on multipliera la plus petite expression par le quotient 4 ; on aura ainsi deux expressions, dans lesquelles les termes connus seront des carrés égaux :

$$4x^2 - 32x + 64 = \square, \qquad 3x^2 - 48x + 64 = \square.$$

Leur différence $x^2 + 16x = x(x + 16)$. Remarquez que je prends 16 comme terme connu du second facteur, parce que c'est le double de 8 qui est la racine du carré commun aux deux expressions. La somme des deux facteurs est $2x + 16$; le carré de leur demi-somme est $x^2 + 16x + 64$; je l'égale à $4x^2 - 32x + 64$; et j'obtiens $x = 16$. D'où, en substituant dans les expressions proposées, les carrés 144 et 64.

Règle générale pour obtenir en nombre indéfini des solutions de doubles équations.

5. Prenez la valeur de la racine obtenue par la méthode ordinaire, et joignez-la à x, en lui maintenant son signe, soit $+$, soit $-$; substituez à x cette nouvelle expression de la racine dans les termes de la double équation donnée ; vous aurez de nouvelles expressions à égaler à un carré ; cherchez alors la valeur de x par la méthode ordinaire, suivant le troisième cas que je viens de donner et sur lequel j'ai appelé l'attention ; cette nouvelle valeur, qui rend carrées les nouvelles expressions formées, devra maintenant être jointe à la première valeur obtenue, en tenant compte des signes $+$ ou $-$; on obtiendra

ainsi une seconde valeur de x rendant carrées les expressions primitivement proposées.

6. Soit par exemple la double équation (1)

$$4x + 1 = \square, \qquad x^2 - 2x + 1 = \square.$$

En dehors de la solution immédiate $x = 2$, on trouvera encore, par la méthode ordinaire, $x = \frac{3}{4}$. Je vais me servir de ces deux valeurs pour en tirer de nouvelles solutions; je prendrai, en premier lieu, suivant la règle, comme nouvelle représentation de l'inconnue, $x + 2$. Substituant à x dans la première expression égalée à un carré, c'est-à-dire $4x + 1$, j'ai $4x + 9$ (si en effet x devient $x + 2$, $4x$ deviendra $4x + 8$ et en ajoutant 1, terme connu de l'expression, il vient $4x + 9$). De même, substituant $x + 2$ à x dans la seconde expression, $x^2 - 2x + 1$, on aura à égaler à un carré la nouvelle expression $x^2 + 2x + 9$ (2). Si l'on en retranche la précédente, c'est-à-dire $4x + 9$, et qu'on achève l'application à cette double équation de la règle ordinaire, on obtiendra $x = \frac{27}{4}$; en y ajoutant 2 (puisque la nouvelle représentation de l'inconnue est $x + 2$), on aura $\frac{35}{4}$ comme nouvelle valeur de l'inconnue pour le système proposé.

7. Je veux maintenant, de l'autre valeur $\frac{3}{4}$, en déduire une nouvelle; je prends pour inconnue $x + \frac{3}{4}$, et je substitue cette représentation à x dans les expressions $4x + 1$ et $x^2 - 2x + 1$; il vient $4x + 4$ et $x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$. Les termes indépendants de x étant carrés

(1) Billy prend absurdement pour seconde expression : $x^2 - 2x + 1$, qui est identiquement un carré.

(2) Erreur de calcul, le résultat de la substitution étant $x^2 + 2x + 1$. Néanmoins la valeur $\frac{35}{4}$ satisfait à la *double équation*, par suite de la circonstance signalée dans la note précédente.

de part et d'autre, la double équation pourra être résolue comme il a été dit n° 4 pour le troisième cas; on trouvera $x = \frac{72}{289}$, et en ajoutant $\frac{3}{4}$ $\left(\text{puisqu'on a pris } x + \frac{3}{4} \text{ pour représenter l'inconnue}\right)$, on obtiendra $\frac{1155}{1156}$ comme nouvelle valeur de l'inconnue dans le système proposé.

8. Nous avons ainsi des secondes valeurs dérivées des premières; de ces secondes on peut en tirer des troisièmes en employant exactement le même procédé. Ainsi, soit à dériver une troisième valeur de la seconde $\frac{35}{4}$; j'ajoute celle-ci à x, de façon à représenter l'inconnue par $x + \frac{35}{4}$, que je substitue à x dans les expressions $4x + 1$ et $x^2 - 2x + 1$, ainsi que j'ai déjà expliqué; j'obtiens ainsi

$$4x + 36 \quad \text{et} \quad x^2 + \frac{31}{2}x + \frac{961}{16},$$

expressions où les termes indépendants de x sont carrés; j'en déduis $x = -\frac{3245097808}{4528002321}$; j'ajoute $\frac{35}{4}$, d'après la position pour l'inconnue, et j'ai, pour celle-ci, $+\frac{3186240667}{2012445476}$, valeur qui, substituée dans les expressions proposées, donnera des nombres carrés (1).

9. On voit ainsi qu'on peut trouver un nombre indéfini de solutions; les premières en procurent en effet du second ordre, celles du second ordre en procurent du troisième et ainsi de suite indéfiniment. Dans l'exemple donné, nous avons de la sorte obtenu cinq solutions différentes, et des dernières on peut de même en tirer de nouvelles; par conséquent, toute double équation a un nombre indéfini de solutions. C. Q. F. D.

(1) Billy aurait dû supprimer les facteurs communs; il aurait trouvé ainsi pour l'inconnue la valeur : $\frac{35}{4} - \frac{91512}{12769} = \frac{80867}{51076}$. Ces divers exemples ne peuvent être attribués à Fermat.

Il ne faut pas se décourager, si l'on rencontre comme solution des nombres faux ou plus petits que zéro.

10. Il arrive assez souvent que les calculs conduisent à des nombres faux; dès lors, faute d'expérience, on perd aussitôt courage et on se figure être tombé sur un cas d'impossibilité. J'affirme, au contraire, avec notre Fermat, que même alors on peut déduire une solution du résultat obtenu.

11. Soit, par exemple, proposée la double équation

$$-2x+1=\square, \qquad 2x^2-4x+1=\square.$$

La méthode ordinaire conduit à la valeur $x=-4$, qui, substituée dans les expressions, donne effectivement les carrés positifs 9 et 49. Cette solution est, je l'avoue, un faux nombre; cependant elle peut servir à trouver des nombres vrais. Prenez $x-4$ comme nouvelle position de l'inconnue, et substituez dans les expressions proposées; elles deviendront $-2x+9$ et $2x^2-20x+49$ (en effet puisque $2x$ donne $2x-8$, si l'on retranche ce binome de 1, comme l'exige le signe $-$, il viendra pour la première expression transformée $9-2x$; de même $2x^2$ devient $2x^2-16x+32$; $4x$ donne $4x-16$, qu'on doit retrancher de $2x^2-16x+32$ après avoir ajouté 1 à ce trinome, selon la composition de l'expression primitive; on a ainsi $2x^2-20x+49$). Dans les expressions transformées, les termes indépendants de x sont carrés; la méthode de Diophante permet donc de trouver une valeur de x; j'en retrancherai 4, puisque j'ai pris $x-4$ pour représenter l'inconnue; j'aurai ainsi une solution $\frac{5333240}{39150049}$ pour le système proposé. Ainsi le faux nombre a permis d'en trouver un vrai qui satisfait au problème, comme on peut le vérifier.

12. Soit encore proposée la double équation

$$8x^2+16x+4=\square, \qquad 2x^2+4x+4=\square.$$

On trouvera facilement les solutions -2 et $-\frac{24}{7}$; mais, comme ce sont de faux nombres, je prends $x-2$ comme nouvelle position de l'inconnue; je substitue à x dans les expressions proposées et j'ai les transformées

$$8x^2 - 16x + 4 = \square, \qquad 2x^2 - 4x + 4 = \square,$$

pour lesquelles la méthode de Bachet donne la valeur $x = \frac{24}{7}$; j'en retranche 2 (puisque j'ai posé $x-2$ pour l'inconnue) et j'ai, pour le système proposé, la nouvelle solution, $+\frac{10}{7}$. Un faux nombre en a donc procuré un vrai satisfaisant à la double équation. Il en est de même pour tout autre faux nombre, et l'on peut même obtenir par l'intermédiaire d'un faux nombre une infinité de solutions, au moyen de dérivations successives.

13. Je prendrai pour troisième exemple la double équation

$$2x^2 + 2x + 1 = \square, \qquad 2x^2 + 6x + 1 = \square.$$

La méthode ordinaire donne la solution -4; il faut donc recommencer l'opération, après avoir substitué $x-4$ à x et avoir ainsi obtenu les expressions transformées

$$2x^2 - 14x + 25 \quad \text{et} \quad 2x^2 - 10x + 9.$$

Comme les termes indépendants de x sont carrés de part et d'autre, la méthode de Diophante fournit une valeur de x pour ces dernières expressions; j'en retranche 4, d'après la position prise pour l'inconnue, et j'ai ainsi pour le système proposé la solution vraie et réelle $+\frac{86421304}{98831999}$. Il ne faut donc pas se décourager s'il arrive que l'on rencontre de faux nombres; les exemples qui précèdent montrent comment on peut en tirer des nombres vrais.

Pour ce procédé de résolution des doubles équations, il faut que la différence des expressions égalées à des carrés soit formée d'un terme en x^2 et d'un terme en x.

14. Il arrive souvent que, dans les doubles équations à résoudre, la différence des expressions soit constituée seulement par un terme en x. Si, par exemple, on a

$$x^2 - x + 1 = \square, \qquad x^2 - 3x + 1 = \square;$$

en retranchant la seconde expression de la première on a, pour différence, $2x$. Il peut arriver aussi que la différence soit formée d'un terme en x et d'un terme connu; si l'on a, par exemple,

$$9x^2 - 21x + 15 = \square, \qquad 9x^2 - 48x + 24 = \square,$$

suivant que l'on supposera que la première expression soit la plus grande ou la plus petite (ce qui est assez souvent indifférent) la différence sera $27x - 9$ ou $-27x + 9$. Mais, pour appliquer la méthode de Fermat, il faut avoir soin que la différence des expressions soit formée d'un terme en x^2 et d'un terme en x, autrement le calcul n'aboutirait nullement à fournir une nouvelle solution; pour que d'ailleurs la différence soit constituée d'un terme en x^2 et d'un terme en x, il faut ramener à l'égalité les termes connus, qui sont carrés, en procédant comme je l'ai montré plus haut (n° 4).

15. Soit proposée, par exemple, la double équation

$$x^2 + x + 2 = \square, \qquad x^2 + 3x + 3 = \square.$$

La méthode ordinaire donne $x = -2$; il faut donc, d'après le procédé de Fermat, substituer $x - 2$ à x, ce qui donnera pour les expressions transformées : $x^2 - 3x + 4$ et $x^2 - x + 1$. Si l'on prend la différence $2x - 3$ ou $3 - 2x$ (suivant que l'on suppose que la première expression est la plus petite ou la plus grande) et si l'on décompose cette différence en facteurs, de quelque façon que l'on s'y prenne, l'on

n'avancera en rien. Pour parvenir au but désiré, il est nécessaire de ramener les deux expressions à avoir le même carré pour terme connu; pour cela, on divisera le plus grand carré par le moindre et on multipliera par le quotient l'expression où figure le moindre carré. Ainsi, dans l'exemple proposé, divisez 4 par 1, multipliez par le quotient 4 l'expression $x^2 - x + 1$; vous aurez les deux expressions disposées pour être traitées par notre procédé : $4x^2 - 4x + 4$ et $x^2 - 3x + 4$.

16. Soit encore proposée la double équation

$$x^2 - 8x + 16 = \square, \qquad 3x^2 + 48x + 64 = \square.$$

La méthode ordinaire (¹) donne la valeur $x = 16$. Il faut donc substituer $x + 16$ à x dans les deux expressions qui, ainsi transformées, deviennent

$$x^2 + 24x + 256 = \square, \qquad 3x^2 + 144x + 1600 = \square.$$

On ne peut pas prendre pour différence $2x^2 + 120x + 1344$, puisqu'il serait impossible d'arriver ainsi à la solution. Que faut-il donc faire? Ce que nous avons déjà indiqué et répété : divisez 1600 par 256 et multipliez par le quotient $\frac{25}{4}$ l'expression $x^2 + 24x + 256$; le produit $\frac{25}{4}x^2 + 150x + 1600$ avec l'autre expression $3x^2 + 144x + 1600$ donne un système dont la différence sera formée de termes en x^2 et x; il sera donc possible d'obtenir une nouvelle solution.

Ce procédé est applicable à la solution non seulement de la double équation, mais aussi d'autres équations quelconques.

17. C'est un champ très fertile que celui que nous avons commencé à cultiver; car la méthode de Fermat peut fournir une infinité de

(¹) Billy s'est encore trompé ici, probablement en prenant la solution du n° 4 pour un système où la valeur absolue des coefficients est la même. Cette solution satisfait ici accidentellement; mais, en opérant la substitution dans la première expression (laquelle au reste est identiquement un carré), Billy a de plus commis une erreur de calcul, puisqu'il aurait dû trouver : $x^2 + 24x + 144$.

solutions non seulement pour les doubles équations, mais encore pour les autres. Soit par exemple proposé de trouver un nombre dont le produit par 12, retranché de la somme de 8 fois son carré et de 8, fasse un cube. Soit x ce nombre; il faut que $8x^2 - 12x + 8$ fasse un cube. Prenons $2 - x$ pour racine de ce cube; on aura

$$8 - 12x + 6x^2 - x^3 = 8x^2 - 12x + 8, \qquad \text{d'où} \qquad x = -2,$$

faux nombre qui satisfait à la question. Pour en avoir un vrai, substituons $x - 2$ à x dans l'expression proposée $8x^2 - 12x + 8$; la transformée sera $8x^2 - 44x + 64$ à égaler à un cube. On prendra pour racine de ce cube $4 - \frac{11}{12}x$ (4 étant la racine cubique de 64, terme connu de la transformée, $\frac{11}{12}x$ est le quotient obtenu en divisant $44x$, terme en x de la transformée, par 3 fois le carré de la racine cubique 4, c'est-à-dire par 48). En formant le cube du binome ci-dessus, j'ai $64 - 44x + \frac{121}{12}x^2 - \frac{1331}{1728}x^3$ à égaler à la transformée $8x^2 - 44x + 64$, d'où je tire $x = 2\frac{938}{1331}$. Si je retranche 2, puisque j'ai pris $x - 2$ pour représenter l'inconnue, j'aurai pour celle-ci la valeur $\frac{938}{1331}$. C'est le nombre cherché; si l'on forme son produit par 12 et si on le retranche de la somme de 8 fois son carré et de 8, on obtient le cube $\frac{6229504}{1771561}$, dont la racine est $\frac{184}{121}$.

18. Supposons encore qu'on demande un triangle rectangle dont l'aire, ajoutée à l'hypoténuse, fasse un carré. Je forme ce triangle des nombres $x + 1$ et x; les côtés seront $2x^2 + 2x + 1$, $2x + 1$, $2x^2 + 2x$. J'ajoute l'aire $2x^3 + 3x^2 + x$ à l'hypoténuse $2x^2 + 2x + 1$; j'ai $2x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ à égaler à un carré. En prenant pour racine de ce carré $1 + \frac{3}{2}x$, j'obtiens $x = -\frac{11}{8}$.

Substituons donc $x - \frac{11}{8}$ à x dans l'expression à égaler à un carré;

nous arriverons, pour la valeur de l'inconnue dans les premières positions, à $\frac{2673}{9248}$.

19. De même, si l'on demande un triangle rectangle dont l'aire, ajoutée à l'un des côtés de l'angle droit, fasse un carré, vous formerez ce triangle comme il a été dit sous le numéro précédent; vous ajouterez l'aire $2x^3+3x^2+x$ au côté $2x+1$. On trouvera $x=-\frac{3}{8}$. Substituez donc $x-\frac{3}{8}$ à x dans l'expression à égaler à un carré. La transformée sera

$$2x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{51}{32}x+\frac{49}{256}=\square : \text{soit} = \left(\frac{7}{16}+\frac{51}{28}x\right)^2$$

et la valeur de l'inconnue primitive $\frac{1425}{1568}$, d'où le triangle cherché

$$\frac{10988674}{2458624},\quad \frac{6927424}{2458624},\quad \frac{8530050}{2458624}.$$

Nouvelle méthode pour la solution des doubles équations.

20. Soit proposée la double équation

$$25x^2+4x-6=\square,\qquad 9x^2+20x-6=\square.$$

La méthode ordinaire consiste à ramener à l'égalité, par le procédé indiqué au nº 4, les coefficients de x^2. Toutefois cela n'est pas nécessaire; on peut prendre immédiatement la différence $16x^2-16x$, puis la décomposer en deux facteurs tels que la somme des termes en x soit $10x$ (double de la racine de $25x^2$). Ces facteurs seront $8x$ et $2x-2$; en égalant à la première expression $25x^2+4x-6$, que nous avons supposée la plus grande, le carré de la demi-somme de ces facteurs, on trouvera $x=\frac{1}{3}$.

21. Supposons maintenant la double équation

$$\frac{121}{9}x^2-\frac{1210}{9}x+121=\square,\qquad x^2-26x+121=\square.$$

Les termes connus sont des carrés égaux; la différence, $\frac{112}{9}x^2 - \frac{976}{9}x$, doit d'après la méthode ordinaire, être décomposée en deux facteurs $\frac{488}{99}x$ et $\frac{154}{61}x - 22$, ce qui fournit une solution. Fermat prend les facteurs $\frac{8x}{3}$ et $\frac{14}{3}x - \frac{122}{3}$, dont la somme est $\frac{22}{3}x - \frac{122}{3}$. Le carré de la moitié de cette somme étant égalé à $\frac{121}{9}x^2 - \frac{1210}{9}x + 121$, on obtient $x = \frac{658}{33}$.

22. Soit encore à résoudre la double équation

$$169x^2 + 5746x + 169 = \square, \qquad x^2 + 10x + 169 = \square.$$

On peut en obtenir trois solutions; la première en prenant la différence des deux expressions, qui est $168x^2 + 5736x$, et en la décomposant en deux facteurs dont le binome aura pour terme connu 26, c'est-à-dire le double de la racine de 169; c'est là la méthode ordinaire. En second lieu, on peut ramener à l'égalité les coefficients carrés de x^2, en multipliant par 169 les trois termes de la seconde expression, comme je l'ai expliqué au n° 4. En troisième lieu, on peut prendre comme facteurs $14x$ et $12x + \frac{2368}{7}$, dont la somme, comme terme en x, aura $26x$, c'est-à-dire le double de la racine de $169x^2$. C'est là la méthode de Fermat qui donne la valeur $x = \frac{2048075}{20566}$.

23. On pourra dire que cette méthode est ingénieuse, mais inutile, en tant qu'elle procède seulement avec des facteurs trouvés par artifice et combinés de telle façon que leur produit donne la différence des expressions à égaler à des carrés et que dans leur somme figure un terme double de la racine du terme en x^2 de la plus grande des deux expressions. Mais on ne peut faire cette objection que si l'on ignore que c'est cette méthode qui a fourni la solution d'un très beau et très difficile problème, lequel a fait le tourment de tous les analystes et qui serait demeuré sans réponse, si par son procédé Fermat

ne fût arrivé à délier le nœud gordien. Celui qui accuserait cette méthode d'inutilité peut au reste voir la solution de divers problèmes donnés ci-dessous nos 45, 47, 48, 50. Il est d'ailleurs facile de reconnaître comment on doit former les facteurs en question; il suffit en effet de prendre le double de la racine du coefficient de x^2 dans la plus grande des deux expressions, et de partager ce double en deux nombres dont le produit fasse la différence des coefficients de x^2. Ainsi dans le premier exemple on prend 10; on le partage en deux nombres dont le produit est 16. On trouve ainsi 8 et 2; de même pour les autres cas.

Après que l'Analyse a trouvé les solutions primitives, on en obtient de nouvelles en réitérant l'opération.

24. Il arrive assez souvent que dans un problème le calcul conduise à de faux nombres; j'ai déjà montré ci-dessus comment l'artifice analytique de Fermat remédie à cet inconvénient, mais je vais donner aussi un moyen singulier dont les résultats sont innombrables : ce moyen c'est l'opération réitérée; toutefois, pour qu'elle aboutisse, il faut emprunter à l'Analyse les nombres primitifs à prendre dans la seconde opération.

25. Soit, par exemple, à chercher un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit un carré, aussi bien que la somme des côtés de l'angle droit. Je forme ce triangle des nombres simples $x+1$ et x; les trois côtés seront dès lors : $2x^2+2x+1$, $2x+1$, $2x^2+2x$. Il faut égaler à des carrés, d'une part l'hypoténuse $2x^2+2x+1$; de l'autre, la somme des côtés de l'angle droit : $2x^2+4x+1$. La méthode ordinaire donne la valeur $x=-\frac{12}{7}$. Les deux nombres générateurs du triangle seront donc $-\frac{5}{7}$ et $-\frac{12}{7}$, ou, si l'on prend les numérateurs seulement, pour avoir des entiers, -5 et -12, d'où le triangle : 169.119.120. J'infère de là que, pour résoudre le problème, il fallait d'abord trouver un triangle rectangle dont l'hypoténuse fût un carré,

en même temps que la *différence* des côtés de l'angle droit. Cette conclusion résulte forcément de l'analyse qui précède et ce triangle est : 169.119.120, formé de -5 et -12 ou de $+5$ et $+12$. Je réitère donc l'opération et je forme le triangle cherché des nombres $x+5$ et 12. J'arrive ainsi, grâce à ce triangle primitif, comme on le verra plus clairement sous le n° **45**, à une double équation qui ne donnera plus de faux nombres, mais bien des nombres vrais.

26. Soit encore à chercher un triangle rectangle tel que le produit de l'hypoténuse et de la somme de l'un des côtés de l'angle droit et de la moitié de l'autre fasse un carré, après que de ce produit on aura retranché l'aire du triangle. Je le forme des nombres simples 1 et $x+1$; les côtés seront x^2+2x+2; x^2+2x; $2x+2$. J'ai donc à multiplier x^2+2x+2 par x^2+3x+1, et à retrancher du produit : $x^4+5x^3+9x^2+8x+2$, l'aire : x^3+3x^2+2x. Le reste

$$x^4+4x^3+6x^2+6x+2$$

est à égaler à un carré ; je prends pour ce carré

$$(x^2+2x+1)^2 = x^4+4x^3+6x^2+4x+1,$$

et j'obtiens $x=-\frac{1}{2}$. Si nous nous arrêtions ici, le second côté du triangle, x^2+2x, serait plus petit que zéro et la solution inacceptable. Je réitère donc l'opération en formant le triangle des nombres $x+1$ et 2; les côtés sont dès lors : x^2+2x+5; x^2+2x-3; $4x+4$; le produit de l'hypoténuse par la somme de l'un des côtés et de la moitié de l'autre, donne, après retranchement de l'aire, $x^4+4x^3+6x^3+20x+1$ que j'égale au carré $(1+10x-x^2)^2$; j'obtiens ainsi un nombre vrai, $x=\frac{23}{6}$. D'après les positions, il faut donc former le triangle des nombres $\frac{29}{6}$ et 2, ou, en prenant des entiers, 29 et 12. Les côtés du triangle cherché seront 985.697.696. Nous serions arrivés au même résultat en substituant $x-\frac{1}{2}$ à x dans

l'équation $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 6x + 2 = \square$, qui devient par cette substitution $x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{16} = \square$, soit $\left(\frac{1}{4} + 5x - x^2\right)^2$; d'où $x = \frac{23}{12}$. En retranchant $\frac{1}{2}$, j'ai $\frac{17}{12}$ pour la valeur de l'inconnue dans les premières positions, d'après lesquelles j'aurai en conséquence à former le triangle des nombres entiers 29 et 12.

27. Soit enfin à chercher un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit un carré, aussi bien que la différence des côtés de l'angle droit. Si je prends les nombres $x + 1$ et 1 pour générateurs du triangle, les côtés seront : $x^2 + 2x + 2$; $x^2 + 2x$; $2x + 2$. Retranchez le dernier $2x + 2$ du moyen $x^2 + 2x$; j'ai la différence : $x^2 - 2$ qui doit être égalée à un carré, aussi bien que l'hypoténuse $x^2 + 2x + 2$. Cette double équation me donne $x = -\frac{17}{12}$; par suite, d'après les positions, les nombres générateurs du triangle seront $-\frac{5}{12}$ et 1, ou, en faisant disparaître le dénominateur, -5 et $+12$. On pourrait réitérer l'opération pour trouver le triangle demandé, mais on remarquera qu'il est immédiatement fourni par la formation de 5 et 12. On a en effet ainsi le triangle rectangle 169.119.120 dans lequel l'hypoténuse est un carré, aussi bien que la différence des côtés de l'angle droit.

Bachet trouve une impossibilité là où Fermat donne une solution facile.

28. Je dois avouer qu'à la vérité la méthode ordinaire donne une infinité de solutions pour nombre de questions, quand, par exemple, dans la double équation, les expressions sont formées de termes en x différents et d'un même terme connu carré; il est aisé, en effet, dans ce cas de trouver autant de solutions que l'on veut; c'est pourquoi Bachet, dans ses remarques sur Diophante, VI, 24, après avoir donné une solution unique par son second mode de solution des doubles équations, en fournit une infinité par son quatrième mode. Mais il y a d'autres doubles équations moins maniables pour lesquelles les mé-

thodes ordinaires ne fournissent qu'une solution ou deux au plus; et par suite, le célèbre commentateur de Diophante dit, au même endroit, qu'on ne peut obtenir qu'une solution unique lorsque les expressions sont composées de trois termes et que leur différence n'en comporte qu'un seul; ou bien lorsque les expressions sont formées l'une de trois termes, l'autre de deux seulement, le terme carré étant d'ailleurs le même de part et d'autre; ou enfin lorsque les expressions sont seulement formées de deux termes, l'une d'un terme en x^2 et d'un connu, l'autre d'un terme en x et d'un connu; il ajoute encore qu'il y a deux solutions lorsque les coefficients de x^2 et les termes connus sont des carrés. Tout en respectant ce grand mathématicien, je puis dire que dans tous les cas qu'il a ainsi énumérés la méthode de Fermat procure une infinité de solutions; les exemples suivants vont le faire voir clairement.

29. Soit tout d'abord la double équation

$$x^2 + 3x + 7 = \square, \qquad x^2 - 5x + 7 = \square.$$

La différence des expressions ne comprend qu'un seul terme, $8x$; et l'on trouve $x = 3$. Bachet, avec sa méthode, chercherait inutilement une autre solution. Mais qu'on substitue $x + 3$ à x, les expressions transformées deviennent $x^2 + 9x + 25$ et $x^2 + x + 1$; les termes connus étant carrés, on peut toujours résoudre cette double équation; si l'on rencontre de faux nombres, il n'y a pas à s'en effrayer, car j'ai déjà donné plus haut le moyen d'en déduire des vrais.

30. Comme second exemple, je prendrai la double équation

$$4x^2 - x - 4 = \square, \qquad 4x^2 + 15x = \square,$$

où il n'y a que deux termes dans la seconde expression, et que Bachet a résolue en donnant la valeur unique : $x = \frac{5}{4}$. Substituez $x + \frac{5}{4}$ à x : les expressions transformées sont $4x^2 + 9x + 1$ et $4x^2 + 25x + 25$; les termes connus étant carrés, on peut trouver une seconde solution qui sera $\frac{4205}{1344}$.

31. Soit, pour troisième exemple, la double équation

$$x^2+9=\square, \qquad 24x+9=\square;$$

vous trouverez deux solutions, qui sont $\frac{45}{8}$ et $\frac{816}{225}$; on peut en déduire une infinité d'autres en substituant $x+\frac{45}{8}$ ou $x+\frac{816}{225}$ à x; je me contente de donner cette indication.

32. Enfin Bachet dit que l'on trouve deux solutions pour les doubles équations où les coefficients de x^2 et les termes connus sont des carrés, comme dans celle-ci :

$$x^2+12x+1=\square, \qquad x^2+1=\square.$$

Les méthodes ordinaires donnent en effet les solutions $\frac{4}{3}$ et $\frac{3}{4}$. Mais si l'on en demande davantage, Bachet s'arrête, tandis que notre Fermat se dégage aisément de la difficulté, et fournit une infinité de valeurs. J'ajoute que, même dans ce cas, Bachet ne donnera pas toujours deux solutions; sa méthode n'en fournit, en effet, qu'une seule pour telle double équation, comme

$$x^2+3x+1=\square, \qquad x^2+x+1=\square.$$

Bien plus, il arrivera souvent qu'il ne pourra même en donner une seule comme pour la double équation

$$x^2-6x+\frac{1}{4}=\square, \qquad x^2-2x+\frac{1}{4}=\square,$$

où la valeur sera affectée du signe —. J'ai déjà dit comment la méthode de Fermat donne toujours une infinité de solutions, même quand on tombe sur de faux nombres.

33. Diophante, IV, 29, étant arrivé à l'équation

$$9x^4-4x^3+6x^2-12x+1=\square,$$

Bachet dit qu'elle ne peut être résolue que de deux manières, en choisissant la racine du carré de façon à éliminer avec les termes en x^4 et

les termes connus, soit les termes en x, soit les termes en x^3, de façon que dans l'équation finale il ne reste soit que des termes en x^3 et en x^2, soit que des termes en x^2 et en x. Il trouve ainsi seulement les valeurs $\frac{8}{9}$ et $\frac{15}{13}$ pour x. Fermat en trouve au contraire une infinité, et en premier lieu il élimine aussi les termes en x^2 de façon à laisser subsister dans l'équation soit seulement les termes en x^4 et x^3, soit le terme en x et le connu. D'autre part, Bachet remarque que si l'on prend pour racine du carré : $3x^2+6x-1$, on tombe dans l'inconvénient d'égaler à zéro $24x^2+40x^3$. Cet inconvénient n'arrête pas Fermat. En troisième lieu, chaque valeur trouvée est pour lui la source d'une infinité d'autres, comme je l'ai déjà expliqué.

34. Enfin Bachet, sur Diophante, IV, 28, dit qu'il est impossible d'égaler à un cube $8x^3-x^2+8x-1$; il en donne comme raison que l'on ne pourrait prendre que le cube $(2x-1)^3$ afin d'éliminer le terme en x^3 et le terme connu; mais, avec tout le respect que je lui dois, cela est inexact; car tout d'abord on peut prendre le cube $\left(\frac{8}{3}x-1\right)^3$ et trouver ainsi $x=\frac{549}{496}$. En second lieu, rien n'empêche de prendre le cube $(2x-1)^3$, car, si l'on trouve ainsi $x=-\frac{2}{11}$, on peut faire une substitution en partant de cette solution. Au reste, je développerai plus longuement ces questions dans ma troisième Partie.

Fermat a dépassé Viète.

35. Viète a nié trop précipitamment qu'il fût possible de partager un nombre, somme de deux cubes, en deux autres cubes; Fermat (¹) enseigne comment ce problème peut être résolu d'après le commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 2 (ce dont pourtant Bachet lui-même ne s'était pas aperçu). Soit en effet 9, somme des deux cubes 8 et 1, à partager en deux autres cubes. On cherchera d'abord deux cubes ayant

(¹) *Voir* ci-dessus, *Observations sur Diophante,* 8 et 9, pages 246 et suiv.

pour différence 9; à cet effet, on appliquera la règle suivante : Faire le produit de chacun des deux cubes 8 et 1 par trois fois la racine de l'autre; diviser les deux produits par la différence des cubes; ajouter la plus grande racine au plus petit des deux quotients; retrancher la plus petite racine du plus grand quotient; la somme et la différence ainsi obtenues donneront les racines des cubes cherchés. Dans l'exemple choisi, ces racines seront donc $\frac{20}{7}$ et $\frac{17}{7}$; les cubes $\frac{4913}{343}$ et $\frac{8000}{343}$. En second lieu, deux cubes étant donnés, on peut en calculer deux autres ayant la même différence; voici la règle à cet effet : Faire le produit de chacun des deux cubes donnés par trois fois la racine de l'autre; diviser les deux produits par la somme des deux cubes; retrancher la plus petite racine du plus grand quotient et la plus grande racine du plus petit quotient; les restes seront les racines des cubes cherchés. Mais ceux qu'on a trouvés en dernier lieu ont pour différence 9; les autres cubes ayant la même différence 9 auront donc pour racines $\frac{188\,479}{90\,391}$ et $\frac{36\,520}{90\,391}$, et ces cubes seront $\frac{6\,695\,590\,842\,626\,239}{738\,542\,637\,646\,471}$ et $\frac{48\,707\,103\,808\,000}{738\,542\,637\,646\,471}$. Enfin il y a une troisième règle pour trouver deux cubes dont la somme soit égale à la différence de deux cubes donnés; la voici : Faire le produit de chacun des deux cubes donnés par trois fois la racine de l'autre; diviser ces deux produits par la somme des deux cubes; retrancher la plus petite racine du plus grand quotient et le plus petit quotient de la plus grande racine; les restes seront les racines des cubes cherchés. Or nous avons trouvé en dernier lieu deux cubes ayant 9 pour différence; si l'on cherche, par la règle ci-dessus, deux cubes dont la somme soit égale à cette différence, on trouvera pour leurs racines les nombres $\frac{1\,243\,617\,733\,990\,094\,836\,431}{609\,623\,835\,676\,137\,297\,449}$ et $\frac{487\,267\,171\,714\,352\,336\,560}{609\,623\,835\,676\,137\,297\,449}$.

36. Viète a résolu très habilement le problème proposé par Adrien Romain à tous les mathématiciens de l'univers, mais il ne l'a fait que

dans le cas où le nombre auquel doit être égalée l'expression proposée est inférieur à 2; il a d'ailleurs employé les sections angulaires, ce en quoi il a montré toute la puissance de son génie et ce qui lui a attiré une renommée immense et universelle. Mais notre Fermat (¹) a résolu le même problème dans le cas où le nombre donné est supérieur à 2, et où alors les sections angulaires ne peuvent être d'aucun secours. Soit, en effet, à égaler à un nombre donné quelconque l'expression $45x - 3795x^3 + 95634x^5$ etc., telle que l'a proposée Adrien Romain; c'est bien là en effet à quoi revient le problème, ainsi que Viète l'a reconnu et a corrigé l'énoncé. Soit $6+\sqrt{8}$ le nombre donné, supérieur à 2 par conséquent; Fermat affirme que la valeur protogène de l'inconnue peut être facilement représentée au moyen de racines universelles et qu'elle est dans ce cas

$$\sqrt[45]{3+\sqrt{2}+\sqrt{10+\sqrt{72}}}+\sqrt[45]{3+\sqrt{2}-\sqrt{10+\sqrt{72}}}.$$

Si maintenant le nombre donné est 4, Fermat affirme que la valeur de l'inconnue sera $\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[45]{2-\sqrt{3}}$, et il obtient ainsi des solutions pour tous les nombres supérieurs à 2, quels qu'ils soient, alors que, même en employant les solutions angulaires, Viète n'en pourrait donner une seule.

37. Viète, *Zetet.* V, 9, a traité peu heureusement le problème de Diophante, VI, 3. Ce problème consiste en effet à trouver un triangle rectangle tel que la somme de son aire et d'un nombre donné fasse un carré, tandis que Viète l'a restreint au cas où le nombre donné est somme de deux carrés.

Fermat a donné une infinité de solutions pour un nombre proposé quelconque. Soit, par exemple, le nombre 3, un des triangles cherchés sera $\frac{2441889}{416160}\cdot\frac{1397825}{416160}\cdot\frac{34}{40}$.

(¹) *Voir* ci-dessus pages 164 à 168.

Fermat dépasse Diophante sur nombre de points.

38. Diophante, V, 8, donne le moyen de trouver trois triangles rectangles dont l'aire soit égale; mais, si l'on en demande davantage, il peut d'autant moins satisfaire à la question, qu'il n'a jamais indiqué le procédé pour trouver un triangle rectangle de même aire qu'un triangle rectangle donné. Fermat résout ces deux problèmes par une même opération. Soit, par exemple, à trouver un triangle rectangle dont l'aire soit 6, comme celle du triangle rectangle 3.4.5. Soit 3 un des côtés d'un certain triangle rectangle; $x+4$ l'autre côté; la somme des carrés de ces côtés donne $x^2+8x+25$ pour le carré de l'hypoténuse; cette expression doit donc être égalée à un carré. D'autre part, l'aire de ce triangle, $\frac{3}{2}x+6$, doit être 6 fois un certain carré (puisque l'on demande que l'aire soit 6). Donc le sixième de l'aire ci-dessus doit faire un carré, et il en doit être de même du produit de ce sixième par 36. On doit donc égaler à un carré $9x+36$. On a ainsi une double équation

$$x^2+8x+25=\square, \qquad 9x+36=\square,$$

où les termes connus sont carrés; on trouvera donc facilement pour x la valeur $-\frac{60\,530\,400}{21\,650\,409}$, d'où $x+4=\frac{2\,896\,804}{2\,405\,601}$; l'autre côté de l'angle droit est 3; la somme des carrés de ces côtés fait un carré dont la racine sera l'hypoténuse, $\frac{7\,776\,485}{2\,405\,601}$; nous avons ainsi le triangle rectangle $\frac{7\,776\,485}{2\,405\,601}\cdot\frac{2\,896\,804}{2\,405\,601}\cdot 3$, dont l'aire sera le sextuple d'un certain carré, à savoir $\frac{724\,201}{2\,405\,601}$, dont la racine est $\frac{851}{1551}$. Divisons par cette racine chacun des côtés du triangle rectangle que nous venons de trouver, nous aurons le triangle cherché $\frac{12\,061\,328\,235}{2\,047\,166\,451}\cdot\frac{4\,492\,943\,004}{2\,047\,166\,451}\cdot\frac{4\,653}{851}$, dont l'aire est 6. On remarquera que nous avons trouvé ce triangle en partant du triangle donné 3.4.5; mais celui que nous avons trouvé

peut, par le même procédé, nous en fournir un troisième, celui-ci un quatrième, et ainsi de suite indéfiniment. Voici, au reste, quatre triangles rectangles ayant pour aire 840; le premier étant 58.40.42, le second 74.24.70, le troisième 113.15.112, le quatrième sera

$$\frac{22\,606\,096}{19\,024}\cdot\frac{26\,896}{19\,024}\cdot\frac{22\,606\,080}{19\,024}.$$

39. Diophante, VI, 6, tombe sur la double équation

$$x^2+1=\square,\qquad 14x+1=\square.$$

Elle peut être résolue de deux manières, qu'on suppose d'ailleurs que la première expression soit la plus grande ou la plus petite des deux. On trouvera pour x les deux valeurs $\frac{24}{7}$ et $\frac{175}{288}$; demandez-en une troisième à Diophante, il ne la donnera pas. Fermat peut en fournir une infinité; par exemple, substituons $x+\frac{24}{7}$ à x dans les deux expressions x^2+1 et $14x+1$, la transformation donnera les expressions suivantes $x^2+\frac{48}{7}x+\frac{625}{49}$ et $14x+49$, dont les termes connus sont carrés; on peut donc les résoudre par la méthode connue et l'on y trouvera pour x la valeur $-\frac{1\,225\,258\,011\,250}{358\,216\,614\,144}$. Ajoutez $\frac{24}{7}$, vous aurez pour solution de la double équation proposée $+\frac{20\,392\,660\,706}{2\,507\,516\,299\,008}$.

40. Diophante, après les problèmes VI, 15 et 17, a omis un troisième cas, la recherche d'un triangle rectangle tel que si l'on retranche son aire soit de l'hypoténuse, soit de l'un des côtés de l'angle droit, on ait un carré; problème d'une rare subtilité que Diophante n'a omis, comme je l'ai dit, que parce qu'il est arrivé à de faux nombres dont il n'a pu se tirer. Fermat en donne une solution très remarquable; tout d'abord il reconnaît par son analyse qu'il faut trouver un triangle rectangle tel que le produit de l'hypoténuse par la somme de l'un des côtés de l'angle droit et de la moitié de l'autre,

donne un carré, après soustraction de l'aire; il trouve ensuite ce triangle, par le raisonnement et les calculs que j'ai indiqués plus haut, n° 26, où j'ai dit que le triangle 985.697.696 satisfaisait à la condition proposée. En troisième lieu, il multiplie les côtés de ce dernier triangle par l'inconnue, et prend ainsi pour le triangle cherché : $985x.697x.696x$, dont l'aire est $242\,556x^2$. Retranchons-la de l'hypoténuse $985x$ et du côté $697x$, et égalons à des carrés les restes : $985x - 242\,556x^2$ et $697x - 242\,556x^2$. Prenons enfin pour ce dernier carré celui de $697x$, et posons en conséquence

$$485\,809x^2 = 697x - 242\,556x^2;$$

on aura $x = \frac{1}{1045}$, et le triangle primitivement cherché sera

$$\frac{985}{1045} \cdot \frac{697}{1045} \cdot \frac{696}{1045}.$$

Voilà où Diophante n'a jamais pu arriver. Nous donnerons encore plus loin nombre d'autres exemples de problèmes qu'il a omis, parce qu'il n'a pu les résoudre.

Douze problèmes sur l'application des méthodes indiquées ci-dessus.

41. Les exemples que nous avons déjà donnés constituent autant de problèmes très difficiles, que l'Algèbre ordinaire est impuissante à résoudre. Ainsi le premier (n° 6) relatif à l'équation double

$$4x + 1 = \square, \qquad x^2 - 2x + 1 = \square,$$

pourrait s'énoncer comme suit : Trouver un nombre plus grand que 8, dont le quadruple ajouté à l'unité, fasse un carré, et dont le carré, augmenté de l'unité, mais diminué du double du nombre, fasse également un carré. Le nombre cherché sera $\frac{35}{4}$.

Le second exemple (n° 11) peut être proposé comme suit : Trouver un nombre dont le double, retranché de l'unité, donne un carré, et dont le quadruple retranché de l'unité ajoutée au double du carré du

nombre, fasse également un carré. D'où l'équation double

$$1 - 2x = \square, \qquad 1 - 4x + 2x^2 = \square,$$

et la solution $\frac{5\,333\,240}{39\,150\,049}$.

Enfin le troisième exemple (nº 12), celui de l'équation double

$$8x^2 + 16x + 4 = \square, \qquad 2x^2 + 4x + 4 = \square,$$

peut être proposé comme suit en problème : Trouver un nombre tel qu'en le multipliant par 16, ajoutant 8 fois son carré et le nombre 4, on ait un carré, et que d'autre part, son quadruple, augmenté du double de son carré et en plus du nombre 4, fasse un carré.

La solution sera $\frac{10}{7}$.

J'omets les autres exemples pour aborder quelques autres questions plus brillantes.

Trouver indéfiniment deux nombres tels qu'en retranchant leur produit soit de l'un quelconque des deux, soit de leur somme, soit de leur différence, on ait toujours un carré.

42. Soient x et $1 - x$ ces deux nombres, positions qui satisfont aux deux premières conditions; reste à satisfaire également aux deux dernières. Je suppose que x soit le plus petit des deux nombres; si l'on retranche leur produit, $x - x^2$, de leur différence $1 - 2x$, on a pour reste : $x^2 - 3x + 1$. Si l'on retranche le produit des deux nombres de leur somme, 1, on a d'autre part le reste $x^2 - x + 1$. En égalant les deux restes à des carrés, on a par la méthode ordinaire : $x = \frac{3}{8}$; les deux nombres cherchés seront donc $\frac{3}{8}$ et $\frac{5}{8}$. Je substitue maintenant $x + \frac{3}{8}$ à x dans les expressions des deux restes ci-dessus; les transformées seront

$$x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{49}{64} = \square, \qquad x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{1}{64} = \square.$$

Comme les termes connus y sont carrés, on peut trouver, pour ces

transformées, $x = -\frac{12\,459\,200\,600}{219\,798\,015\,360}$. En ajoutant $\frac{3}{8}$, on aura la valeur de l'inconnue dans les expressions primitives, et on obtiendra ainsi les deux nombres $\frac{249\,875\,197}{784\,992\,912}$ et $\frac{535\,117\,715}{784\,992\,912}$. De la valeur trouvée en dernier lieu, on peut d'ailleurs déduire une troisième valeur, de cette troisième une quatrième, et ainsi de suite indéfiniment.

Voici deux autres nombres satisfaisant à la question : $\frac{10\,416}{51\,865}$ et $\frac{41\,449}{51\,865}$.

Trouver indéfiniment trois nombres tels qu'en retranchant leur produit, soit de l'un quelconque d'entre eux, soit de l'une quelconque de leurs différences, soit du produit du moyen par l'un des extrêmes, soit du carré du moyen, on ait toujours un carré.

43. Posons x, 1, $1-x$ pour les trois nombres cherchés. Leur produit, $x - x^2$, laisse un carré si on le retranche, soit du premier, soit du troisième, soit de l'excès du second sur le premier, soit de l'excès du second sur le troisième.

Pour satisfaire aux autres conditions, il suffit d'ailleurs que l'on ait

$$x^2 - x + 1 = \square, \qquad x^2 - 3x + 1 = \square,$$

expressions identiques à celles de la question précédente. On trouvera donc $x = \frac{3}{8}$, et les trois nombres seront 3, 8, 5, en supposant 8 pour dénominateur commun. De même les trois suivants : 10416, 51865, 41449 (avec 51865 pour dénominateur commun); ou encore les trois : 249875197, 784992912, 535117715 (avec 784992912 pour dénominateur commun) satisferont aussi au problème.

On aurait pu le proposer sous cette forme : Partager 2 d'une infinité de façons en trois parties, telles qu'en retranchant le produit des trois de chacune d'elles, de chacune de leurs différences, du produit de la moyenne par chacune des extrêmes, enfin du carré de la moyenne, on ait toujours un carré. En effet, pour chaque ternaire des nombres

ci-dessus, la somme des trois nombres est toujours 2. Remarquez d'ailleurs que par *partie moyenne*, je n'entends pas celle qui est plus petite que la plus grande et plus grande que la plus petite, que je tiens seulement compte de l'ordre de situation, tel qu'il a été observé ci-dessus.

Trouver indéfiniment deux nombres tels que si l'on retranche la différence de leurs carrés, soit du plus grand, soit du plus petit, soit de leur différence, on ait toujours un carré.

44. Soit $1 - 2x$ la somme des deux nombres, $2x$ leur différence; ces nombres seront donc $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} - 2x$, et la différence de leurs carrés sera $2x - 4x^2$. Qu'on la retranche, soit de la somme, soit de la différence, elle laissera toujours un carré. Mais il faut encore qu'il en soit de même si on la retranche soit de l'un, soit de l'autre des deux nombres. On aura donc la double équation

$$4x^2 - 2x + \frac{1}{2} = \square, \qquad 4x^2 - 4x + \frac{1}{2} = \square,$$

et l'on trouvera $x = \frac{7}{48}$. Les deux nombres cherchés seront $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{24}$.

Pour en trouver une autre paire, on substituera $x + \frac{7}{48}$ à x dans les deux expressions ci-dessus, et l'on poursuivra l'opération suivant les règles données plus haut, sans se laisser arrêter par la rencontre de faux nombres, car j'ai dit comment on peut les ramener à de vrais nombres.

Trouver deux nombres dont la somme fasse un carré et dont la somme des carrés fasse un bicarré.

45. Ce problème est tout à fait le même que celui que nous avons énoncé ci-dessus : Trouver un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit un carré, aussi bien que la somme des côtés de l'angle droit; notre

Fermat l'a d'ailleurs proposé à nombre de savants mathématiciens sans qu'il ait été résolu par eux. On partira du triangle primitif trouvé ci-dessus (nº 25), à savoir : 169.119.120, qui est formé des nombres 5 et 12. Si l'on forme un nouveau triangle avec les nombres $x+5$ et 12, il aura pour côtés : $x^2+10x+169$, $x^2+10x-119$, $24x+120$. Or il faut égaler à des carrés tant l'hypoténuse : $x^2+10x+169$, que la somme des côtés de l'angle droit : $x^2+34x+1$. Si l'on multiplie cette dernière somme par 169, la double équation sera

$$169x^2+5746x+169=\square, \qquad x^2+10x+169=\square;$$

c'est celle qui a été traitée au nº 22. On a donc $x=\frac{2\,048\,075}{20\,566}$; d'où, d'après les positions prises pour les deux nombres générateurs, on aura le triangle cherché

$$4\,687\,298\,610\,289.\ 4\,565\,486\,027\,761.\ 1\,061\,652\,293\,520,$$

dont l'hypoténuse est un carré, aussi bien que la somme des côtés de l'angle droit. Dès lors les deux côtés de l'angle droit sont deux nombres dont la somme est un carré et dont la somme des carrés est un bicarré. C. Q. F. T.

Trouver un triangle rectangle tel qu'un côté de l'angle droit soit un carré et qu'en y ajoutant un multiple donné de l'autre côté de l'angle droit, on ait encore un carré.

46. Soit 3 le multiplicateur donné. Formons le triangle des nombres $x+1$ et 1; les côtés seront : x^2+2x+2, x^2+2x, $2x+2$. Multiplions ce dernier côté par 3 et ajoutons le produit, $6x+6$, au côté intermédiaire; il vient x^2+8x+6 qui doit être un carré, en même temps que le côté intermédiaire : x^2+2x. En résolvant la double équation à la manière ordinaire, on trouvera $x=\frac{1}{12}$, et, d'après les positions, le triangle cherché sera, en nombres entiers : 313.25.312.

Trouver un triangle rectangle tel qu'un côté de l'angle droit soit un carré et qu'en en retranchant un multiple donné de l'autre côté de l'angle droit on ait encore un carré.

47. Soit encore 3 le multiplicateur donné : on partira, comme triangle primitif, de celui qui a été trouvé dans la question précédente : 313.25.312. Les nombres générateurs en sont 13 et 12; on formera, en conséquence, le triangle cherché des nombres $x-13$ et 12. Les côtés seront : $x^2-26x+313$, $x^2-26x+25$, $24x-312$. Multiplions le dernier par 3 et retranchons le produit du côté intermédiaire, il reste $x^2-98x+961$, qui doit être un carré, en même temps que le côté intermédiaire, $x^2-26x+25$. On a donc une double équation, pour laquelle il convient, suivant ce qui a été dit au n° 4, de multiplier la seconde expression par $\frac{961}{25}$; on aura ainsi

$$\frac{961}{25}x^2-\frac{24986}{25}x+961=\square,\qquad x^2-98x+961=\square.$$

La différence des deux expressions est

$$\frac{936}{25}x^2-\frac{22536}{25}x=\frac{26}{5}x\times\left(\frac{36}{5}x-\frac{11268}{65}\right).$$

En continuant à l'ordinaire, on trouvera $x=\frac{27\,681\,731}{318\,370}$; les nombres $x-13$ et 12, si l'on chasse le dénominateur, deviendront en entiers 23 542 921 et 3 820 440. On en formera le triangle cherché :

568 864 871 005 841 . 539 673 367 418 641 . 179 888 634 210 480.

Je donnerai plus loin (Partie III, n° 36) une solution du même problème par une autre méthode.

Trouver un triangle rectangle tel que l'hypoténuse soit un carré et qu'en retranchant d'un des côtés de l'angle droit un multiple donné de l'autre côté on ait un carré.

48. Soient $x+1$ et 1 les nombres générateurs du triangle; les côtés seront : x^2+2x+2, x^2+2x, $2x+2$. Si l'on retranche le

double de ce dernier côté, c'est-à-dire $4x+4$, de x^2+2x, il restera x^2-2x-4 qui devra être un carré, en même temps que l'hypoténuse : x^2+2x+2. Cette double équation donne $x=-\frac{17}{12}$; par suite $x+1$ et 1, en chassant le dénominateur, auront les valeurs entières -5 et 12, dont on forme le triangle : $169.119.-120$. Recommençons donc l'opération, en prenant, pour nombres générateurs du triangle, $x-5$ et 12. Les côtés du triangle seront : $x^2-10x+169$; $x^2-10x-119$; $24x-120$. Si l'on retranche du côté intermédiaire le double du dernier côté, le reste $x^2-58x+121$ devra être un carré, de même que l'hypoténuse $x^2-10x+169$. En multipliant le reste $x^2-58x+121$ par le carré $\frac{169}{121}$, on aura comme expressions ramenées à avoir un même carré pour terme connu :

$$\frac{169}{121}x^2-\frac{9802}{121}x+169=\square, \qquad x^2-10x+169=\square.$$

La différence des deux expressions est

$$\frac{48}{121}x^2-\frac{8592}{121}x=\frac{2}{11}x\times\left(\frac{24}{11}x-\frac{4296}{11}\right).$$

En égalant à la plus grande expression le carré de la demi-somme des facteurs, on trouvera $x=\frac{4593455}{46046}$, ce qui, d'après les positions, conduira au triangle

$$19\,343\,046\,113\,329.\ \ 18\,732\,418\,687\,921.\ \ 4\,821\,817\,400\,400,$$

lequel satisfait à la question.

Trouver un triangle rectangle tel qu'un des côtés de l'angle droit soit un carré et qu'en ajoutant à l'hypoténuse un multiple donné de l'autre côté de l'angle droit on ait encore un carré.

49. Soit 2 le multiplicateur donné. Si l'on forme le triangle des nombres $x+1$ et 1, ses côtés seront : x^2+2x+2; x^2+2x; $2x+2$. Supposons que le côté intermédiaire, x^2+2x, soit un carré, et ajoutons à l'hypoténuse le double, $4x+4$, de l'autre côté;

la somme $x^2 + 6x + 6$ doit être également un carré. On a donc

$$x^2 + 6x + 6 = \square, \qquad x^2 + 2x = \square.$$

D'où $x = \frac{1}{4}$. En nombres entiers, $x + 1$ et x deviendront 5 et 4, qui forment le triangle cherché : 41.9.40. On résoudra par là même le problème suivant : Trouver un triangle rectangle tel qu'un des côtés de l'angle droit soit un carré et qu'en ajoutant à l'hypoténuse soit l'autre côté simplement, soit son double, on ait toujours un carré. Ce triangle est, en effet, celui que l'on vient de trouver : 41.9.40. Si l'on faisait ajouter à l'hypoténuse, soit l'autre côté simplement, soit son quintuple, on aurait le triangle 30.16.34, formé des nombres 5 et 3.

Trouver un triangle rectangle tel qu'un des côtés de l'angle droit soit un carré et qu'en retranchant de l'hypoténuse un multiple donné de l'autre côté de l'angle droit on ait encore un carré.

50. Soit encore donné le multiplicateur 2. Prenons comme triangle primitif celui qui a été trouvé pour la question précédente : 41.9.40, formé des nombres 5 et 4. D'après l'analyse qui précède, on formera le triangle cherché des nombres $x - 5$ et 4. Les côtés seront : $x^2 - 10x + 41$; $x^2 - 10x + 9$; $8x - 40$. Égalons à un carré le côté intermédiaire : $x^2 - 10x + 9$; d'autre part, retranchons de l'hypoténuse le double du dernier côté, $8x - 40$; et égalons à un carré le reste, qui est $x^2 - 26x + 121$. La double équation

$$x^2 - 26x + 121 = \square, \qquad x^2 - 10x + 9 = \square$$

semble pouvoir se résoudre de plusieurs manières, mais on n'en trouvera guère qui procure une solution effective, à moins de recourir à la nouvelle méthode exposée, n° **20** et suivants. Si l'on ramène, en effet, à l'égalité les termes carrés connus, en multipliant la seconde expression par $\frac{121}{9}$, on aura la double équation sous la forme

$$\frac{121}{9}x^2 - \frac{1210}{9}x + 121 = \square, \qquad x^2 - 26x + 121 = \square.$$

La différence des deux expressions est

$$\frac{112}{9}x^2 - \frac{976}{9}x = \frac{8}{3}x \times \left(\frac{14}{3}x - \frac{122}{3}\right).$$

En égalant à la première expression le carré de la demi-somme des facteurs, on trouvera $x = \frac{658}{33}$, et en en retranchant 5, on aura $\frac{493}{33}$. Les nombres générateurs du triangle seront par suite 493 et 132, et dès lors le triangle cherché sera 260473.225625.130152.

On résoudra de même le problème suivant : Trouver un triangle rectangle tel que l'un des côtés de l'angle droit soit un carré et qu'en retranchant de l'hypoténuse, soit l'autre côté pris simplement, soit son double, on ait toujours un carré. Ces conditions sont, en effet, satisfaites par les nombres donnés ci-dessus, et il ne faut pas dire que celle que nous venons d'ajouter est sans objet, comme remplie d'elle-même dans tout triangle; car si elle est effectivement remplie pour tout triangle (primitif), il n'en est pas de même pour leurs multiples; ainsi, dans le triangle 624.576.240, l'un des côtés de l'angle droit est bien carré, de même que l'excès de l'hypoténuse sur le double de l'autre côté; mais la somme de l'hypoténuse et de cet autre côté, pris simplement, n'est nullement un carré.

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un carré en retranchant l'aire du carré de la somme des côtés de l'angle droit.

51. Soient x et 1 les deux côtés de l'angle droit; la somme de leurs carrés, $x^2 + 1$, fera le carré de l'hypoténuse et si, du carré de la somme des mêmes côtés, on retranche l'aire du triangle, qui est $\frac{x}{2}$, on a pour reste $x^2 + \frac{3}{2}x + 1$ à égaler de même à un carré. Cette double équation donne $x = -\frac{55}{48}$. Je substituerai donc $x - \frac{55}{48}$ à x dans les deux expressions égalées à des carrés; les transformées seront

$$x^2 - \frac{19}{24}x + \frac{1369}{2304} = \square, \qquad x^2 - \frac{55}{24}x + \frac{5329}{2304} = \square.$$

En multipliant la première par $\frac{5329}{1369}$, je ramènerai à l'égalité les termes carrés connus, et j'aurai les deux expressions

$$\frac{5329}{1369}x^2 - \frac{101251}{32856}x + \frac{5329}{2304} \quad \text{et} \quad x^2 - \frac{55}{24}x + \frac{5329}{2304},$$

dont la différence est

$$\frac{3960}{1369}x^2 - \frac{2163}{2738}x = \frac{36}{37}x \times \left(\frac{110}{37}x - \frac{2163}{2664}\right).$$

On en déduira $x = \frac{7622505}{5250744}$; en retranchant $\frac{55}{48}$, on aura, pour la valeur de l'inconnue dans les premières positions, $\frac{39655}{129648}$. Les côtés de l'angle droit, qui ont été posés égaux à x et à 1, seront donc en nombres entiers 39655 et 129648, et l'hypoténuse 135577. C'est le triangle cherché.

Trouver un triangle rectangle tel qu'un côté de l'angle droit soit carré, aussi bien que la somme des côtés de l'angle droit et que, si l'on retranche le double de l'aire de l'un ou de l'autre des côtés de l'angle droit, on ait toujours des carrés.

52. Soient x et $1 - x$ les côtés de l'angle droit; le double de l'aire est $x - x^2$; si on le retranche de l'un et de l'autre des deux côtés, on a les carrés x^2 et $x^2 - 2x + 1$. D'autre part, la somme des côtés est le carré 1. Il faut encore que le second côté, $1 - x$, soit un carré, aussi bien que la somme des carrés des côtés, c'est-à-dire $2x^2 - 2x + 1$. On trouvera $x = \frac{40}{49}$. Le triangle cherché sera donc $\frac{40}{49} \cdot \frac{9}{49} \cdot \frac{41}{49}$.

Trouver un triangle rectangle tel qu'un côté de l'angle droit soit un cube et que, si l'on en retranche l'aire, il reste un carré.

53. Soient x et 1 les côtés de l'angle droit; de la sorte l'un d'eux sera cube; de ce cube, je retranche l'aire $\frac{1}{2}x$. Il reste $1 - \frac{1}{2}x$ qui doit

être égalé à un carré, en même temps que x^2+1. Cette double équation me donnant $x=-\frac{272}{225}$, je substitue $x-\frac{272}{225}$ à x dans les deux expressions égalées à des carrés; les transformées sont :

$$\frac{361}{225}-\frac{1}{2}x=\square,\qquad x^2-\frac{544}{225}x+\frac{124\,609}{50\,625}=\square.$$

Les termes connus y sont carrés; je les ramène à l'égalité et j'ai ainsi

$$x^2-\frac{544}{225}x+\frac{124\,609}{50\,625}=\square,\qquad \frac{124\,609}{50\,625}-\frac{124\,609}{162\,450}x=\square.$$

La différence des deux expressions est

$$x^2-\frac{268\,159}{162\,450}x=x\times\left(x-\frac{268\,159}{162\,450}\right).$$

J'en conclus $x=\frac{187\,917\,462\,543}{80\,970\,928\,200}$; j'en retranche $\frac{272}{225}$ pour trouver la valeur de l'inconnue dans les positions primitives; j'ai ainsi

$$\frac{90\,032\,607\,119}{80\,970\,928\,200},$$

et le triangle cherché sera

$$\frac{121\,087\,412\,881}{80\,970\,928\,200}\cdot 1\cdot\frac{90\,032\,607\,119}{80\,970\,928\,200}.$$

SECONDE PARTIE.

DE LA TRIPLE ÉQUATION ET DES SOLUTIONS EN NOMBRE INDÉFINI.

1. Il est vulgaire de rendre égales à des carrés deux expressions remplissant certaines conditions; mais jusqu'à présent il a été inouï de le faire pour trois expressions. Fermat assure cependant hardiment que non seulement cela est possible, mais qu'il est même facile d'y parvenir; il donne à cet égard des règles précises qui, pour être appliquées, demandent seulement qu'il y ait un même carré dans chacune

des expressions; elles peuvent d'ailleurs comprendre, soit des termes en x et des termes connus, soit des termes en x^2 et en x.

Règle générale pour résoudre les triples équations.

2. Si vous avez trois expressions à égaler à des carrés, et que le terme carré soit le même dans les trois, prenez pour l'inconnue la somme d'un terme en x^2 et d'un terme en x, dont les coefficients soient déterminés de façon qu'en multipliant cette somme par le coefficient du terme en x dans une des expressions données, et en ajoutant le terme connu de la même expression, on ait identiquement un carré. Substituez à x cette nouvelle position de l'inconnue dans les deux autres carrés, vous aurez ainsi une double équation ordinaire, d'où vous tirerez une valeur de x satisfaisant aux trois équations transformées; substituez cette valeur dans les termes en x^2 et en x que vous avez posés pour représenter l'inconnue, vous aurez ainsi la valeur cherchée satisfaisant à la triple équation proposée.

3. Soit, comme exemple, la triple équation

$$1 + x = \square, \qquad 1 + 2x = \square, \qquad 1 + 5x = \square.$$

Je représente l'inconnue par $x^2 + 2x$, binome qui, si on le multiplie par 1, coefficient de x dans la première expression, fait $x^2 + 2x$, et après addition de 1, donne le carré $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. Je substitue $x^2 + 2x$ à x dans les deux autres expressions, $1 + 2x$ et $1 + 5x$; j'ai ainsi les deux transformées

$$2x^2 + 4x + 1 = \square, \qquad 5x^2 + 10x + 1 = \square,$$

que je traite par la méthode ordinaire; la différence des expressions est $3x^2 + 6x = 3x \times (x + 2)$. En égalant le carré de la demi-somme des facteurs, c'est-à-dire $4x^2 + 4x + 1$, à la plus grande expression $5x^2 + 10x + 1$, j'obtiens la valeur $x = -6$ (faux nombre qui donne des carrés dans les trois expressions transformées). Je la substitue dans la représentation de l'inconnue, c'est-à-dire dans $x^2 + 2x$. Pour

cela je prends le carré de -6, qui est 36; je l'unis au double de -6, c'est-à-dire à -12. J'ai ainsi $+24$, valeur de x pour les trois expressions primitives, qui donnent en effet les trois carrés : 25, 49, 121, en prenant $x=24$.

4. Soit encore la triple équation

$$2x+4=\square,\qquad 3x+4=\square,\qquad 6x+4=\square.$$

Je représente l'inconnue par $\frac{1}{2}x^2+2x$, de façon qu'en multipliant par 2 j'aie x^2+4x qui, ajouté à 4, fait le carré x^2+4x+4. Continuez comme ci-dessus, vous trouverez pour solution de la triple équation $x=\frac{1120}{529}$.

5. De même encore, si l'on propose la triple équation

$$x+9=\square,\qquad 3x+9=\square,\qquad 5x+9=\square,$$

on substituera x^2+6x à x et l'on aura trois expressions transformées dont la première sera identiquement un carré; les deux autres, traitées suivant la méthode ordinaire pour la double équation, conduisent à la solution $\frac{1512}{121}$.

Si les termes connus sont des carrés différents, il n'y a pas plus de difficulté pour résoudre la triple équation.

6. Qu'on donne, en effet, la triple équation

$$x+1=\square,\qquad 3x+4=\square,\qquad 2x+9=\square,$$

on ramènera les trois carrés à l'égalité, et on poursuivra comme je l'ai expliqué. Il est d'ailleurs facile de ramener les trois carrés à l'égalité en faisant leur produit; la triple équation précédente deviendra de la sorte

$$36x+36=\square,\qquad 27x+36=\square,\qquad 8x+36=\square.$$

En effet, comme dans la première expression on a multiplié le terme

connu, 1, par 36, il faut de même multiplier par 36 le coefficient de x dans la même expression; pour la seconde, le terme connu, 4, est multiplié par 9 pour obtenir 36; il faut donc multiplier par 9 le coefficient 3 de x. Enfin le dernier carré, 9, doit être multiplié par 4 pour donner 36; il faut donc, dans la même expression, multiplier par 4 le coefficient 2 de x, ce qui donne $8x$. D'ailleurs la triple équation transformée conduit à la solution $x = \frac{269\,280}{741\,769}$; la même valeur satisfera dès lors à la question proposée.

La même règle s'étend au cas où des coefficients de x seraient négatifs.

7. Par exemple, soit proposée la triple équation

$$1 + x = \square, \qquad 1 - 2x = \square, \qquad 1 + 5x = \square.$$

En substituant $x^2 + 2x$ à x, on aura la transformée

$$1 + 2x + x^2 = \square, \qquad 1 - 4x - 2x^2 = \square, \qquad 1 + 10x + 5x^2 = \square.$$

La première expression étant identiquement un carré, il suffit de considérer les deux autres, qui conduiront à la valeur $x = \frac{2}{11}$, d'où, pour la triple équation proposée, la solution $\frac{48}{121}$.

On peut obtenir des solutions en nombre indéfini pour les triples équations.

8. Je vais le montrer par un exemple; j'ai dit plus haut (nº **3**) que la valeur $x = -6$ satisfait à la double équation

$$2x^2 + 4x + 1 = \square, \qquad 5x^2 + 10x + 1 = \square.$$

Je substitue $x - 6$ à x dans les deux expressions ci-dessus et j'obtiens ainsi les transformées

$$5x^2 - 50x + 121 = \square, \qquad \frac{242}{49}x^2 - \frac{2420}{49}x^2 + 121 = \square.$$

La méthode ordinaire me donne pour solution un certain nombre, dont j'ai à retrancher 6 (puisque j'ai substitué $x-6$ à x); j'obtiens ainsi $\frac{11\,504\,385\,816}{14\,716\,382\,219}$. Comme les trois expressions primitives (n° 3) étaient $x+1$, $2x+1$, $5x+1$ et qu'on avait substitué x^2+2x à x, il faut maintenant que je prenne le carré du nombre trouvé ci-dessus, et que j'y ajoute le double du même nombre : j'obtiens ainsi la valeur $x=\frac{470\,956\,770\,729\,578\,397\,264}{216\,571\,905\,615\,699\,363\,961}$, qui satisfait aux conditions proposées, car avec cette valeur

$$x+1=\left(\frac{26\,220\,768\,035}{14\,716\,382\,219}\right)^2,$$

$$2x+1=\left(\frac{34\,036\,531\,067}{14\,716\,382\,219}\right)^2,$$

$$5x+1=\left(\frac{50\,708\,537\,341}{14\,716\,382\,219}\right)^2.$$

Lorsque, dans une triple équation, le plus grand coefficient de l'inconnue est égal à la somme des deux autres, la solution est impossible par la méthode ci-dessus ([1]).

9. Soit, par exemple, la triple équation

$$2x+1=\square,\qquad 3x+1=\square,\qquad 5x+1=\square.$$

Substituons $2x^2+2x$ à x, pour que la première expression se transforme dans le carré $4x^2+4x+1$. Les deux autres expressions, après

([1]) Dans une note sur un de ses manuscrits conservés à la Bibliothèque de Dijon (Ms. 266[3], folio 21 verso), le Père de Billy revendique pour lui-même en ces termes la remarque de ce cas d'impossibilité :

« Anno 1660 jun. 27, Dominus de Fermat, Senator Parlamenti Tholosani, significavit mihi habere se methodum generalem resolvendi triplicatas æqualitates in quibus occurrunt tantum quadrati et radices et numerus quadratorum est quadratus : ut si æquentur quadrato

$$1AA+2A,\quad 4AA+6A,\quad 9AA+6A,$$

potest variari quomodo libet numerus radicum. Ego correxi Dominum de Fermat et ostendi quod, si duo minores numeri radicum æquentur majori, impossibilis est solutio per ipsius methodum : quod ipse postea fassus est ingenue se non animadvertisse. »

substitution, deviennent

$$6x^2 + 6x + 1 = \square, \qquad 10x^2 + 10x + 1 = \square.$$

Si l'on traite cette double équation par la méthode ordinaire, on aura, comme solution des transformées, $x = -1$, valeur qui, substituée dans la représentation $2x^2 + 2x$ de l'inconnue, donne o, c'est-à-dire la négation de tout nombre positif.

10. On doit dire la même chose pour toute autre triple équation de même sorte. Remarquez cependant que j'ai dit que, dans ce cas, la solution est impossible par la méthode que j'expose, car on peut proposer nombre de triples équations du même genre qui, en elles-mêmes, ne seront pas impossibles; par exemple la suivante

$$5x + 1 = \square, \qquad 16x + 1 = \square, \qquad 21x + 1 = \square,$$

où, en substituant la valeur $x = 3$, on trouve les carrés 16, 49, 64.

11. Il faut encore observer avec notre Fermat que la triple équation

$$x + 1 = \square, \qquad 2x + 1 = \square, \qquad 3x + 1 = \square$$

est impossible à la fois dans son essence et au point de vue de la méthode; dans son essence, parce qu'on démontre qu'il ne peut y avoir quatre nombres carrés en progression arithmétique, ce qui, dans le cas d'une solution, aurait pourtant lieu, en prenant l'unité comme le premier de ces quatre carrés; au point de vue de la méthode, parce que, quand bien même la triple équation serait possible en elle-même, on ne peut la résoudre par la méthode exposée ci-dessus, puisque le plus grand coefficient de l'inconnue est égal à la somme des deux autres.

12. Enfin, il faut entendre l'exception comme n'ayant lieu que si le terme connu est un même carré dans les trois expressions; car autrement, si les termes connus étaient des carrés différents, le plus grand

coefficient de x peut très bien être la somme des deux autres; par exemple, pour la triple équation

$$x+1=\square,\qquad 2x+9=\square,\qquad 3x+4=\square,$$

notre méthode donne la valeur $x=\frac{269280}{744769}$.

Une triple équation peut encore se résoudre si les expressions sont exclusivement composées de termes en x^2 et en x, pourvu que les coefficients de x^2 soient des carrés (positifs).

13. Soit, par exemple, la triple équation

$$x^2+x=\square,\qquad x^2+2x=\square,\qquad x^2+5x=\square;$$

on peut ramener les expressions à ne renfermer que des termes en x ou connus, et l'on obtient ainsi la triple équation déjà traitée plus haut

$$x+1=\square,\qquad 2x+1=\square,\qquad 5x+1=\square,$$

pour laquelle $x=24$. En divisant l'unité par cette valeur, j'aurai la solution cherchée pour la question proposée, savoir $\frac{1}{24}$. La raison en est que si, dans la triple équation primitive, je substitue $\frac{1}{x}$ à x, la première expression, x^2+x, deviendra $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$; la seconde, $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}$; la troisième, $\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}$. Mais, en les égalant à des carrés, je puis les multiplier par x^2, ce qui me donne

$$x+1=\square,\qquad 2x+1=\square,\qquad 5x+1=\square.$$

En effet, le produit d'un carré par un carré est toujours un carré. De la sorte, la triple équation constituée avec des termes en x^2 et en x a été ramenée à une triple équation constituée avec des termes en x ou connus; comme d'autre part on a substitué $\frac{1}{x}$ à x, il y a lieu de diviser l'unité par la valeur obtenue pour x dans la transformée.

14. Soit proposée la triple équation

$$4x^2+2x=\square,\qquad 4x^2+6x=\square,\qquad 4x^2+9x=\square;$$

on la convertira en la suivante :

$$2x+4=\square,\qquad 6x+4=\square,\qquad 9x+4=\square,$$

pour laquelle on trouvera $x=\frac{2080}{2209}$; divisant l'unité par cette valeur, on aura $\frac{2209}{2080}$ comme solution de la triple équation proposée. De même, si l'on a

$$x^2+2x=\square,\qquad 4x^2+3x=\square,\qquad 16x^2+9x=\square,$$

la conversion donnera

$$2x+1=\square,\qquad 3x+4=\square,\qquad 9x+16=\square,$$

d'où $x=\frac{110656}{529}$; si l'on divise l'unité par cette valeur, $\frac{529}{110526}$ sera la solution cherchée. Soit enfin

$$x^2+x=\square,\qquad 4x^2+3x=\square,\qquad 9x^2+2x=\square,$$

la conversion donnera

$$x^2+x=\square,\qquad 3x+4=\square,\qquad 2x+9=\square,$$

d'où $x=\frac{269\,280}{744\,769}$; divisant l'unité par cette valeur, on aura $\frac{744\,769}{269\,280}$ comme solution de la triple équation proposée.

15. Remarquez que l'on peut abréger les calculs dans le cas où les coefficients des termes en x^2 sont les mêmes, mais diffèrent de l'unité, en les ramenant précisément à l'unité sans toucher aux coefficients des termes en x; on n'aura qu'à diviser plus tard la valeur trouvée pour x par le carré donné comme coefficient des termes en x^2. Ainsi, soit proposé

$$9x^2+9x=\square,\qquad 9x^2+24x=\square,\qquad 9x^2+72x=\square;$$

substituons x^2 à $9x^2$ sans toucher aux termes en x, il vient

$$x^2+9x=\square,\qquad x^2+24x=\square,\qquad x^2+72x=\square,$$

d'où $x = 3$. Divisant par le carré 9, nous aurons $\frac{1}{3}$ comme solution de la triple équation proposée. Si l'on divisait la même valeur 3 par le carré 16, on aurait $\frac{3}{16}$ comme solution de la triple équation

$$16x^2 + 9x = \square, \qquad 16x^2 + 24x = \square, \qquad 16x^2 + 72x = \square;$$

il en sera de même dans les autres cas semblables.

Au moyen de la triple équation, on peut résoudre des équations quadruples, quintuples, etc. à l'infini.

16. Soit proposée, par exemple, la quadruple équation suivante

$$20x + 64 = \square, \qquad 12x + 16 = \square, \qquad 8x + 4 = \square, \qquad 2x + 1 = \square.$$

Si l'on ramène à l'égalité, comme il a été dit, les termes carrés, on a, comme nouvelles conditions,

$$20x + 64 = \square, \qquad 48x + 64 = \square, \qquad 128x + 64 = \square;$$

substituez $\frac{1}{2}x^2 + x$ à x et traitez par la méthode indiquée la double équation qui restera à satisfaire, vous obtiendrez, comme solution, 8320 (en dehors de 4, solution immédiate).

17. On peut de même combiner une quintuple équation avec des coefficients différents pour les termes en x et divers carrés comme termes indépendants, en s'arrangeant de façon que, les carrés étant ramenés à l'égalité, on ait trois expressions identiques et deux autres distinctes, comme par exemple :

$$2x+1 = \square, \quad 8x+4 = \square, \quad 32x+16 = \square, \quad 20x+64 = \square, \quad 36x+256 = \square;$$

on aura comme valeurs 4 et $\frac{10177024}{1018081}$.

On combinera de la même façon une équation centuple et ainsi de suite indéfiniment.

D'après ce qui précède, il est facile de résoudre d'une infinité de façons des questions que Diophante et Bachet ne résolvent que par des procédés très compliqués.

18. Soit proposé

$$x + 16 = \square, \qquad 2x + 16 = \square.$$

Substituez $x^2 + 8x$ à x, ce qui, pour la première expression, donnera le carré $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$. La seconde deviendra $2x^2 + 16x + 16$ qu'on égalera, par exemple, au carré de $4 - 2x$ (le coefficient de x pouvant être pris arbitrairement). On trouvera $x = 16$; comme on a substitué $x^2 + 8x$, on prendra $16^2 + 8 \times 16 = 384$, et l'on aura la solution cherchée.

19. Soit proposé encore

$$16 - x = \square, \qquad 16 - 5x = \square.$$

Substituez $8x - x^2$, les transformées seront $x^2 - 8x + 16$ et $5x^2 - 40x + 16$: la première est un carré; il reste donc seulement à égaler la seconde à un carré, soit à celui de $4 - 7x$; d'où $x = \frac{4}{11}$. Comme on a substitué $8x - x^2$, on prendra $8 \times \frac{4}{11} - \left(\frac{4}{11}\right)^2 = \frac{336}{121}$.

20. Soit encore, comme troisième cas :

$$16 + x = \square, \qquad 16 - x = \square.$$

Substituez $x^2 + 8x$; les transformées sont : la première $16 + 8x + x^2$, qui est un carré; la seconde $16 - 8x - x^2$ à égaler à un carré, soit celui de $4 - 2x$; d'où $x = \frac{8}{5}$. Puisqu'on a substitué $x^2 + 8x$, on prendra, pour la solution cherchée : $8 \times \frac{8}{5} + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{384}{25}$.

Douze questions concernant ce qui a été exposé jusqu'ici dans cette seconde Partie.

21. Tous les exemples que nous avons donnés sont autant de problèmes résolus. J'en indiquerai un seul : Trouver un nombre, différent

de 24, et tel qu'en ajoutant l'unité à son simple, à son double et à son quintuple, on ait trois carrés. On trouvera ci-dessus, sous le titre des solutions en nombre indéfini (n° 8) le nombre $\frac{470\,956\,770\,729\,578\,397\,264}{216\,571\,905\,615\,699\,363\,961}$ satisfaisant à ces conditions. Bien plus, si l'on veut proposer la question en nombres entiers, on pourra l'énoncer comme suit : Trouver un carré entier autre que l'unité, tel qu'en y ajoutant le simple, le double ou le quintuple d'un certain nombre entier, on ait trois carrés. Mais j'ajouterai encore ici d'autres problèmes nouveaux.

Trouver trois cubes tels qu'en ajoutant leur somme à des nombres proportionels à ces cubes on ait trois carrés.

22. Prenez les trois premiers cubes 1, 8, 27, dont la somme est 36; ajoutez-la aux produits par x de chacun des trois cubes; vous aurez

$$36 + x = \square, \qquad 36 + 8x = \square, \qquad 36 + 27x = \square;$$

remplacez x par $x^2 + 12x$, ce qui donnera, pour transformée de la première expression, le carré $(x+6)^2$. En achevant l'opération, on aura $\frac{220\,320}{5329}$ comme valeur de l'inconnue.

Trouver un nombre différent de 4 et tel qu'en ajoutant à cinq carrés en progression géométrique ses produits par 2, 8, 32, 20, 36, *on ait des carrés.*

23. Prenez les carrés 1, 4, 16, 64, 256; vous aurez une quintuple équation

$$1 + 2x = \square, \quad 4 + 8x = \square, \quad 16 + 32x = \square, \quad 64 + 20x = \square, \quad 256 + 36x = \square.$$

Ramenez à l'égalité les termes carrés, les transformées des expressions sont

$$256 + 512x, \quad 256 + 512x, \quad 256 + 512x, \quad 256 + 80x, \quad 256 + 36x;$$

c'est donc comme si l'on avait seulement une triple équation; la mé-

thode ci-dessus (n° 17) donne $x = \frac{10\,177\,024}{1\,018\,081}$, solution de la quintuple équation posée tout d'abord.

Trouver trois nombres carrés tels qu'en ajoutant leur somme à chacune de leurs racines on ait des carrés.

24. Choisissez trois carrés dont la somme soit un carré et tels que la plus grande racine soit supérieure à la somme des deux autres; tels sont 4, 36, 81, dont la somme est 121. Prenez pour les trois carrés cherchés $4x^2$, $36x^2$, $81x^2$; leur somme, ajoutée séparément à chacune des racines, donne

$$121x^2 + 2x = \square, \qquad 121x^2 + 6x = \square, \qquad 121x^2 + 9x = \square.$$

On trouvera $x = \frac{2209}{62\,920}$ (*voir* n° 14); en substituant cette valeur dans les expressions ci-dessus, on trouvera des nombres carrés, et le problème sera résolu.

Trouver trois carrés différents tels qu'en leur ajoutant trois nombres en proportion harmonique, on ait trois autres carrés.

25. Il faut avoir soin que le plus grand des trois proportionels harmoniques soit supérieur à la somme des deux autres; on pourra de la sorte poser

$$1 + 2x = \square, \qquad 4 + 3x = \square, \qquad 16 + 6x = \square;$$

ou, en réduisant les termes carrés à l'égalité suivant la méthode ci-dessus,

$$16 + 32x = \square, \qquad 16 + 12x = \square, \qquad 16 + 6x = \square.$$

Remplacez x par $\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x$ et achevez l'opération comme nous l'avons indiqué (*Cf.* n° **14**), vous trouverez pour solution de la première équation triple $\frac{995\,904}{4761}$.

Trouver trois nombres tels que la différence des deux plus grands soit dans un rapport donné à la différence des deux moindres, et que, d'autre part, leurs sommes deux à deux fassent des carrés. On donne le rapport de 3 à 1.

26. C'est la question IV, 45 de Diophante, et il n'y en a pas que cet auteur ait traitée d'une façon plus prolixe et plus embrouillée. Prenez un carré arbitraire, 4 par exemple, pour somme du nombre moyen et du moindre; soit $2+x$ le moyen, $2-x$ le moindre; leur différence sera $2x$; si on la triple (puisque le rapport donné est de 3 à 1), on aura $6x$ et, en ajoutant le nombre moyen, on aura le plus grand $2+7x$. Il faut de plus que la somme du plus grand et du moyen, c'est-à-dire $4+8x$, et la somme du plus grand et du plus petit, c'est-à-dire $4+6x$, fassent des carrés. Remplacez x par $\frac{x^2}{6}+\frac{2}{3}x$, de façon qu'en multipliant par 6 (coefficient de x dans la seconde expression, on ait x^2+4x, dont la somme avec 4 fera le carré $(2+x)^2$; en multipliant la nouvelle forme de l'inconnue par 8 (coefficient de x dans la première expression), et ajoutant 4, on aura $4+\frac{16}{3}x+\frac{4}{3}x^2$ à égaler à un carré dont on peut former la racine d'une infinité de façons. Soit par exemple $\left(2+\frac{5}{4}x\right)^2$. On obtiendra une valeur qui, substituée dans l'expression de la première inconnue, donnera $\frac{160}{121}$; les trois nombres cherchés seront $\frac{1362}{121}$, $\frac{402}{121}$, $\frac{82}{121}$.

Trouver deux nombres tels que leur somme, soit augmentée, soit diminuée de la différence de ces nombres ou encore de la différence de leurs carrés, fasse toujours un carré.

27. Soient $\frac{1}{2}+x$ et $\frac{1}{2}-x$ ces deux nombres; leur différence, aussi bien que la différence de leurs carrés, sera $2x$. Il faut donc que la

somme des deux nombres, plus ou moins $2x$, fasse un carré. On a donc la double équation

$$1 + 2x = \square, \qquad 1 - 2x = \square.$$

Remplacez x par $\frac{1}{2}x^2 + x$, de façon qu'en multipliant cette expression de l'inconnue par 2 et en ajoutant l'unité, on ait, d'une part, $1 + 2x + x^2$ qui est un carré; de l'autre, $1 - 2x - x^2$ à égaler à un carré, soit à $(1 - 3x)^2$; d'où $x = \frac{2}{5}$. Comme on a remplacé x par $\frac{1}{2}x^2 + x$, on prendra $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} = \frac{12}{25}$, valeur d'où l'on déduira, pour les nombres cherchés, d'après les positions, $\frac{49}{50}$ et $\frac{1}{50}$.

Trouver quatre nombres dont trois soient carrés et tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de l'unité, fasse un carré.

28. On cherchera d'abord, d'après Diophante, V, 27, trois carrés tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de l'unité, fasse un carré; tels sont $\frac{9}{16}$, $\frac{25}{4}$, $\frac{256}{81}$. Ces trois carrés étant pris pour le premier, le second et le troisième des nombres cherchés, soit x le quatrième; dès lors, les produits du premier nombre par le second, du second par le troisième, du troisième par le premier donnant des carrés, si on les augmente de l'unité, il suffit qu'il en soit de même pour les produits du quatrième par chacun des trois premiers; on a donc les conditions

$$\frac{9}{16}x + 1 = \square, \qquad \frac{25}{4}x + 1 = \square, \qquad \frac{256}{81}x + 1 = \square.$$

Remplacez, suivant la règle, x par $\frac{16}{9}x^2 + \frac{32}{9}$; dans la première expression $\frac{9}{16}x$ devient $x^2 + 2x$, qui, augmenté de l'unité, donne le carré $(x + 1)^2$; effectuant la substitution dans les deux autres expres-

sions, on aura la double équation

$$\frac{400}{36}x^2+\frac{800}{36}x+1=\square, \qquad \frac{4096}{729}x^2+\frac{8192}{729}x+1=\square,$$

où les termes indépendants de x sont carrés (aussi bien que les coefficients de x^2); on pourra dès lors la résoudre par la méthode ordinaire, et en déduire la valeur de l'inconnue ou du quatrième nombre cherché.

Trouver un triangle rectangle tel que le produit de l'hypoténuse par la somme des côtés de l'angle droit soit un carré, aussi bien que les sommes obtenues en ajoutant au carré de l'hypoténuse, soit le double de celle-ci, soit l'un ou l'autre des côtés de l'angle droit.

29. Prenez un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit un carré aussi bien que la somme des côtés de l'angle droit (première Partie, n° 45); multipliez par x chacun des côtés de ce triangle, vous arriverez à ce que vous cherchez.

En effet, le produit de l'hypoténuse par la somme des côtés de l'angle droit sera un carré; si, d'autre part, au carré de l'hypoténuse, on ajoute séparément le double de celle-ci, puis l'un et l'autre des côtés de l'angle droit, on aura une triple équation, qui se résoudra comme il a été dit au n° 16.

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un carré, en ajoutant au carré du périmètre, soit un quelconque des côtés de l'angle droit, soit un multiple donné de l'hypoténuse.

30. Soit proposé, comme multiple donné de l'hypoténuse, le double; prenons, pour le triangle cherché, $3x$, $4x$, $5x$. On aura

$$144x^2+3x=\square, \qquad 144x^2+4x=\square, \qquad 144x^2+10x=\square.$$

En procédant comme il a été dit au n° 13, on trouvera $x=\frac{1521}{342144}$ et le triangle cherché sera $\frac{4563}{342144}$, $\frac{6084}{342144}$, $\frac{7605}{342144}$.

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un carré en multipliant l'hypoténuse par la différence des côtés de l'angle droit, aussi bien qu'en ajoutant au carré du périmètre, soit un quelconque des côtés de l'angle droit, soit un multiple donné de l'hypoténuse. Soit proposé, comme multiple donné, le double.

31. Prenez, pour triangle primitif, 119, 120, 169, dont l'hypoténuse est un carré, aussi bien que la différence des côtés de l'angle droit. Multipliez par x chacun de ces côtés; leur somme sera $408x$; en ajoutant séparément à son carré chacun des côtés de l'angle droit et le double de l'hypoténuse, on aura

$$166464x^2 + 119x = \square, \qquad 166464x^2 + 120x = \square, \qquad 166464x^2 + 338x = \square;$$

le reste est facile d'après le n° **13**.

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un carré en multipliant un des côtés de l'angle droit par la différence entre l'aire et ce côté, aussi bien qu'en ajoutant au carré du périmètre, soit un quelconque des côtés de l'angle droit, soit un multiple donné de l'hypoténuse.

32. Prenez (première Partie, n° **53**) un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit soit l'unité, et dont la différence entre l'aire et cette unité soit un carré [1]; multipliez par x chacun des côtés, prenez le carré de périmètre et ajoutez-y séparément chacun des côtés de l'angle droit et le multiple proposé de l'hypoténuse; la solution s'achèvera d'après ce qui a été dit au n° **13**.

[1] Cette solution est évidemment erronée; soit $a^2 = b^2 - 1$ le triangle primitif supposé où $1 - \frac{b}{2}$ est un carré: le triangle, cherché d'après les indications de Billy, satisfait à la condition $x\left(x - \frac{bx}{2}\right) = \square$, c'est-à-dire que le produit de l'un des côtés de l'angle droit par la différence entre ce côté et la moitié de l'autre (non pas l'aire) est un carré.

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un carré en multipliant un des côtés de l'angle droit par la somme de ces deux côtés, aussi bien qu'en ajoutant au carré du périmètre un quelconque des trois côtés du triangle.

33. Prenez un triangle rectangle dont la somme des côtés de l'angle droit et l'un de ces côtés soient des carrés; par exemple, le triangle 40, 9, 41. Multipliez chacun des côtés par x et ajoutez-les séparément au carré du périmètre; vous aurez

$$8100x^2 + 40x = \square, \qquad 8100x^2 + 9x = \square, \qquad 8100x^2 + 41x = \square.$$

Le problème pourra ainsi être résolu. Il ne faut pas dire au reste qu'il y ait là une contradiction avec la remarque des n°s 9 et suivants, d'après laquelle la méthode de Fermat ne s'applique pas au cas où le plus grand des coefficients de x est égal à la somme des deux autres; quelqu'un pourrait croire qu'il y a encore plus impossibilité lorsque le plus grand coefficient est inférieur à la somme des deux autres; mais du moment où il y a inégalité, quelle qu'elle soit, le problème est possible, comme tout patient analyste pourra le reconnaître.

TROISIÈME PARTIE

COMPRENANT LE PROCÉDÉ POUR OBTENIR DES SOLUTIONS EN NOMBRE INDÉFINI DONNANT DES VALEURS CARRÉES OU CUBIQUES A DES EXPRESSIONS OÙ ENTRENT PLUS DE TROIS TERMES DE DEGRÉS DIFFÉRENTS.

1. Je traiterai ici particulièrement des expressions comprenant les cinq termes en x^4, x^3, x^2, x et le constant; mais, à cette occasion, je parlerai aussi des expressions de quatre termes. Ces termes pourront d'ailleurs être, soit tous positifs, soit entremêlés de termes négatifs; l'objet proposé est de donner à ces expressions des valeurs carrées (pour celles de cinq termes) ou cubiques (pour celles de quatre), et cela d'une infinité de façons; or, en général, on peut dire qu'il est nécessaire, pour les valeurs carrées, que au moins le coefficient du terme

en x^4 ou le terme constant soit un carré; pour les valeurs cubiques, que le coefficient du terme en x^3 ou le terme constant soit un cube.

Égaler à un carré une expression composée de cinq termes et où le coefficient de x^4 seul soit un carré.

2. Il faut tout d'abord avoir soin que les coefficients de x^4, x^3 et x^2 soient les mêmes dans l'expression proposée et dans le développement du carré qu'on lui égale. Pour cela, on prendra tout d'abord la racine carrée du terme en x^4 pour former le premier terme de la racine du carré cherché; puis on divisera le coefficient du terme en x^3 par le double du premier coefficient ainsi trouvé, et en multipliant le quotient par x, on aura le second terme de la racine du carré cherché; après quoi on prendra la différence entre le carré du coefficient de ce second terme et le coefficient de x^2 dans l'expression proposée; on divisera par le double du coefficient du premier terme, et l'on aura ainsi le troisième terme de la racine du carré cherché, celui qui est indépendant de x. En égalant le carré de cette racine trinome à l'expression proposée, on obtiendra la valeur de l'inconnue. Ainsi soit proposé

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 7 = \square;$$

en observant les règles qui viennent d'être exposées, on prendra, pour le carré à égaler à cette expression,

$$(x^2 + 2x + 1) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1;$$

l'équation donnera $x = 3$, et en substituant dans l'expression proposée, on aura le carré 256 [1].

[1] Les règles de Billy reviennent, étant proposée l'expression

$$a^2x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = \square,$$

à lui égaler

$$\left(ax^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{c - \frac{b^2}{4a^2}}{2a}\right)^2 = a^2x^4 + bx^3 + cx^2 + \frac{b(4a^2c - b^2)}{8a^4}x + \frac{(4a^2c - b^2)^2}{64a^6}.$$

Les termes en x^4, x^3, x^2 s'éliminant, on a pour x une valeur rationelle,

$$x = \frac{64a^6e - (4a^2c - b^2)^2}{8a^2[b(4a^2c - b^2) - 8a^4d]}.$$

Égaler à un carré une expression composée de cinq termes, et où le terme constant seul soit un carré.

3. Il faut remarquer que dans ce cas, contrairement au précédent, les termes qu'on doit rendre égaux de part et d'autre sont le constant et ceux en x et x^2. On prendra donc, pour premier terme de la racine du carré à égaler, la racine du terme constant de l'expression proposée; on divisera par le double de cette racine : en premier lieu, le coefficient de x dans l'expression proposée, et l'on aura le coefficient du second terme de la racine cherchée; en second lieu, la différence entre le coefficient de x^2 dans la proposée et le carré du dernier coefficient trouvé : on aura ainsi celui de x^2 dans la racine du carré à égaler. En formant ce carré et achevant l'opération, on aura la valeur de l'inconnue. Soit, par exemple, proposée l'expression

$$10x^4 + 4x^3 + 19x^2 + 6x + 9 = \square;$$

en observant les règles qui viennent d'être exposées, on prendra, pour le carré à égaler :

$$(3 + x + 3x^2)^2 = 9 + 6x + 19x^2 + 6x^3 + 9x^4;$$

l'équation donnera $x = 2$, et en substituant dans l'expression proposée, on aura le carré 289.

Égaler de différentes façons à un carré une expression composée de cinq termes, et où le terme constant est carré en même temps que le coefficient de x^4.

4. Tout d'abord on peut former la racine du carré à égaler, de façon à éliminer les termes constants, ceux en x et en x^4. Ainsi soit proposé

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1 = \square.$$

Formez $(1 + 10x + x^2)^2 = 1 + 20x + 102x^2 + 20x^3 + x^4$; les termes de trois degrés disparaissant, il restera l'équation $-92x^2 = 16x^3$, d'où

$x = -\frac{92}{16} = -\frac{23}{4}$. En substituant dans l'expression proposée, on aura le carré $\frac{140\,625}{256}$.

5. En second lieu, on peut former la racine de façon à éliminer les termes constants et ceux en x et x^2. Ainsi soit proposée la même expression

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1 = \square.$$

On prendra $(1 + 10x - 45x^2)^2$; en développant le carré et en établissant l'équation, il ne restera que les termes en x^3 et x^4, de degrés immédiatement consécutifs; on tirera donc $x = \frac{113}{253}$; la substitution donne le carré $\frac{224\,706}{64\,009}$.

6. Troisièmement, on peut former la racine de façon à éliminer les termes constants et ceux en x^3 et x^4. Soit toujours la même expression

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1 = \square.$$

On prendra $(x^2 + 2x + 1)^2$; il ne restera dans l'équation que les termes en x^2 et x; et l'on tirera $x = -4$, d'où la valeur carrée 81 pour l'expression proposée.

7. Quatrièmement, on peut former la racine de façon à éliminer les termes en x^4, x^3, x^2. Soit encore

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1 = \square.$$

On prendra $(x^2 + 2x + 3)^2$; après élimination, il restera seulement des termes en x ou constants; on en tirera $x = 1$, d'où, pour l'expression proposée, la valeur carrée 36.

8. Cinquièmement, on peut former la racine autrement que nous ne l'avons fait plus haut, de façon à éliminer les termes constants et ceux en x et x^4. Avec la même expression, on pourra égaler

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1 = (1 + 10x - x^2)^2,$$

et l'on aura $x = \frac{11}{3}$, d'où, pour l'expression proposée, la valeur $\left(\frac{218}{9}\right)^2$.

9. Sixièmement, on peut aussi former la racine autrement que nous ne l'avons fait plus haut, de façon à éliminer les termes constants et ceux en x^3 et x^4. Ainsi on pourra, avec la même expression, former l'équation

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1 = (x^2 + 2x - 1)^2,$$

d'où $x = -3$, et, pour l'expression proposée, la valeur carrée 4.

10. Je laisse de côté les autres racines que l'on pourrait former, comme $-x^2 - 2x - 3$, $1 - 2x - x^2$, $x^2 - 10x - 1$, $45x^2 - 10x - 1$, $-1 - 2x - x^2$; car, si elles donnent des solutions, ces dernières ne diffèrent pas de celles que nous avons déjà obtenues.

Ce que sont les solutions dérivées et comment on les obtient.

11. Il y a deux sortes de solutions : les unes, en effet, sont primitives; les autres, dérivées. Les primitives sont celles que l'on déduit immédiatement de l'expression proposée, comme celles que nous venons de calculer; les dérivées sont celles qui proviennent des primitives; elles peuvent d'ailleurs être du premier degré, si elles sont immédiatement déduites des primitives; du second degré, si elles sont déduites de dérivées du premier degré; du troisième degré, si elles sont déduites de dérivées du second degré, et ainsi de suite indéfiniment. Remarquez d'ailleurs que de solutions fausses on peut en tirer de vraies et inversement, comme on le verra clairement ci-après.

Déduire les solutions dérivées du premier degré d'une solution primitive quelconque.

12. Ajoutez à x la solution primitive, avec son signe + ou −; substituez à l'inconnue le binome ainsi formé dans les divers termes qui composent l'expression proposée; égalez le résultat de cette substitution à un carré dont on formera la racine comme il a été dit ci-dessus;

ajoutez la valeur qui en viendra pour x à la solution primitive, vous aurez ainsi la solution dérivée que vous cherchez.

Soit, par exemple, à trouver une solution dérivée du premier degré pour l'expression proposée ci-dessus

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1 = \square;$$

prenez -3, l'une des solutions primitives; ajoutez-la à x, vous avez $x-3$, que vous substituez à x dans les termes x^4, $4x^3$, $10x^2$, $20x$, et vous ajoutez le terme constant, comme ci-après :

x^4........	$x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$
$4x^3$........	$+ 4x^3 - 36x^2 + 108x - 108$
$10x^2$........	$+ 10x^2 - 60x + 90$
$20x$.........	$+ 20x - 60$
1...........	$+ 1$
Total........	$x^4 - 8x^3 + 28x^2 - 40x + 4$

13. Cette somme doit être égalée à un carré; formez-en la racine comme suit : $x^2 - 4x - 2$; il viendra $x = \frac{7}{2}$; comme on a substitué $x - 3$, retranchez 3 de $\frac{7}{2}$, il reste $\frac{1}{2}$ comme valeur de x dans l'expression proposée; la substitution de cette valeur donnera comme résultat $\frac{225}{16} = \left(\frac{15}{4}\right)^2$.

14. On peut encore égaler la même somme au carré de $(x^2 - 10x + 2)$, d'où $x = \frac{19}{3}$; retranchant 3, reste $\frac{10}{3}$ comme valeur de x dans l'expression proposée, et celle-ci deviendra $\frac{36481}{81} = \left(\frac{191}{9}\right)^2$.

15. Prenez le carré de $(2 - 10x - x^2)$; il viendra $x = -\frac{17}{7}$; retranchant 3, vous aurez la solution $-\frac{38}{7}$ qui donnera à l'expression proposée la valeur $\frac{998001}{2401}$, c'est-à-dire $\left(\frac{999}{49}\right)^2$.

16. Quatrièmement, prenez le carré de $(2 - 10x - 18x^2)$; il viendra $x = -\frac{368}{323}$, d'où, retranchant 3, vous aurez la solution $-\frac{1337}{323}$.

On pourrait encore former les carrés

$$(x^2 - 4x + 2)^2 \quad \text{et} \quad (-x^2 + 4x - 2)^2,$$

mais ils conduiraient à la valeur $x = 3$, d'où, en retranchant 3, la solution 0, qui est illusoire et hors de notre propos.

17. J'ai dit, d'autre part, que l'on avait également comme solution primitive -4; on peut de même en tirer des solutions dérivées, en substituant $x - 4$ à x dans l'expression proposée

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1,$$

tout comme on a substitué $x - 3$ dans cette expression.

Le résultat de la substitution sera

$$x^4 - 12x^3 + 58x^2 - 124x + 81 = \square.$$

En prenant pour carré $(x^2 - 6x - 9)^2$, vous obtiendrez la solution $\frac{9}{5}$. Le carré $\left(x^2 - \frac{62}{9}x + 9\right)^2$ donnera la solution $\frac{7}{36}$. Le troisième carré $\left(9 - \frac{62}{9}x + \frac{427}{729}x^2\right)^2$ fournit $\frac{86507}{43639}$ (¹). Le quatrième $\left(9 - \frac{62}{9}x - x^2\right)^2$ donne $-\frac{755}{261}$. On pourrait encore former les carrés $(x^2 - 6x + 9)^2$ ou $(-x^2 + 6x - 9)^2$, mais on en tirerait $x = 4$, d'où la solution 0, qui nous est inutile.

18. Comme solution primitive, nous avons encore $-\frac{23}{4}$. Substituons donc $x - \frac{23}{4}$ à x; l'expression proposée deviendra

$$x^4 - 19x^3 + \frac{1115}{8}x^2 - \frac{7339}{16}x + \frac{140625}{256} = \square.$$

(¹) Billy donne la valeur erronée : $\frac{1158704}{43639}$.

Vous obtiendrez les solutions :

$$\frac{11}{3} \text{ par le carré } \left(x^2 - \frac{19}{2}x - \frac{375}{16}\right)^2;$$

$$\frac{7}{36} \text{ par le carré } \left(x^2 - \frac{19}{2}x + \frac{375}{16}\right)^2;$$

$$-\frac{144\,233}{42\,375} \text{ par le carré } \left(x^2 + \frac{7339}{750}x - \frac{375}{16}\right)^2;$$

enfin le carré $\left(\frac{375}{16} - \frac{7339}{750}x + \frac{45\,075\,033}{52\,734\,375}x^2\right)$ en fournira une quatrième.

19. Voilà pour les solutions primitives affectées du signe − ; on procédera de même pour celles qui ont le signe +. Ainsi, comme +1 est une solution primitive, on substituera $x+1$ et on aura la transformée

$$x^4 + 8x^3 + 28x^2 + 56x + 36 = \square.$$

D'où les nouvelles solutions :

$$\frac{10}{3} \text{ par le carré } \left(x^2 + \frac{14}{3}x + 6\right)^2;$$

$$-\frac{23}{39} \text{ par le carré } \left(x^2 - \frac{14}{3}x - 6\right)^2;$$

$$-\frac{1771}{333} \text{ par le carré } \left(6 + \frac{14}{3}x + \frac{14}{27}x^2\right)^2.$$

20. Comme autre solution primitive, nous avons $\frac{11}{3}$; substituons donc $x + \frac{11}{3}$; la transformée, obtenue comme il a été dit au n° **12**, sera

$$x^4 + \frac{56}{3}x^3 + \frac{1212}{9}x^2 + \frac{12\,200}{27}x + \frac{47\,524}{81} = \square.$$

Les solutions dérivées seront : $\frac{10}{3}$ par le carré $\left(x^2 + \frac{28}{3}x + \frac{218}{9}\right)^2$; $-\frac{13}{4}$ par le carré $\left(-x^2 - \frac{28}{3}x + \frac{218}{9}\right)^2$; 1 par le carré $\left(x^2 + \frac{28}{3}x + \frac{214}{9}\right)^2$; enfin $\frac{120\,978}{110\,833}$ par le carré $\left(\frac{218}{9} + \frac{3050}{327}x - x^2\right)^2$.

21. Enfin, la dernière solution primitive conduira à la substitution de $x+\frac{113}{253}$, et en égalant la transformée de l'équation proposée à un carré, dont on formera diversement les racines, comme on l'a fait pour les précédentes, on obtiendra de même de nouvelles solutions.

Obtenir les solutions dérivées du second degré, celles du troisième, du quatrième, etc. à l'infini.

22. De même que les solutions primitives nous ont fourni des solutions dérivées du premier degré, de même les dérivées du premier degré peuvent nous fournir des dérivées du second degré. Ainsi, puisque nous avons $\frac{1}{2}$ comme solution dérivée du premier degré, nous substituerons $x+\frac{1}{2}$ à x dans l'expression proposée

$$x^4+4x^3+10x^2+20x+1;$$

le résultat de cette substitution sera $x^4+6x^3+\frac{35}{2}x^2+\frac{67}{2}x+\frac{225}{16}$.

Nous l'égalerons au carré $\left(x^2+3x+\frac{15}{4}\right)^2$, et nous obtiendrons ainsi la solution $-\frac{21}{2}$, qui est dérivée du second degré, puisqu'elle provient d'une solution dérivée du premier degré.

23. De cette solution du second degré nous pouvons en dériver encore une autre, toujours par le même procédé. A cet effet, on substituera $x-\frac{21}{2}$ à x dans l'expression proposée; le résultat de cette substitution est $x^4-38x^3+\frac{1091}{2}x^2-\frac{6995}{2}x+\frac{134689}{16}$; on l'égalera au carré $\left(x^2-19x-\frac{367}{4}\right)^2$, ce qui donnera $\frac{873}{46}$ comme valeur de x; en retranchant $\frac{21}{2}$, on aura, comme valeur correspondante dans l'expression proposée, $\frac{195}{23}$, solution dérivée qui est du troisième degré, puisqu'elle provient d'une solution dérivée du second degré. On pourra de même obtenir des solutions dérivées du quatrième degré, du cinquième, du sixième, et ainsi de suite indéfiniment.

Égaler à un carré une expression composée de quatre termes, pourvu qu'elle comprenne un terme, soit indépendant de x, soit en x^4, lequel soit carré.

24. Soit proposé : $20x^3 + 5x^2 + 40x + 16 = \square$.

Prenez $(4 + 5x)$ pour racine du carré; vous aurez des deux côtés les mêmes termes en x et indépendants, et vous obtiendrez $x = 1$ comme solution. Cela posé, de cette solution vous en dériverez une autre, en substituant à x, comme précédemment, $x + 1$ dans l'expression proposée $20x^3 + 5x^2 + 40x + 16$; le résultat de cette substitution est $20x^3 + 65x^2 + 110x + 81$; on doit l'égaler à un carré, dont on formera comme ci-dessus la racine $\left(9 + \frac{55}{9}x\right)$. On trouvera, comme valeur de x, dans la transformée, $-\frac{112}{81}$, et, dans la proposée, $-\frac{31}{81}$. En troisième lieu, de cette solution dérivée du premier degré, on en déduira une du second degré, en substituant $x - \frac{31}{81}$; on aura, comme résultat de cette substitution, une nouvelle transformée que l'on égalera au carré $\left(\frac{401}{729} + \frac{147\,495}{3609}x\right)^2$, et l'on arrivera, comme solution du second degré, à la valeur $\frac{177\,301\,255\,266}{2\,110\,030\,722}$.

25. Supposons maintenant le terme en x^4 carré, et soit proposé :

$$x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x = \square.$$

Prenez pour racine du carré : $(x^2 + 2x)$, de façon à éliminer les deux termes de plus hauts degrés. Il viendra : $7x^2 = 2x$, d'où, en dehors de l'unité qui est une autre solution, la valeur $x = \frac{2}{7}$. On pourra donc substituer à x, soit $x + \frac{2}{7}$, soit $x + 1$, pour obtenir des racines dérivées.

26. L'absence d'un des termes intermédiaires n'empêche pas d'égaler à un carré une expression composée de quatre termes. Ainsi l'expression $16 + 24x^2 + 16x^3 + 5x^4$ peut être égalée au carré $(4 + 3x^2)^2$,

ce qui donne $x = 4$, d'où l'on pourra substituer $x + 4$ pour obtenir une solution dérivée.

De même, si l'on propose $x^4 + 600x^2 + 8000x + 50\,000$, on formera le carré $(x^2 + 300)^2$, et l'on obtiendra $x = 5$. On pourra donc substituer $x + 5$ pour obtenir une solution dérivée.

On peut égaler à un cube une expression composée de quatre termes, pourvu que le terme indépendant de x, ou bien le coefficient de x^3, soit un cube.

27. A cet effet, si le terme indépendant de x est un cube, on en prendra la racine cubique comme terme indépendant de la racine du cube à égaler. On divisera ensuite, par le triple carré de cette racine cubique, le coefficient de x dans l'expression proposée, et on aura ainsi le coefficient de x dans la racine du cube à former; la racine cubique et le quotient doivent d'ailleurs être affectés des signes convenables. Ainsi soit proposé d'égaler à un cube l'expression $2x^3 + x^2 + 3x + 1$; on prendra, pour racine de ce cube, $1 + x$ (1 étant la racine cubique de l'unité, et x le quotient de $3x$ pour 3, qui est le triple carré de 1). En égalant à l'expression proposée le cube de cette racine, à savoir $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, on aura $x = 2$, et en substituant $x + 2$ à x, on pourra obtenir la solution dérivée.

28. Si c'est le coefficient de x^3 qui est un cube, on prendra sa racine cubique comme coefficient de x, et en divisant par le triple carré de cette racine le coefficient de x^2 dans la proposée, on aura le terme indépendant. Ainsi soit proposé d'égaler à un cube

$$8x^3 + 24x^2 + 2x + 48;$$

on prendra, pour racine du cube, $2x + 2$ ($2x$ étant la racine cubique de $8x^3$ et 2 le quotient de 24 par 12, triple du carré de 2); le cube de cette racine sera $8x^3 + 24x^2 + 24x + 8$; en l'égalant à la proposée, on obtiendra $x = \frac{20}{11}$, et l'on passera ensuite au calcul des solutions dérivées.

Si le coefficient de x^3 et le terme indépendant sont tous les deux des cubes, il y a trois manières d'égaler à un cube l'expression proposée.

29. Soit proposé, par exemple, d'égaler à un cube $x^3 + 2x^2 + 4x + 1$. Si nous prenons, pour racine du cube, $x + 1$ (c'est-à-dire la somme des racines cubiques des deux termes cubes), on aura à égaler l'expression proposée à $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, d'où $x = 1$. Nous pouvons encore prendre, pour racine du cube, $x + \frac{2}{3}$ de façon à éliminer les termes des deux degrés les plus élevés; l'équation ne subsistera dès lors qu'entre les termes des deux degrés inférieurs, et l'on en déduira $x = -\frac{19}{72}$. Enfin on peut prendre $\left(1 + \frac{4}{3}x\right)^3$ de façon qu'au contraire il ne subsiste dans l'équation que les termes des deux degrés supérieurs; on obtiendra ainsi la solution $x = -\frac{90}{37}$; chacune de ces trois racines primitives fournira des dérivées, comme ci-dessus.

Réserve sur ce qui vient d'être dit.

30. Toutefois il peut arriver qu'une expression composée de quatre termes, dont l'un des extrêmes est cube ou dont les deux extrêmes sont cubes, ne puisse pas être égalée à un cube; c'est dans le cas où, après la réduction des termes semblables, l'équation subsiste entre trois termes ([1]) ou bien où l'on n'a plus qu'un seul terme égalé à zéro. Ainsi soit proposé : $1 + 3x + 3x^2 + 4x^3$; on ne peut procéder autrement qu'en formant le cube $(1 + x)^3$; mais l'équation se réduit à $3x^3 = 0$; il est donc impossible d'égaler à un cube l'expression proposée. De même, soit proposé : $x^3 + 2x^2 + 3x + 1$; on ne peut trouver qu'une seule solution immédiate et primitive, en prenant, comme racine du cube, $x + \frac{2}{3}$; car si l'on prenait $x + 1$, on aurait $x^2 = 0$. Pour

([1]) Il est clair que ce n'est pas à supposer.

un motif semblable on ne peut égaler à un cube l'une ou l'autre des expressions

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1, \quad x^3 - 3x^2 + 3x + 1.$$

L'équation se réduit toujours à celle d'un seul terme au zéro.

Douze questions sur ce qui a été enseigné dans cette troisième Partie.

31. Ce que j'ai dit jusqu'à présent fournit une riche matière, d'où l'on peut, comme d'une mine d'or, tirer un trésor de problèmes sans fin. Ainsi on peut demander un nombre tel qu'en le prenant 20 fois, ajoutant 10 fois son carré, 4 fois son cube et enfin l'unité, on ait un carré. Si l'on demande en outre que ce nombre soit plus grand que 8 et plus petit que 10, il faudra nécessairement, d'après ce qu'on a vu plus haut (nº 23), partir de la solution primitive -3, en dériver une autre du premier degré : $\frac{1}{2}$; puis une du second degré : $-\frac{21}{2}$; enfin celle du troisième : $\frac{195}{23}$, qui satisfait à toutes les conditions proposées. Mais ce sont d'autres questions que je veux résoudre ici.

Trouver en nombres rationels entiers un triangle rectangle, tel que son hypoténuse soit un carré, aussi bien que la somme des côtés de l'angle droit.

32. J'ai déjà (première Partie, nº 45) résolu ce problème par la double équation; mais comme il peut être abordé également au moyen d'une expression composée de cinq termes, je vais le traiter de cette seconde manière. D'après ce que j'ai dit à l'endroit précité, je forme le triangle des nombres $x + 5$ et 12; les côtés sont par suite :

$$x^2 + 10x + 169, \quad x^2 + 10x - 119, \quad 24x + 120.$$

L'hypoténuse : $x^2 + 10x + 169$ et la somme des côtés de l'angle droit : $x^2 + 34x + 1$ doivent être des carrés; $<$ le produit de ces deux expressions, soit $x^4 + 44x^3 + 510x^2 + 5756x + 169$, doit donc être

un carré > que je forme en prenant pour racine $13 + \frac{2878}{13}x - x^2$; il vient $x = \frac{2\,048\,075}{20\,566}$. D'où, pour les côtés, d'après les positions ci-dessus, les nombres 1 061 652 293 520, 4 565 486 027 761, 4 687 298 610 289, qui sont les mêmes que ceux trouvés précédemment.

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un nombre donné en retranchant l'aire de la somme de l'hypoténuse et de l'un des côtés de l'angle droit.

33. Soit 4 le nombre donné. Cherchons d'abord un triangle rectangle tel que l'on ait un carré en retranchant le quadruple de l'aire du carré de la demi-somme de l'hypoténuse et d'un côté.

Soient $x + 1$ et x les nombres générateurs du triangle; les côtés seront : $2x^2 + 2x + 1$; $2x + 1$; $2x^2 + 2x$. La somme de l'hypoténuse et du côté suivant est $2x^2 + 4x + 2$; sa moitié est $x^2 + 2x + 1$, dont le carré $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, diminué de quatre fois l'aire, c'est-à-dire de $8x^3 + 12x^2 + 4x$, laisse comme reste $x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 1$. Égalons ce reste au carré $(x^2 - 2x + 1)^2 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

L'équation donne $x = \frac{1}{3}$. D'après les positions, les deux nombres générateurs du triangle seront $\frac{4}{3}$ et $\frac{1}{3}$, ou, en prenant seulement les numérateurs, 4 et 1; ils donnent le triangle 17, 15, 8. Prenez ces nombres comme coefficients de x. Les côtés du triangle cherché étant ainsi supposés être $17x$, $15x$, $8x$, nous aurons l'équation

$$32x - 60x^2 = 4, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{1}{3}.$$

Le triangle cherché a donc pour côtés $\frac{17}{3}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{8}{3}$, et il satisfait à la condition proposée. Cette question a été omise par Diophante après ses problèmes VI, 10 et 11.

Trouver un triangle rectangle tel qu'un côté de l'angle droit soit un carré et qu'en y ajoutant un multiple donné de l'autre côté de l'angle droit on ait encore un carré (¹).

34. Soit 3 le multiplicateur donné. Formons le triangle des nombres $x+1$ et 1; les côtés seront x^2+2x+2, x^2+2x, $2x+2$. Multiplions ce dernier côté par 3 et ajoutons le produit, $6x+6$, au côté intermédiaire, il vient x^2+8x+6 qui doit être un carré, en même temps que le côté intermédiaire. Faites le produit de cette somme, x^2+8x+6, par le côté intermédiaire, x^2+2x; vous avez

$$x^4+10x^3+22x^2+12x$$

à égaler à un carré, soit à

$$\left(x^2+5x-\frac{3}{2}\right)^2 = x^4+10x^3+22x^2-15x+\frac{9}{4}.$$

Il vient $x=\frac{1}{12}$.

D'après les positions, le triangle cherché sera en nombres entiers : 313, 25, 312. La même solution peut être obtenue par la double équation

$$x^2+8x+6=\square, \qquad x^2+2x=\square.$$

Trouver un triangle rectangle tel qu'un côté de l'angle droit soit un carré, et qu'en en retranchant un multiple donné de l'autre côté de l'angle droit on ait encore un carré.

35. J'ai déjà donné une solution de ce problème (Part. I, n° 47), mais par une autre méthode. Soit donc proposé de retrancher du côté qui est carré le triple de l'autre côté de façon à obtenir un carré. Prenons comme triangle primitif celui qui vient d'être trouvé pour la question précédente, savoir 313, 25, 312, formé des nombres 13 et 12.

Formons le triangle cherché des nombres $x-13$ et 12; les côtés

(¹) *Cf.* Part. I, n° 46.

seront $x^2 - 26x + 313$; $x^2 - 26x + 25$; $24x - 312$. Retranchons du côté intermédiaire le triple du dernier, il reste $x^2 - 98x + 961$ qui doit être égalé à un carré, aussi bien que le côté intermédiaire $x^2 - 26x + 25$. Égalons en conséquence à un carré le produit de ces deux expressions, savoir $x^4 - 124x^3 + 3534x^2 - 27436x + 24025$, et formons la racine de ce carré : $x^2 - \frac{13718}{155}x + 155$. De l'équation on tirera $x = \frac{27681731}{318370}$; les nombres $x - 13$ et 12, si l'on chasse les dénominateurs, deviendront 23542921 et 3820440 ; et en formant de ces nombres le triangle demandé, on aura les côtés

568 864 871 005 841, 539 673 367 418 641, 179 888 634 210 840,

satisfaisant à la question.

Trouver un triangle rectangle tel que l'hypoténuse soit un carré et qu'en retranchant d'un des côtés de l'angle droit un multiple donné de l'autre côté, on ait un carré. Soit 2 le multiplicateur donné (1).

36. Prenez $x + 1$ et 1 comme nombres générateurs du triangle ; les côtés seront : $x^2 + 2x + 2$; $x^2 + 2x$; $2x + 2$. On devra donc avoir $x^2 + 2x + 2 = \square$ et, en retranchant du côté intermédiaire le double du dernier côté, $x^2 - 2x - 4 = \square$. Cette double équation donne $x = \frac{17}{12}$; par suite $x + 1$ et 1 deviennent $-\frac{5}{12}$ et $\frac{12}{12}$, ou, en ne prenant que les numérateurs, -5 et 12, dont on forme le triangle primitif 169, 119, 120.

Il faut dès lors recommencer l'opération, en prenant pour nombres générateurs du triangle $x - 5$ et 12 ; les côtés seront : $x^2 - 10x + 169$; $x^2 - 10x - 119$; $24x - 120$. Si l'on retranche du côté intermédiaire le double du dernier côté, soit $48x - 240$, le reste $x^2 - 58x + 121$ devra être un carré, de même que l'hypoténuse $x^2 - 10x + 169$. Égalons à un carré le produit de ces deux expressions, c'est-à-dire

(1) *Cf.* Part. I, n° 48.

$x^4 - 68x^3 + 870x^2 - 11012x + 20449$ et formons la racine de ce carré : $143 - \frac{5506}{143}x + x^2$; il viendra $x = \frac{4593455}{46046}$. Mais nous pouvons aussi suivre une autre voie, en ramenant les deux expressions à avoir un même carré pour terme connu, on aura

$$\frac{169}{121}x^2 - \frac{9802}{121}x + 169 = \square \qquad \text{et} \qquad x^2 - 10x + 169 = \square.$$

La différence des deux expressions est $\frac{48}{121}x^2 - \frac{8592}{121}x$, et on peut, comme on l'a vu Part. I, n° 21 et suiv., la décomposer en deux facteurs $\frac{2}{11}x$ et $\frac{24}{11}x - \frac{4296}{11}$ qui conduisent à la valeur $x = \frac{4593455}{46046}$. D'après les positions, le triangle cherché sera en nombres entiers :

$$19\,343\,046\,113\,329, \quad 18\,732\,418\,687\,921, \quad 4\,821\,817\,400\,400.$$

Trouver deux nombres tels que le produit de leur somme par la somme de leurs carrés soit un cube.

37. Soient x et $2 - x$ les deux nombres cherchés; leur somme, 2, multipliée par celle de leurs carrés, qui est $2x^2 - 4x + 4$, donne $4x^2 - 8x + 8$, qui doit être un cube. Formez la racine de ce cube : $2 - \frac{2}{3}x$, et égalez-le à $4x^2 - 8x + 8$; il viendra $x = -\frac{9}{2}$. Je substitue en conséquence $x - \frac{9}{2}$ à x dans l'expression $4x^2 - 8x + 8$; la transformée est $4x^2 - 44x + 125$. Je l'égalerai au cube $\left(5 - \frac{44}{75}x\right)^3$, et j'aurai ainsi

$$125 - 44x + \frac{5808}{1125}x^2 - \frac{85184}{421875} = 4x^2 - 44x + 125,$$

d'où $x = \frac{490500}{85184}$; je retranche de cette valeur $\frac{9}{2}$, puisque j'ai substitué $x - \frac{9}{2}$; j'ai pour valeur de x dans les premières positions $\frac{26793}{21296}$. Si, d'après la position pour le second nombre cherché, je retranche cette valeur de 2, il reste $\frac{15799}{21296}$.

Remarquez : 1° que les numérateurs 26 793 et 15 799 satisfont à la question.

2° Que l'on a résolu de fait le problème suivant : Partager le nombre 2 en deux parties, de façon que le double de la somme des carrés des parties soit un cube.

3° Que l'on peut résoudre de la même façon cette autre question : Trouver deux nombres tels qu'un multiple quelconque de la somme de leurs carrés fasse un cube. Ainsi, si l'on demande que le quintuple de la somme des deux carrés fasse un cube, vous poserez x et $5-x$ pour les racines cherchées et vous continuerez comme ci-dessus.

Enfin de cette solution on peut déduire également celle d'un très beau problème : Trouver deux nombres tels que leur différence soit égale à la différence de leurs bicarrés. Si l'on prend en effet les deux nombres trouvés ci-dessus, 26 793 et 15 799, et, comme dénominateur commun, la racine du cube produit par la multiplication de leur somme et de la somme de leurs carrés, racine qui est 34 540, on aura les deux nombres cherchés $\frac{26\,793}{34\,540}$ et $\frac{15\,799}{34\,540}$.

Trouver deux triangles rectangles ayant une même différence entre leurs moindres côtés, et tels que le plus grand côté de l'angle droit de l'un de ces triangles soit égal à l'hypoténuse de l'autre.

38. Formez le premier triangle des nombres x et 1; les côtés seront x^2+1, x^2-1, $2x$. Donc le second triangle aura x^2+1 comme plus grand côté de l'angle droit, et le plus petit s'obtiendra en retranchant la différence des deux moindres côtés du premier triangle, c'est-à-dire x^2-2x-1, ce qui donne $2x+2$. Reste à satisfaire à la condition $(x^2+1)^2+(2x+2)^2=\square$. En développant, j'ai comme somme des carrés x^4+6x^2+8x+5 que j'égalerai à $(x^2+3)^2$, ce qui donne $x^4+6x^2+9=x^4+6x^2+8x+5$. D'où $x=\frac{1}{2}$.

D'après les positions, en chassant le dénominateur, les nombres entiers générateurs du premier triangle sont 1 et 2, mais le premier

est inférieur au second, en sorte que l'on aurait un nombre faux comme côté du triangle, ce qui est absurde. Il faut donc, pour remédier à cet inconvénient, recommencer l'opération, en formant le triangle des nombres $x+1$ et 2.

Les côtés du premier triangle seront donc x^2+2x+5; x^2+2x-3; $4x+4$, et les moindres côtés du second x^2+2x+5; $4x+12$. La somme des carrés de ces deux derniers côtés fait

$$x^4+4x^3+30x^2+116x+169,$$

et doit être un carré. On peut en former la racine de plusieurs façons. Prenons $\left(13+\frac{58}{13}x-x^2\right)^2$; l'équation donne $x=-\frac{1525}{546}$. Les nombres entiers générateurs du triangle seront, d'après les positions et en chassant les dénominateurs, -979 et 1092. On peut s'en servir comme si tous deux étaient vrais et former le triangle des nombres 1092 et 979. On aura ainsi les deux triangles

$$2\,150\,905, \quad 2\,138\,136, \quad 234\,023,$$
$$2\,165\,017, \quad 2\,150\,905, \quad 246\,792,$$

qui satisfont à la question.

Trouver deux triangles rectangles ayant une même somme pour les côtés de l'angle droit et tels que l'hypoténuse de l'un soit égale au plus grand côté de l'angle droit de l'autre.

39. Formez le premier triangle des nombres $x+1$ et 1; les côtés seront : x^2+2x+2; x^2+2x; $2x+2$. Le plus grand côté de l'angle droit du second triangle sera égal à l'hypoténuse x^2+2x+2, et, si on le retranche de la somme des côtés de l'angle droit du premier triangle, il restera $2x$ pour l'autre côté du second triangle. La somme des carrés des côtés de l'angle droit de ce triangle fera dès lors

$$x^4+4x^3+12x^2+8x+4.$$

Je l'égale au carré $(x^2+2x+4)^2 = x^4+4x^3+12x^2+16x+16$; il vient $x = -\frac{3}{2}$.

Je substituerai, par suite, $x - \frac{3}{2}$ à x dans l'expression

$$x^4+4x^3+12x^2+8x+4;$$

la transformée est $x^4-2x^3+\frac{15}{2}x^2-\frac{29}{2}x+\frac{169}{16}$ et je l'égalerai au carré $\left(\frac{13}{4}-\frac{29}{13}x+x^2\right)^2$; l'équation me donne $x=\frac{21}{13}$; si j'en retranche $\frac{3}{2}$, j'ai $\frac{3}{26}$ pour valeur de x dans les premières positions. Par conséquent, en nombres entiers $x+1$ et 1 deviennent, si je chasse les dénominateurs 29 et 26 qui engendrent le premier triangle cherché 1517, 165, 1508. On en déduira le second : 1525, 1517, 156.

On peut arriver autrement à la solution en partant de la valeur $x=-\frac{3}{2}$ trouvée en premier lieu. Si on la substitue dans les expressions $x+1$ et 1, on aura en entiers : -1 et 2. On prendra dès lors comme nombres générateurs $x-1$ et 2 et l'on recommencera l'opération. Les côtés du premier triangle seront x^2-2x+5; x^2-2x-3; $4x-4$; les côtés de l'angle droit du second : x^2-2x+5; $4x-12$, la somme des carrés de ces derniers fera $x^4-4x^3+30x^2-116x+169$ et on l'égalera au carré $\left(13-\frac{58}{13}x+x^2\right)^2$; d'où $x=\frac{42}{13}$. Dès lors, en entiers, $x-1$ et 1 deviennent 29 et 26, c'est-à-dire les nombres trouvés ci-dessus et conduisant aux mêmes triangles.

Trouver un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit un carré, et tel que la somme de l'un des côtés de l'angle droit et d'un multiple donné de l'autre côté soit également un carré.

40. Soit 2 le multiplicateur donné. Formons le triangle cherché des nombres x et 1; les côtés seront x^2+1, x^2-1, $2x$; ajoutons $4x$, double du dernier côté, au premier côté de l'angle droit; il vient x^2+4x-1 qui doit être un carré aussi bien que l'hypoténuse x^2+1.

La différence de ces deux expressions est $2 - 4x$, et l'on trouvera, par suite, la valeur $x = \frac{5}{12}$. Mais x doit être plus grand que l'unité; il faut donc recommencer l'opération, en prenant pour nombres générateurs $x + 5$ et 12.

Les côtés seront : $x^2 + 10x + 169$; $x^2 + 10x - 119$; $24x + 120$. Ajoutons au côté intermédiaire le double du dernier, c'est-à-dire $48x + 240$; il vient $x^2 + 58x + 121$ qui doit être un carré aussi bien que l'hypoténuse $x^2 + 10x + 169$. Égalons à un carré le produit de ces deux expressions, soit $x^4 + 68x^3 + 870x^2 + 11012x + 20449$, et formons ce carré : $\left(143 + \frac{5506}{143}x - \frac{6\,262\,703}{2\,924\,207}x^2\right)^2$; on trouvera

$$x = \frac{1\,991\,730\,029\,642\,496}{30\,670\,462\,287\,360}.$$

Les nombres entiers formant le triangle seront 2 145 082 341 079 296 et 368 045 547 448 320; il est facile de le calculer.

Trouver un bicarré tel que son triple, ajouté à un autre bicarré que l'unité, fasse un carré.

41. On demande que le second bicarré soit différent de l'unité, parce qu'autrement la question serait trop facile, puisque l'on a $3 \times 1 + 1 = 4$ et $3 \times 16 + 1 = 49$. Je prends pour racine du bicarré cherché le nombre $x - 1$. Son bicarré est $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$. Triplant et ajoutant x^4, j'ai $4x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 12x + 3$, que j'égale au carré $\left(2x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right)^2$, d'où $x = \frac{11}{8}$. D'après les positions, en nombres entiers, la racine du bicarré sera 3; en triplant ce bicarré, 81, et en ajoutant le bicarré 14641 du numérateur 11, on aura 14 884, c'est-à-dire 122^2.

On peut aussi prendre le double de 3, c'est-à-dire 6, tripler son bicarré et ajouter 22^4 (bicarré du double de 11); on aura 238 144 ou 488^2.

De même, en triplant 3 et 11, ce qui donne 9 et 33,

$$3 \times 9^4 + 33^4 = 1\,205\,604 = 1098^2;$$

et ainsi de suite indéfiniment.

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un carré en ajoutant le carré de l'hypoténuse à un multiple donné de l'aire.

42. Soit 2 le multiplicateur donné. Formons le triangle des nombres x et 1; les côtés seront : $x^2 + 1$; $x^2 - 1$; $2x$; le carré de l'hypoténuse est $x^4 + 2x^2 + 1$; en ajoutant le double de l'aire, c'est-à-dire $2x^3 - 2x$, j'ai $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ que j'égale au carré $\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)^2$. Il vient $x = \frac{1}{4}$; mais, cette valeur n'étant pas supérieure à 1, on ne peut former le triangle sans tomber sur des nombres faux; il faut donc recommencer l'opération en substituant $x + \frac{1}{4}$ à x dans l'expression égalée à un carré.

La transformée est $x^4 + 3x^3 + \frac{31}{8}x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{169}{256}$ que j'égalerai au carré $\left(\frac{13}{16} - \frac{9}{26}x + \frac{5077}{2197}x^2\right)^2$. Il vient (¹) $x = \frac{20\,512\,544}{20\,949\,120}$; ajoutant $\frac{1}{4}$, à cause de la substitution, on aura, comme valeur de x dans les premières positions $\frac{6\,437\,456}{5\,237\,280}$. Les deux nombres générateurs du triangle rectangle seront donc en entiers 6 437 456 et 5 237 280. Il y a un cas unique pour lequel le problème est impossible (²).

Trouver un triangle rectangle tel que l'on ait un carré en retranchant l'aire du carré de l'un des côtés de l'angle droit.

43. Formez ce triangle des nombres $x - 1$ et 4; les côtés seront : $x^2 - 2x + 17$; $x^2 - 2x - 15$; $8x - 8$. En retranchant son aire,

(¹) Les nombres qui suivent sont entachés d'une erreur de calcul; il faut corriger $x = -\frac{22\,202\,544}{20\,949\,120}$, ce qui pour les nombres générateurs du triangle donne 6 859 956 et 5 237 280, ou en nombres minimi, 571 663 et 436 440.

(²) Cette remarque paraît se rapporter au cas où le multiplicateur donné est 8.

$4x^3 - 12x^2 - 52x + 60$, du carré du second côté, c'est-à-dire de $x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 60x + 225$, il reste $x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 112x + 165$, à égaler à un carré, soit à $(x^2 - 4x - 15)^2$. Il vient $x = -\frac{15}{2}$. Je substitue par suite $x - \frac{15}{2}$ dans l'expression à égaler à un carré; la transformée est $x^4 - 38x^3 + \frac{1007}{2}x^2 - \frac{5431}{2}x + \frac{81225}{16}$. Je l'égale au carré $\left(x^2 - 19x - \frac{285}{4}\right)^2$. Il vient $x = \frac{5423}{285}$; si je retranche $\frac{15}{2}$ à cause de la substitution, puis l'unité, d'après les positions, les nombres générateurs du triangle rectangle seront en entiers 6001 et 2280. Le triangle cherché sera 41 210 401, 30 813 601, 27 364 560.

TRADUCTION

DU

COMMERCIUM EPISTOLICUM

DE WALLIS.

CORRESPONDANCE

RÉCEMMENT ÉCHANGÉE

SUR CERTAINES QUESTIONS MATHÉMATIQUES

entre les très nobles

LORD WILLIAM VICOMTE BROUNCKER, Anglais,
SIR KENELM DIGBY, chevalier, Anglais,
M. FERMAT, conseiller au Parlement de Toulouse,
M. FRENICLE, gentilhomme, de Paris,

et

SIR JOHN WALLIS, professeur de Géométrie à Oxford,
M. FRANS VAN SCHOOTEN, professeur de Mathématiques à Leyde,

et autres.

—

Éditée par John Wallis, docteur de Théologie, professeur en la chaire de Géométrie de Savile à la très célèbre Académie d'Oxford.

—

Oxford, imprimé par A. Lichfield, typographe de l'Académie,
aux frais de Th. Robinson, 1658.

[Réédité dans le Tome second des Œuvres de Wallis, Oxford, 1693.]

DÉDICACE

DE

JOHN WALLIS

AU TRÈS ILLUSTRE ET TRÈS NOBLE

SIR KENELM DIGBY,

CHEVALIER EN ANGLETERRE.

Très illustre et très noble chevalier,

Chaque fois qu'à part moi je repense aux multiples obligations que je vous ai, je désespère entièrement d'égaler mes titres à vos faveurs; il ne me reste pas même à compter pouvoir, pour de tels bienfaits, acquitter ma dette de remercîments. J'oserais plutôt me croire capable de triompher de toute autre difficulté, que de celle de vous témoigner une reconnaissance digne de vous ou égale à mon devoir. En tout cas, je dois considérer comme un honneur insigne, inappréciable, que votre faveur ait daigné venir me chercher sans que j'aie eu à l'implorer et quand j'étais loin d'y prétendre; mais bien plus, vous m'avez de vous-même recommandé, moi et mes travaux, à d'autres personnages de premier ordre; et pour mes intérêts vous avez montré autant de sollicitude, pour ma renommée, déployé autant de zèle, que s'il se fût agi de vous-même.

Ainsi donc cela est de vous, cela vous est entièrement imputable, que j'aie été appelé à correspondre avec vous et en même temps avec ces autres personnages illustres; que vous ayez obtenu d'elles à mon endroit de tels éloges, qu'ils dépassent tout ce que je pouvais, je ne dis pas me promettre, mais espérer d'elles; qu'il me sera impossible de me les arroger, sans enfreindre les règles de la modestie. Si en effet, pour nous conformer à vos désirs, nous avons, le très honorable Vicomte Brouncker et moi, abordé quelques problèmes, tant d'Arithmétique que de Géométrie, proposés par les célèbres Fermat et Frenicle (que la France, ainsi que vous le dites, estime les premiers en ces sujets); si nous en avons donné la solution, nous ne prétendons point pour cela, je dirai mieux : nous n'avons jamais espéré ni nous faire

traiter d'Hercules ou de Samsons, ni vous voir mettre au rang des premiers maîtres de ce siècle (1), éloges par lesquels des hommes aussi supérieurs que nos correspondants ont su nous faire rougir. Je parle pour moi du moins; car je ne voudrais en rien rabaisser les titres du très noble et très savant Vicomte.

Mais de telles personnes ont droit, elles aussi, à des remercîments que je vous prie de leur adresser en mon nom, pour avoir daigné m'honorer de leur commerce et me traiter avec tant de bienveillance; car il ne faut nullement tenir compte de quelques expressions, parfois un peu sévères, échappées dans le cours des discussions. Je voudrais les prier à mon tour de vouloir bien excuser ce que nous avons pu, le très honorable Vicomte et moi, écrire de notre côté un peu trop librement; si, de même, nous avons manqué à leur accorder tous les titres auxquels a droit leur rang, c'est que j'ignore les usages et les dignités de leur pays; j'aurai, bien contre mon gré, commis une faute à l'égard de personnes aussi illustres et aussi éminentes.

De vous enfin, très illustre Chevalier, de vous que, rendu toujours plus audacieux par votre faveur même, nous avons tant de fois fatigué, c'est de l'indulgence que je réclame, non pas un éloge. Ne dédaignez pas, je vous en prie, d'accepter l'offre que je vous fais de ce qui vous appartient, car presque tout en a été écrit par vous ou à vous.

Mais vous avez, nous le proclamons, également droit à la reconnaissance publique pour avoir, cette fois comme ailleurs, défendu avec autant d'ardeur la nation anglaise, montré autant de souci pour sa gloire; à part du moins cette erreur pardonnable d'avoir appelé, pour lutter contre de pareils athlètes, un champion aussi chétif, aussi peu exercé que moi. Car si, en cette affaire, je ne m'en suis pas tiré trop malheureusement, je ne voudrais pas qu'on jugeât des forces des Anglais sur l'échantillon de ma faiblesse.

Adieu, très insigne Seigneur, puissiez-vous rester longtemps encore l'actif promoteur des belles-lettres et l'ornement de la nation anglaise.

(1) Expressions de Frenicle. — *Voir* ci-après les Lettres 41, 42 et 43.

CORRESPONDANCE

RÉCEMMENT ÉCHANGÉE

SUR CERTAINES QUESTIONS MATHÉMATIQUES.

LETTRE I.

VICOMTE BROUNCKER A JOHN WALLIS, A OXFORD.

Votre lettre du 22 février/4 mars, clarissime professeur, me fait profondément sentir combien je vous suis redevable et par quels liens, plus forts de jour en jour, vous m'attachez à vous; car la bienveillante acception que vous avez daigné donner à la liberté dont j'ai usé à votre endroit est pour moi un véritable bienfait dont je vous rends grâces du fond du cœur. Vous trouverez dans ce pli un papier que j'ai reçu hier de M. White et qu'il m'a prié de vous faire parvenir. La proposition est, je crois, plus difficile qu'elle ne paraît au premier abord; car, autrement, elle ne mériterait guère le titre que je lui vois donné. En tous cas, je ne doute point que vous n'en trouviez promptement la solution, qu'obtiendra peut-être aussi quelque jour

Votre très fidèle et très respectueux ami,

BROUNCKER.

5/15 mars 1656/7.

Le papier inclus était ainsi conçu :

« *Défi de M. Fermat pour M. Wallis avec les vives recommandations du messager,* *Thomas White.* »

(*Voir* la pièce 79ᴮ de la *Correspondance de Fermat*. Tome II, page 333; traduction, Tome III, page 311.)

LETTRE II.

JOHN WALLIS A VICOMTE BROUNCKER, A LONDRES.

Très honorable Mylord, j'ai reçu la nuit dernière votre lettre datée de la veille, et en même temps le papier inclus de M. Fermat. La question est à peu près du même genre que les problèmes posés d'ordinaire sur les nombres dits *parfaits*, *déficients*, ou *abondants*; ces problèmes, et autres de même espèce, ne peuvent guère ou ne peuvent pas du tout être ramenés à une équation générale, embrassant tous les cas. Quoi qu'il en soit au reste de celui dont il s'agit, il me trouve trop absorbé par de nombreuses occupations, pour que je puisse lui consacrer immédiatement mon attention. Mais je n'en ferai pas moins, pour le moment, cette réponse :

Le seul et même nombre 1 *satisfait aux deux demandes.*

Qu'il me soit également permis de proposer une question semblable :

Trouver deux nombres carrés tels que, si l'on ajoute à chacun d'eux ses parties aliquotes, on ait la même somme.

Par exemple : $16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 = 25 + 5 + 1$.

Il s'agit de trouver un autre couple semblable.

Je souhaite la meilleure santé à Votre Seigneurie, je l'assure de l'empressement de mon respect, et je vous prie de voir en moi,

Très honorable Mylord,
De Votre Seigneurie le très obéissant serviteur,

J. WALLIS.

Oxford, 7/17 mars 1656/7.

Immédiatement après l'échange des lettres qui précèdent, on remit à Mylord vicomte Brouncker une troisième question (¹) *de la part du même*

(¹) La pièce 81 de la Correspondance de Fermat, t. II, p. 334, t. III, p. 312.

M. Fermat, qui semblait ainsi abandonner les premières, résolues dans l'intervalle, paraît-il, par M. Frenicle. Mylord indiqua la solution de cette troisième question, en même temps que celles des deux précédentes, sous une forme très brève, dans un écrit qu'il remit à M. White, lequel lui avait transmis le message; ce fut, je crois bien, dans ce même mois de mars. M. White fit parvenir cet écrit à Paris; mais comme Mylord Vicomte n'en a conservé aucune copie, nous ne pouvons l'insérer ici textuellement; le sens en sera toutefois reproduit ci-après, Lettre IX. Il s'ensuivit que nous ne nous attachâmes plus dès lors à une solution ulterieure des questions précédentes, que leur auteur lui-même nous paraissait négliger, puisqu'il leur avait substitué un troisième problème, dans lequel il mettait plus de confiance; or ce problème avait été, presque aussitôt, résolu par Mylord Vicomte.

LETTRE III.

Vicomte Brouncker a John Wallis.

La lettre ci-incluse, clarissime professeur, a été écrite par M. Fermat au très illustre chevalier Kenelm Digby et m'a été remise la nuit dernière par M. White; j'ai cru devoir saisir la première occasion pour vous l'envoyer.

Que M. Fermat ne soit pas encore pleinement persuadé de la vérité de votre *quadrature du cercle*, je le crois sans peine; car, si je ne me trompe, il n'a regardé votre Traité qu'à la légère. Autrement il me semble qu'il eût remarqué, dans les propositions 101, 102, 103, 104, 105, le contraire de ce qu'il parait vouloir donner à entendre, en parlant de ses *hyperboles infinies*, à savoir que vous n'auriez pas considéré ces figures.

Mais ce qu'il dit de leurs *centres de gravité* indique bien qu'il mérite vraiment la réputation qui est venue jusqu'à nous, et je crois qu'il vous sera aussi agréable qu'à moi de voir la démonstration et la règle générale qu'il annonce à ce sujet.

Comme cet envoi est autographe, je crois que M. White s'attend à

ce que je le lui rende; je vous prie donc, clarissime professeur, de le retourner à

Votre très fidèle et très respectueux ami,

BROUNCKER.

Londres $\frac{30 \text{ mai}}{9 \text{ juin}}$ 1657.

LETTRE IV

(incluse dans la précédente).

FERMAT A KENELM DIGBY, CHEVALIER EN ANGLETERRE, A PARIS.

De Castres, le 20 avril 1657.

(Voir la *Correspondance de Fermat*, n° 82, t. II, p. 337.)

LETTRE V.

JOHN WALLIS AU TRÈS ILLUSTRE CHEVALIER SIR KENELM DIGBY.

Ce n'est pas pour moi, très noble et très savant chevalier, une mince récompense de mon travail que de vous voir daigner examiner par vous-même le modeste fruit de mes dernières veilles et, comme s'il en valait la peine, demander à son sujet le jugement d'autrui. Le nom célèbre de Digby, le parfait savoir de celui qui le porte, ne peuvent être ignorés de personne, après les écrits (pour taire le reste) que vous avez donnés au public et qui sont pleins d'une science universelle; ce n'est donc pas une petite gloire que d'avoir pu, sinon satisfaire entièrement un tel homme, au moins accomplir un travail qu'il estime assez pour ne pas le dédaigner entièrement. Mais ce qui rehausse le plus votre insigne clémence, compagne de la véritable noblesse, c'est que vous avez comblé de cet honneur immérité un homme tout à fait obscur et que vous ne connaissiez aucunement d'ailleurs.

Ainsi par cette lettre que vous a écrite le très noble M. Fermat, et

que, dans votre parfaite courtoisie, vous m'avez fait communiquer par M. White, obligeance qui me fait votre débiteur, j'apprends que vous avez et demandé et obtenu le jugement de Fermat sur mon Ouvrage. J'en dois également de la reconnaissance à ce très noble savant, qui a daigné parcourir ce Traité, qui en a porté un jugement assez honorable pour moi, enfin qui veut bien estimer et l'œuvre et son auteur; je ne puis qu'apprécier hautement cette faveur d'un tel homme, si habile en mathématiques.

Votre très noble Correspondant pense que je n'ai aucunement eu vent de ce qu'il avait dès longtemps trouvé sur la quadrature des paraboles et des hyperboles; cela est si vrai que, si je m'en souviens, je n'avais même jamais entendu prononcer le nom de Fermat (laissez-moi confesser ingénûment mon ignorance), avant que ce que j'ai publié sur ce sujet n'eût été écrit depuis longtemps ou même déjà imprimé; sans quoi je n'aurais pas dissimulé ce que j'en aurais pu savoir. Je regarde même comme un privilège d'avoir pu, par là, connaître un tel savant, et suis bien loin de vouloir rien diminuer de ses inventions; je voudrais bien plutôt le voir mettre au jour et ne pas cacher jalousement au monde savant les découvertes qu'il garde à part lui, et qui, j'en suis bien persuadé, sont tout à fait excellentes.

Mais pour ce qu'en contient sa présente lettre, j'ai bien peu à dire. *Les nouvelles hyperboles*, comme il les appelle, carrées par lui, ce sont précisément les figures dont, dans mon *Arithmétique des infinis*, j'ai enseigné la quadrature prop. 102; de même celle de ma prop. 103 est une véritable hyperbole, comme je l'ai indiqué prop. 95. Quant à celles qu'il exclut comme n'étant pas susceptibles d'être carrées, je les ai également exclues prop. 104; car lui et moi parlons exactement des mêmes. Toutefois (je ne sais s'il y a suffisamment fait attention), ces courbes de la prop. 104 ne diffèrent point de celles de la prop. 102; elles leur sont au contraire identiques, sauf qu'elles sont prolongées de l'autre côté; ce que j'ai indiqué prop. 105.

J'ai également montré comment il se fait que, parmi de telles figures prolongées à l'infini, les unes sont infinies en grandeur, les autres

sont au contraire de grandeur finie et par conséquent peuvent être égalées à des aires finies; le scholie de la prop. 101 donne, si je ne me trompe, la raison naturelle et immédiate de cette merveilleuse propriété; cette raison est-elle bien la même qu'assignait Fermat, écrivant à Torricelli? Je ne pourrais le dire, à moins de connaître ce qu'il disait.

Cependant, si votre très noble Correspondant voulait bien indiquer, soit sa méthode de quadrature des paraboles ou des hyperboles, soit encore ce *criterium* qui distingue dans les figures de ce genre les infinies des finies, j'entends la véritable raison de cette propriété, cela me ferait le plus grand plaisir. Car si ma méthode m'a suffi, comme je l'ai dit, pour ce double objet, je n'ai pas coutume d'avoir pour mes découvertes tant de prétentions, ni tant de partialité non plus, que je croie pour elles devoir négliger celles des autres.

Je ne puis penser autrement pour les spéculations qui concernent le centre de gravité, sujet que j'ai, à dessein, complètement omis. En effet, ces mêmes principes dont je me sers permettent de déterminer sans difficulté le centre de gravité, tant des paraboles de tout genre que de la plupart de toutes les autres figures, planes ou solides; j'ai même eu un moment l'intention de m'y arrêter; mais, pour ne pas me perdre dans les digressions, pour ne pas trop rompre le fil des théorèmes et fatiguer le lecteur par l'excessive variété d'une matière entremêlée, j'ai cru devoir m'abstenir entièrement de cette spéculation comme de bien d'autres qui auraient eu leurs attraits. Je me suis contenté d'indiquer parfois du doigt (dans les scholies) ce que j'omettais à dessein, et souvent je n'ai même pas donné ces indications.

Votre très noble Correspondant veut bien promettre courtoisement, pourvu que j'en exprime le désir, de me communiquer ses découvertes à ce sujet. Qu'il croie bien qu'à moins qu'il y trouve quelque ennui, il me ferait de la sorte le plus grand plaisir; car je ne puis attendre de lui rien que de parfait et de sublime.

Enfin, pour la quadrature du cercle que j'ai donnée, il indique qu'il n'en est pas pleinement persuadé, remarquant particulièrement

que ce qui se déduit par comparaison en Géométrie ne procède pas toujours sans s'écarter parfois de la vérité. J'admets sans peine qu'il garde quelque défiance là-dessus, tant qu'il n'aura pas plus soigneusement examiné la question; je n'ignore pas qu'on est là sur une pente glissante et où un faux pas se fait bien vite. Mais précisément parce que je le savais très bien, j'ai été d'autant plus prudent et attentif, j'ai cherché à être aussi clairvoyant que possible tout le long du chemin pour ne pas me laisser surprendre de la sorte et entraîner dans quelque erreur. Aussi, j'en ai la confiance, mes précautions ont été telles que je ne me suis nulle part servi d'aucune comparaison qui ne puisse supporter l'examen géométrique et qui ne soit assise sur le fondement d'une légitime démonstration. J'ai bien pu ne pas toujours en donner les prolixes développements; je cherchais à m'épargner un travail pénible, à éviter l'ennui au lecteur; mais ce qui peut arrêter, je suis en mesure de le suppléer facilement.

Quant au fond de la question, ce qui fait d'ailleurs que je ne suis pas trop inquiet sur la vérité de mes propositions, c'est que le très honorable Seigneur William vicomte Brouncker, si compétent dans la matière et dont j'aurais dû faire mention, dans les termes les plus élogieux, à la prop. 191, ayant entrepris une vérification numérique et conduit son calcul jusqu'au dixième rang, a trouvé que tout allait à souhait. Car il a obtenu pour le rapport de la circonférence au diamètre

$$\left.\begin{array}{ll} \text{plus que de} & 3,14159\,26535\,69\ldots \\ \text{moins que de} & 3,14159\,26536\,96\ldots \end{array}\right\} \text{à } 1,$$

ce qui concorde avec les nombres de Ludolf Van Keulen et autres; de plus, dans toute la suite du calcul, il a trouvé, comme il le fallait, un rapport alternativement en excès et en défaut; je ne doute donc pas que je ne sois arrivé à un résultat véridique.

Voilà ce que je crois, très noble Chevalier, devoir dire sur la lettre de Fermat; vous pourrez lui en faire part, si vous le jugez à propos. Il me reste, après vous avoir témoigné ma reconnaissance pour l'hon-

neur que vous avez bien voulu me faire, après vous avoir fait mes meilleurs souhaits, à me déclarer,

Très noble Seigneur,

Votre très respectueux et très obéissant

J. Wallis.

Oxford, 6/16 juin 1657.

LETTRE VI.

Kenelm Digby a John Wallis.

Très honoré et illustre Monsieur,

La lettre que vous m'avez fait la faveur et l'honneur de m'écrire le 6 juin est arrivée pour moi dans cette ville quand j'en étais absent, et, immédiatement après mon retour, j'ai été pris d'une maladie (reste d'une plus forte que j'ai eue à Poitiers) et de la sorte empêché jusqu'à présent de vous adresser ces humbles remercîments et de m'acquitter des respectueux égards que je vous dois. Et maintenant que je suis hors d'affaire, je me trouve dans la crainte de rester bien au-dessous ou de ce que je désire ou de ce que je dois faire. Car, à considérer que la mesure de toute civilité ou reconnaissance est à prendre, soit de la dignité de la personne qui la rend, soit du mérite de celui qui la reçoit, je trouve de part et d'autre une disproportion si énorme (pour le cas qui se présente à moi), qu'il n'y a ni obséquiosité de langage, ni politesse d'expressions qui puisse en faire la balance. Je ne m'embarquerai donc pas moi-même dans cette tâche impossible; mais, voyant que c'est simplement votre bonté qui vous a disposé à être ainsi bienveillant et favorable pour moi, j'aurai recours à cette même bonté, en vous suppliant d'accepter la profession que je vous fais ici en toute vérité et sincérité, que, de même que j'honore très hautement vos grands talents et mérites, ainsi que les nobles productions de votre puissant et savant esprit, qui fait de vous l'honneur de notre nation et l'envie de toutes les autres, de même je vous attribue le

droit de me commander toujours tout ce qui pourra dépendre de moi pour votre service et en toute occasion je l'accomplirai avec une aussi prompte exactitude que vous pouvez le désirer du plus dévoué ami et serviteur que vous ayez.

Ma santé ne m'a pas permis d'écrire à M. Fermat jusqu'à hier ([1]) (jour de poste pour Toulouse); je lui ai d'ailleurs envoyé alors copie de la lettre que vous m'avez adressée. Ce que je recevrai de lui en retour, je vous en donnerai aussitôt connaissance, et je me considère comme très heureux et très honoré d'être l'intermédiaire de la communication entre deux aussi grands personnages. Je compte que M. White vous enverra la copie de la dernière lettre de M. Fermat à moi ([2]), copie que je lui adresse maintenant pour qu'avant de vous la faire parvenir, il la montre à Mylord Brouncker, dont il y est fait mention. Je crois assez que les lettres de Mylord n'ont pas été bien traduites à M. Fermat. Mais quant à son doute, que la solution de son problème par Mylord ne serait pas bonne, parce qu'il l'a traité à la légère, ce n'est pas un bon argument, comme M. de Frenicle l'a montré par expérience. Car, ce même problème lui étant montré comme un défi à tous les mathématiciens de l'Europe, il donna immédiatement à la personne qui le lui apportait quatre solutions (en quatre nombres différents), et il lui en envoya six autres le lendemain matin et, de plus, à résoudre un problème tiré de son fonds, problème où l'autre trouvera, je crois, une rude besogne pour lui.

Je ne dois pas prendre congé de vous, avant de vous avoir dit un mot ou deux de votre digne collègue, le Docteur Ward. Il y a déjà quelque temps que j'avais entendu parler de son livre contre M. Hobbes, et M. White l'avait envoyé par ici pour moi, pendant que j'étais en Languedoc; mais je ne l'avais pas vu jusqu'à présent, où je viens de le dévorer d'un bout à l'autre avec beaucoup de plaisir et de contentement. Seulement, là où il lui a plu de parler avantageusement de moi au delà de mon mérite (excessivement au delà), le sang m'a

([1]) Mardi 31 juillet 1657.

([2]) N° 83 de la Correspondance de Fermat, t. II, p. 341.

monté aux joues; j'ai rougi de honte de ne pouvoir répondre à l'idée qu'il éveillait de moi, et la honte étant une sorte de chagrin, vous croirez aisément que ces éloges immérités doivent m'être pénibles. Pourtant, à vous confesser la vérité, je ne peux pas me sevrer tellement de la vanité que je ne sois ému et charmé (et cela très profondément) par tout ce que dit favorablement de moi un homme si instruit et si excellent.

Je terminerai ce point qui le concerne en vous suppliant de lui offrir mon très humble service (car, je pense, vous le voyez souvent), avec de très vifs et respectueux remercîments pour son excessive civilité à mon égard, comme aussi avec l'assurance que je l'estime et honore de tout mon cœur. C'est un illustre triumvirat que vous deux et le Docteur Wilkins exercez en littérature et en tout genre de mérite. Vos noms sont fameux au loin; j'entends parler de vous de divers côtés, mais jamais avec plus d'abondance ou plus d'affection que par M. White, que vos bontés ont rendu entièrement vôtre et qui l'exprime amplement en toute occasion. Mais je vous détourne trop de vos grandes et multiples occupations; je vous en demande instamment pardon et vous assure que je suis et me montrerai toujours,

Illustre Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

KENELM DIGBY.

Paris, le 1er août 1657.

LETTRE VII.

JOHN WALLIS A KENELM DIGBY.

TRÈS NOBLE MONSIEUR,

Sur le vu de votre lettre si courtoise du 1er août, que j'ai eu l'honneur de recevoir il y a deux jours, il n'est pas aisé de dire combien je me suis trouvé surpris, sachant combien peu j'ai mérité d'une si noble

main et quelle chétive part m'était due de ce que vous vous êtes plu à m'attribuer si libéralement. Je fus honteux, je l'avoue, de penser combien peu je pouvais prétendre à cet honneur que vous me faisiez et j'aurais profondément rougi, si la soudaineté de la surprise ne m'avait pas autant stupéfait. Et quand j'ai pensé à vous répondre, j'ai trouvé que vous m'aviez prévenu de telle sorte, en disant tant de ce que je devrais vous dire, qu'à moins de transcrire et de vous retourner vos propres mots (de meilleurs, je ne pourrais), il ne me reste rien à répliquer. Et même je n'oserais pas, de peur de profaner, avec ma plume trop rude, ce langage, que je ne puis prétendre à imiter. Si vous vouliez seulement me faire assez de faveur pour relire attentivement la copie de votre propre lettre, et en interpréter la plus grande partie comme dite par moi en reconnaissance de ces politesses que je ne pouvais mériter et en désaveu de ces mérites que je ne puis m'attribuer, vous y trouveriez une meilleure réponse, en un langage plus convenable à votre noble personne, que vous ne pouvez certainement l'attendre de moi sous aucun rapport. Car, quoique je ne puisse me vanter d'aucune adresse à la paume, je sens très bien que je ne puis souffrir, fût-ce au plus grand risque pour moi, qu'un langage si obséquieux, de telles expressions d'obligeante bonté, restent devant moi, sans que je les retourne à la même main dont elles me viennent; et, quoique je ne sois pas capable de les retourner avec cette grâce et cette dextérité qui ont accompagné leur envoi, je vous supplie humblement de croire que ce n'est pas par défaut quelconque de réalité d'affection ou de bonne volonté que je reste en dessous de ce que je dois à quelqu'un que j'honore autant.

Je dois avouer que je n'ai pu sans ressentir une agréable satisfaction (*neque enim mihi cornea fibra est*) [1] me voir moi-même si hautement honoré, malgré mon indignité, sous d'aussi beaux traits tracés, quoique si peu ressemblants, par une main si excellente; ainsi parfois les dames se plaisent à voir leurs portraits les flatter. J'en aurais été

[1] « Je n'ai pas des entrailles de corne ».

extrêmement fier, sans la conscience que j'ai du peu de ressemblance de ma propre personne; car l'autorité du si galant homme à qui j'ai cette obligation est capable de donner crédit à son opinion sur moi.

Dès le retour ici des deux autres personnes auxquelles vous voulez bien m'unir dans votre bonne opinion, le docteur Wilkins et le docteur Ward, je leur ferai connaître combien ils vous sont redevables de l'honneur que vous leur faites. Pour le moment, je puis seulement, d'après le grand respect que je sais qu'ils ont pour vous, vous assurer qu'ils sont entièrement vos serviteurs. Et nous devons tous nous reconnaître extrêmement endettés envers M. White qui s'est plu, non seulement à juger si favorablement de nous, mais encore à nous représenter à vous sous des traits assez flatteurs pour qu'ils aient obtenu une place si avantageuse dans votre opinion.

Le problème dont vous parlez, proposé par M. Fermat comme défi à tous les mathématiciens de l'Europe, est, je suppose, celui dont j'ai reçu de Lord Brouncker une copie en ces termes :

(*Voir* Correspondance de Fermat, n° 79 B, t. II, p. 333; t. III, p. 311.)

A ce problème je ne donnai, pour le moment, d'autre solution que :

Le seul et même nombre 1 *satisfait aux deux demandes;* j'ajoutai d'ailleurs, comme renvoi, un autre problème de même nature, que vous trouverez à l'essai, si je ne me trompe, aussi difficile que les deux de Fermat :

Trouver deux nombres (*voir* plus haut, p. 404, lignes 16 à 19) ... couple semblable.

D'ailleurs j'ajoutais que je regardais des problèmes de cette nature, dont il est aisé d'imaginer un grand nombre en peu de temps, comme demandant plus de travail qu'ils n'offrent d'usage ou de difficulté.

Depuis lors je n'y ai pas davantage repensé; car je fus précisément alors obligé de m'absenter, par la mort d'un ami intime, et, avant mon retour, j'appris que Mylord Brouncker avait résolu les deux questions et aussi une troisième sortie de la même main et à laquelle,

laissant aller ses premières demandes, M. Fermat paraissait s'attacher davantage, comme plus importante que les précédentes. Mais ce problème ayant été reçu et ayant trouvé réponse, avant que j'en eusse eu avis, je regardai comme inutile pour moi de m'occuper d'une chose déjà faite. Ce qu'était la solution du dernier problème par Sa Seigneurie, je ne suis pas capable de le dire, ni davantage ce qu'était le problème lui-même; car je n'ai copie ni de l'un, ni de l'autre. Mais je connais si bien Sa Seigneurie et sa dextérité toute spéciale en choses de cette nature, que j'ai une très forte présomption en faveur de l'exactitude avec laquelle il a dû procéder en cette affaire.

Quant à cette autre lettre de M. Fermat à vous-même, de laquelle vous m'informez que je puis attendre une copie de M. White, elle ne m'est pas encore parvenue; il est possible qu'elle se trouve maintenant entre les mains de Mylord Brouncker, à qui elle devait être communiquée en premier lieu. Je ne puis que vous offrir, pour cela comme pour toutes vos autres nobles faveurs, mes très humbles remerciments, n'étant pas capable de vous donner quelque revanche qui vaille; mais vous n'avez comme récompense que la conscience de votre généreuse inclination à combler de faveurs ceux dont vous ne pouvez attendre aucun retour.

J'ajouterai seulement quelques mots avant de baiser vos nobles mains. Ce n'est rien que ceci : puisque vous avez bien voulu vous donner la peine et à nous l'honneur, d'établir communication écrite entre M. Fermat et moi, je ne regarderai pas comme tout à fait incongru d'ajouter ici un théorème que, si vous le jugez à propos, vous pourrez lui envoyer à démontrer; non pas en défi, ni comme une matière de difficulté extraordinaire, je ne le prends pas pour tel; mais la solution, s'il ne la connait pas déjà, lui suggérera probablement un joli ensemble de spéculations qui seront peut-être bien venues pour lui. Voici ce théorème :

Soit un tronc de pyramide ou de cône, limité entre deux plans parallèles, tel que la plus grande base soit égale au carré de la

droite A, la plus petite au carré de la droite E, et dont la hauteur soit F. Je dis que, si avec A et E (ou leurs égales) comme côtés, on construit un angle de 120°, qu'on complète le triangle et qu'on y circonscrive un cercle, le carré du rayon R de ce cercle multiplié par la hauteur du tronc, (R^2F), donnera le volume du tronc.

Quant à la démonstration, comme tout ce en quoi je puis jamais être capable de vous servir, vous pouvez la demander à votre gré à celui qui répute à grand honneur d'être et de compter pour,

Très noble Monsieur,

Votre affectionné et très humble serviteur,

John Wallis.

Oxford, 3/13 septembre 1657.

LETTRE VIII.

Vicomte Brouncker a Sir Wallis.

J'ai reçu hier, clarissime professeur, votre lettre du 5 courant (1), comme aussi celle à Sir Kenelm Digby que je lui ferai parvenir le plus tôt possible. Quant à celle dont vous me parlez comme envoyée par Sir Kenelm Digby à M. White, pour nous la communiquer, je ne l'ai pas encore reçue et je n'en avais jusqu'alors eu aucune connaissance. Dès que je l'aurai entre les mains, j'aurai soin de vous la transmettre.

En attendant voici la troisième question de Fermat que vous me demandez, et aussi le précis de la réponse que j'y ai faite; quant au texte même, je ne puis le reproduire, n'en ayant retenu à part moi aucune copie, comme je l'aurais fait, si j'avais pu croire que M. White enverrait cette réponse telle quelle. Vous pourrez, si vous le jugez à

(1) Cette lettre manque.

propos, transmettre la solution en latin, pour que la langue anglaise ne suscite plus de nouvelles plaintes ou de nouveaux embarras.

Tout en vous remerciant de vos nouvelles faveurs, aussi bien que des précédentes, je veux vous dire combien je suis vraiment,

Clarissime Professeur,

Votre ami très fidèle et votre très humble serviteur,

BROUNCKER.

11/21 septembre 1657.

L'écrit de M. Fermat était ainsi conçu : (je ne l'ai reçu d'ailleurs que plus tard, la lettre précédente n'en contenant que la dernière partie, c'est-à-dire l'énoncé même du problème).

(*Voir* la *Correspondance de Fermat*, n° 81, tome II, page 334; tome III, page 312.)

LETTRE IX.

JOHN WALLIS A KENELM DIGBY.

TRÈS NOBLE MONSIEUR,

Après vous avoir envoyé ma dernière lettre, datée du 3 septembre, j'ai reçu du très honorable Mylord Vicomte Brouncker, avec la solution qu'il en a donnée, le problème que M. Fermat lui a envoyé. Comme il se peut faire, ainsi que vous le soupçonnez, que cette solution ait été mal exposée à M. Fermat, je crois bon de la reproduire ici, pour l'offrir avec cette lettre à Votre Seigneurie.

Problème de M. Fermat.

Étant donné un nombre quelconque non carré, il y a une infinité de carrés déterminés dont le produit par ce nombre, étant augmenté de l'unité, fait un carré.

Exemple : $3 \times 16 + 1 = 49 = 7 \times 7$.

On demande la règle générale pour trouver les carrés de cette sorte.

Voici deux règles de ce genre : la première est de Mylord Vicomte Brouncker.

Soient n un nombre donné quelconque (carré ou non carré, entier ou fractionnaire); q un autre carré quelconque (entier ou fractionnaire) dont la racine soit r. Soit enfin d la différence entre q et n, à savoir soit $q - n$, soit $n - q$.

Règle : $\frac{4q}{d^2} = \left(\frac{2r}{d}\right)^2$ est un nombre carré, dont le produit par n, étant augmenté de l'unité, fait un carré, $n\frac{4q}{d^2} + 1 = \frac{4qn + d^2}{d^2}$.

En effet :

$$\frac{4qn + d^2}{d^2} = \frac{4qn + q^2 - 2qn + n^2}{q^2 - 2qn + n^2} = \frac{q^2 + 2qn + n^2}{q^2 - 2qn + n^2} = \left(\frac{q+n}{q-n}\right)^2.$$

La seconde règle, qui est de moi, est un peu plus générale quant à la forme du procédé; mais elle revient au même, quant aux nombres à trouver.

Soient n un nombre donné quelconque; a un nombre quelconque arbitrairement choisi; q un carré quelconque et m son quotient par a; p un autre nombre quelconque; enfin d la différence (en valeur absolue) entre $\frac{ma}{4p}$ et pn.

Règle : $\frac{ma}{d^2}$ est un nombre carré dont le produit par n, étant augmenté de l'unité, fait un carré, $n\frac{ma}{d^2} + 1 = \frac{man + d^2}{d^2}$.

En effet :

$$\frac{man + d^2}{d^2} = \frac{\frac{m^2a^2}{16p^2} + \frac{1}{2}man + p^2n^2}{\frac{m^2a^2}{16p^2} - \frac{1}{2}man + p^2n^2} = \left(\frac{\frac{ma}{4p} + pn}{\frac{ma}{4p} - pn}\right)^2.$$

Il y a lieu de remarquer ce que Mylord Vicomte Brouncker a ajouté à sa solution.

Au sujet des deux premières questions de M. Fermat, il a observé que non seulement le nombre 1 y satisfait également, mais aussi (au cas où les fractions seraient admises) le quotient du nombre 1 par la

sixième puissance de tout nombre entier; en effet, ce quotient est à la fois carré et cube et il n'a aucune partie aliquote.

D'autre part, la première question est satisfaite, non seulement par le nombre 343, indiqué par M. Fermat, mais encore par le quotient du même nombre divisé par la sixième puissance de tout entier, par exemple $\frac{343}{64}$. En effet, un nombre fractionnaire n'ayant pas d'autres parties *actuelles* que celles qui sont dénommées comme l'est le tout, le cube ci-dessus $\frac{343}{64}$ n'aura pas d'autres parties aliquotes que $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$, lesquelles, ajoutées au même nombre $\frac{343}{64}$, font $\frac{400}{64}$, nombre carré.

Voilà donc, très illustre Seigneur, le précis de ce qu'avait depuis longtemps répondu à ces problèmes le très honorable Vicomte. Il me reste, si ces remarques importunes doivent vous occasionner quelque dérangement, à implorer humblement pardon pour,

Très illustre Seigneur,
Votre très respectueux et tout dévoué

JOHN WALLIS.

Oxford, $\frac{27 \text{ septembre}}{7 \text{ octobre}}$ 1657.

LETTRE X.

VICOMTE BROUNCKER A JOHN WALLIS.

Clarissime Professeur, j'ai reçu hier les deux lettres ci-incluses, apportées par M. White de la part de Sir Kenelm Digby. Il m'en a montré une troisième, où il était dit que M. Frenicle méprise l'Analyse ou du moins l'estime très peu; qu'il a d'ailleurs résolu une des propositions mentionnées dans les lettres ci-incluses.

C'est, si je ne me trompe, cette même question dont nous avions déjà entendu parler, mais que nous n'avions pas vue, à savoir :

Trouver deux nombres cubes dont la somme soit égale à deux autres nombres cubes.

Voici les solutions de M. Frenicle :

$$1729 = 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3, \qquad 4104 = 9^3 + 15^3 = 2^3 + 16^3,$$
$$13832 = 18^3 + 20^3 = 2^3 + 24^3, \qquad 32832 = 18^3 + 30^3 = 4^3 + 32^3,$$
$$39312 = 15^3 + 33^3 = 2^3 + 34^3, \qquad 40033 = 16^3 + 33^3 = 9^3 + 34^3,$$
$$20683 = 19^3 + 24^3 = 10^3 + 27^3.$$

Mais quant à la dernière partie de la proposition : *Trouver deux nombres cubes dont la somme soit cube,* il n'en est rien dit.

Après avoir lu les lettres ci-jointes, j'ai jugé à propos d'arrêter votre dernière à Sir Kenelm Digby, si toutefois il n'est pas déjà trop tard; j'ai écrit dans ce but à M. White. Je voudrais y substituer une réponse plus complète au problème de M. Fermat, que celui-ci pose maintenant sur les seuls nombres entiers, ce qu'il n'avait pas fait auparavant. Je vous ferai savoir avant peu ce que pense à ce sujet

Votre très fidèle ami et très attaché serviteur

Brouncker.

3/13 octobre 1657.

LETTRE XI

(Incluse dans la précédente, comme l'était aussi la suivante).

Fermat a Kenelm Digby.

De Castres, le 6 juin 1657.

(*Voir* la *Correspondance de Fermat*, n° 83, t. II, p. 341.)

LETTRE XII.

Fermat a Kenelm Digby.

De Castres, le 15 août 1657.

(*Voir* la *Correspondance de Fermat*, n° 84, t. II, p. 342.)

< *P. S.* (1) >. En relisant ma lettre, j'ai trouvé que je devois ajouter un mot sur le sujet de la descente naturelle des graves.

J'ai toujours cru l'opinion de Galilée très probable et très ingénieuse; elle < n'a > point pourtant < de > démonstration, et la nature, qui est mille fois plus subtile que les esprits des hommes, pourroit parvenir à sa fin < par > une infinité de proportions différentes de celle de Galilée et que l'expérience ne pourroit jamais convaincre de fausseté. C'est ce que je me charge de démontrer quand vous voudrez; mais, parce que la voie de Galilée est la plus simple, il est vraisemblable, non démonstrativement, mais probablement, que la nature suit cette sorte de mouvement.

Cette matière a produit des disputes sans fin entre défunt M. Gassendi et un jésuite nommé le Père Cazré, sur ce que ce dernier soutenoit que les vitesses ou vélocités d'un (2) corps qui descend gardent la proportion des espaces parcourus, contre le sentiment de Galilée, qui soutient que cette proposition est si absurde que, si elle étoit vraie, il s'ensuivroit que le mouvement se feroit en un instant.

Galilée ne se contente pas d'en demeurer là, mais il prétend démontrer que, si cette proposition étoit vraie, le mouvement se feroit en un instant. Le Père Cazré assure que Galilée ne l'a point démontré, et M. Gassendi au contraire que < la > démonstration de Galilée est très parfaite, et, sur cette contestation, ces deux grands personnages ont fait de gros volumes, qui lassent la patience des lecteurs.

J'ai tranché tout ce différend en trois ou quatre pages; et premièrement je fais voir que l'opinion du jésuite est fausse, mais que pourtant Galilée n'a point démontré qu'elle produisit comme une conséquence nécessaire ce mouvement instantané, de sorte qu'en cet article le Père Cazré n'a point de tort. Mais enfin, pour les mettre d'accord

(1) Ce *post-scriptum* qui ne figure pas dans la première édition du *Commercium* a été inséré dans la seconde, avec cette note :

[Sequentem appendicem, cum similibus aliquot, ut quae rem hic agitatam non spectabant, in editione prima omisimus, sed hic utcunque reponimus, ne videar quicquam subticere velle].

(2) D'un] des W.

et rendre en même temps office à ces deux grands hommes (Galilée et Gassendi) et donner du secours à la vérité, je démontre, par la voie légitime et selon la manière d'Archimède, que si la proposition du jésuite étoit vraie, le mouvement se feroit en un instant, et qu'ainsi Galilée a eu raison de dire que cette proposition produiroit par conséquence le mouvement instantané, quoiqu'en effet il n'ait pas démontré la vérité de cette conséquence; ce que j'ai fait dans mon écrit, que j'envoyai à feu M. Gassendi pendant sa vie et dont M. Carcavi (que vous trouverez logé à l'hôtel de Liancourt, rue de Seine, au faubourg Saint-Germain) garda la copie (1). Si vous avez la curiosité de la voir, je ne doute pas qu'il vous la communique, dès que vous lui ferez voir ma lettre. Mon écrit finissoit par ces mots : *Hujus itaque unicæ demonstrationis beneficio tot et tanta præclarorum virorum volumina aut refellentur aut inutilia et superflua efficientur.*

LETTRE XIII.

Vicomte Brouncker a John Wallis.

La présente lettre, Clarissime professeur, n'a pour objet que de vous informer que le papier de Fermat ci-inclus m'a été apporté par M. White, hier après-midi, pour que je vous le fasse parvenir; il l'avait oublié en envoyant les autres. Il demande au reste qu'on lui rende et ce papier et les autres. Il me reste à vous prier de continuer votre amitié à

Votre très fidèle et très respectueux,

Brouncker.

6/16 octobre 1657.

(1) Il s'agit du n° 62 de la Correspondance de Fermat. Si l'on rapproche de ce passage la lettre de Gassendi à Monsieur de ***, qui a été reproduite tome II, page 267, note 1, il devient clair que c'est à Carcavi que fut adressée cette lettre, et que si ce dernier communiqua l'original de Fermat à Gassendi, il se le fit remettre. La copie que Gassendi s'en fit faire et sur laquelle la lettre a été publiée en premier lieu existe d'ailleurs dans le manuscrit de la Bibliothèque Nationale, latin nouv. acq. 1637, f° 261. Elle porte, sous forme de note, l'adresse « De la Poterie, chez Monsieur de Montmor », qui est celle d'un commensal et quasi-secrétaire de Gassendi.

Il semble que Fermat n'avait pas conservé de minute et qu'il cite de mémoire (assez inexactement quant à la forme, ce qui se comprend dès lors) la dernière phrase de son écrit.

REMARQUES SUR L'ARITHMÉTIQUE DES INFINIS DU S. J. WALLIS.

(*Voir* la *Correspondance de Fermat*, n° 85, Tome II, page 347.)

LETTRE XIV.

VICOMTE BROUNCKER A JOHN WALLIS.

CLARISSIME PROFESSEUR,

Après avoir reçu la lettre de M. Fermat, que je vous ai récemment adressée, et qui limite aux seuls entiers le problème auparavant proposé, j'y ai quelque peu réfléchi et je trouve que les carrés en nombre infini qu'il demande (ceux dont le produit par un nombre donné non carré, étant augmenté de l'unité, fait un carré) tombent dans une série comme suit :

Savoir $2 \times Q : 2 \times 5\frac{1}{1} \times 5\frac{5}{6} \times 5\frac{29}{35} \times 5\frac{169}{204} \times \ldots,$

de même $8 \times Q : 1 \times 5\frac{1}{1} \times 5\frac{5}{6} \times 5\frac{29}{35} \times 5\frac{169}{204} \times \ldots,$

$18 \times Q : 4 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times \ldots,$

$32 \times Q : 3 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} + 33\frac{1121}{1155} \times \ldots,$

$3 \times Q : 1 \times 3\frac{1}{1} \times 3\frac{3}{4} \times 3\frac{11}{15} \times 3\frac{41}{56} \times \ldots,$

$12 \times Q : 2 \times 13\frac{1}{1} \times 13\frac{13}{14} \times 13\frac{181}{195} \times \ldots,$

$27 \times Q : 5 \times 51\frac{1}{1} \times 51\frac{51}{52} \times \ldots,$

$48 \times Q : 1 \times 13\frac{1}{1} \times 13\frac{13}{14} \times 13\frac{181}{195} \times \ldots,$

$75 \times Q : 3 \times 51\frac{1}{1} \times 51\frac{51}{52} \times \ldots,$

$5 \times Q : 4 \times 17\frac{1}{1} \times 17\frac{17}{18} \times 17\frac{305}{323} \times \ldots.$

$$20 \times Q : 2 \times 17\frac{1}{1} \times 17\frac{17}{18} \times 17\frac{305}{323} \times \ldots,$$

$$80 \times Q : 1 \times 17\frac{1}{1} \times 17\frac{17}{18} \times 17\frac{305}{323} \times \ldots,$$

$$6 \times Q : 2 \times 9\frac{1}{1} \times 9\frac{9}{10} \times 9\frac{89}{99} \times 9\frac{881}{980} \times \ldots,$$

$$24 \times Q : 1 \times 9\frac{1}{1} \times 9\frac{9}{10} \times 9\frac{89}{99} \times 9\frac{881}{980} \times \ldots,$$

$$96 \times Q : 5 \times 97\frac{1}{1} \times \ldots.$$

Dans ces séries, le numérateur de chaque fraction est égal à son dénominateur diminué du dénominateur immédiatement précédent, et le dénominateur est égal au numérateur du terme précédent réduit en fraction impropre.

Si l'on connaît la série correspondant à un nombre quelconque non carré, on peut en déduire la série correspondant au multiple de ce non-carré par un carré quelconque; il suffit de diviser la série trouvée par la racine du carré multiplicateur.

Quant aux deux premiers termes de chaque série, il faut les trouver grâce à notre règle générale $\frac{4q}{d^2}$; j'entends que, toutes les fois que d^2 est une partie aliquote de $4q$, ou d partie aliquote de $2r$, on a un carré entier satisfaisant à la question. Autrement, si l'on substitue $\frac{a^2}{e^2}$ à q ou bien $\frac{a}{e}$ à r et que l'on aie par suite $d = |q - n| = \left|\frac{a^2}{e^2} - n\right|$, c'est toutes les fois que $\left|\frac{a^2}{e^2} - n\right|$ ou d est une partie aliquote du nombre $\frac{2a}{e}$ ou $2r$, ou encore, en multipliant de part et d'autre par e^2, toutes les fois que $|a^2 - ne^2|$ est une partie aliquote de $2ae$.

La question est donc ramenée à trouver un carré dont le produit par le nombre donné non-carré diffère d'un certain autre carré d'une partie aliquote du double produit des racines; ce qu'on pourra chercher par une induction convenablement établie.

Voilà ce qui, sur cette question, se présente pour le moment à l'esprit de,

Clarissime professeur,

Votre très fidèle et très respectueux ami,

Brouncker.

$\frac{\text{22 octobre}}{\text{1}^{\text{er}}\text{ novembre}}$ 1657.

LETTRE XV.

John Wallis a Vicomte Brouncker.

Voici enfin, très illustre Seigneur, ce qu'après mon retour (car vous savez que j'ai été quelque temps absent) j'ai cru, en somme, devoir rédiger comme réponse aux Remarques et aux Lettres de M. Fermat; si Votre Seigneurie le juge à propos, elle pourra le faire parvenir au très illustre Digby, à qui l'écrit est adressé. Ne vous étonnez pas toutefois ou ne regardez pas comme une faute, si j'y ai omis certaines choses qui peuvent paraître au moins aussi ou même plus importantes que certaines autres qui y sont insérées; je l'ai fait, d'une part, pour que la lettre ne fût pas trop volumineuse, de l'autre, parce que j'ai pensé qu'il ne fallait pas tout dévoiler en même temps.

Ainsi j'ai cru devoir taire (pour commencer par ce qui vous appartient) la série des racines, exposée dans votre dernière lettre du 22 octobre, que vous m'écriviez lorsque je me préparais à partir d'ici. Ce n'est point que je la considère aucunement comme négligeable, alors qu'elle est pleine de subtilité, comme le sont toujours vos inventions, et qu'elle est entièrement digne de la sagacité de votre esprit. Mais c'est que je crois qu'il suffit de ce que j'ai mis sans en parler; car le problème ne demande pas tous les carrés, mais seulement des carrés en nombre infini, et je juge qu'il sera peut-être plus avantageux de réserver pour plus tard l'énoncé de cette série.

Il ne faudrait pas d'ailleurs que Fermat pensât qu'en donnant maintenant des carrés en nombre infini, nous croyons que ce sont là tous ceux que l'on puisse donner; je me suis mis en garde de

ce côté, en lui en promettant encore davantage, s'il en demande d'autres.

J'ai jugé bon de taire également les méthodes, soit de vous, soit de moi, pour obtenir par induction le premier carré et sa racine; la partie du problème, relative aux carrés à donner en nombre infini, m'a en effet paru beaucoup plus considérable; d'autre part et surtout je n'ai guère vu de moyen d'exposer clairement ces méthodes, en sorte qu'elles soient facilement comprises par autrui, sans un appareil de mots et d'exemples que cette lettre ne me paraît pas pouvoir comporter. Si Fermat s'arrête là-dessus, nous pourrons faire cette exposition à part [1]. Pour le moment, il suffit de dire en général qu'il faut regarder à ce que d ou $|n-q|$ soit une partie aliquote du nombre $2r$, ou bien $|na^2-c^2|$ partie aliquote du nombre $2ac$. Et, en effet, alors les carrés que donnent nos règles seront entiers.

Quant au centre de gravité et à ce que réclame Fermat de moi à ce sujet [2], vous verrez qu'il manque beaucoup de choses que je vous ai déjà exposées là-dessus. Ainsi vous trouverez une proposition que je vous avais énoncée sous une forme plus générale, limitée ici plus particulièrement, de façon à satisfaire seulement à ce qui était demandé, à savoir le centre de gravité des *hyperboles infinies* de Fermat (pour employer son langage) dans la situation même qu'il leur a donnée.

J'ai omis ce qui concerne le centre de gravité dans les paraboles et les paraboloïdes [3] de tout genre (qu'il ne demande pas); de même dans les hyperboles sous une autre situation; de même dans les semi-paraboles, semi-paraboloïdes et semi-hyperboles (infinies) de même genre.

Je l'ai fait pour ne pas trop m'étendre dans un exposé dépassant ce qui était demandé; d'un autre côté, j'ai préféré énoncer tout d'abord ces questions à Fermat sous forme de problèmes; car elles ne me paraissent nullement inférieures à ses demandes.

(1) *Voir* ci-après la Lettre XVII.

(2) Tome II, page 343 (Lettre XII du *Commercium*).

(3) Wallis entend par *paraboloïdes* les paraboles de degré supérieur.

Au reste tout cela est, en tout cas, laissé à votre jugement, et si vous croyez qu'il faille ajouter ou changer quelque chose, ce sera fait par,

Très illustre Seigneur,

Votre très humble serviteur, toujours prêt à vous obéir,

J. Wallis.

Oxford, $\frac{21 \text{ novembre}}{1^{\text{er}} \text{ octobre}}$ 1657.

LETTRE XVI,

incluse dans la précédente.

John Wallis a Kenelm Digby.

Très noble Seigneur,

Depuis que je vous ai envoyé ma dernière lettre du mois de septembre (1), le très honorable Lord Brouncker m'a communiqué ses solutions des problèmes de Fermat. Après les avoir vues, j'ai été amplement confirmé dans l'opinion que j'ai émise en ma lettre précédente. Quoi qu'il en soit de l'écrit qui aurait été mal traduit à Fermat, comme vous l'avez dit, écrit que je n'ai jamais vu et dont je ne puis aucunement juger, ces solutions sont telles, à mon avis, qu'elles répondent très exactement aux demandes. J'ai donc cru devoir vous les adresser aussitôt, après les avoir mises en latin, afin que désormais une mauvaise interprétation ne puisse tromper personne; je vous ai ainsi fait, le même mois, l'envoi d'une seconde lettre (2), mais je l'ai fait revenir, ayant reçu dans l'intervalle les lettres de Fermat, et désirant répondre à ce qui s'y trouve indiqué à nouveau.

C'est donc dans le mois suivant, en octobre, que j'ai reçu, de la part de votre Seigneurie, les deux lettres que lui a écrites M. Fermat en date du 6 juin et du 15 août, puis quelques jours après ses *Remarques*

(1) Lettre VII.
(2) Lettre IX.

sur mon *Arithmétique des Infinis;* nouveaux bienfaits dont vous me comblez sans cesse. Mais il ne me reste aucun espoir d'échapper aux liens de la reconnaissance, qui me tient enchaîné à vous; je n'ai plus d'autre refuge que votre clémence; je n'ai, comme unique ressource, que de la supplier d'accepter mes très humbles remercîments pour tant de faveurs, et de me continuer, malgré mon indignité, l'affection que vous voulez bien me montrer. Puis, sans vous arrêter à de trop longs préambules, je me mettrai aussitôt à répondre à ces lettres, après vous avoir cependant demandé excuse si mon importun bavardage interrompt vos sérieuses occupations.

La première lettre de Fermat se plaint de la difficulté de saisir ce qu'a voulu dire le très honorable Vicomte dans sa solution des problèmes; la faute en est attribuée à une mauvaise traduction de l'anglais.

Pour éviter de nouvelles plaintes de ce genre, j'ai cru devoir employer, en m'adressant à vous, la langue latine, qui n'a pas besoin de traduction : je l'ai fait d'ailleurs pour le cas où vous jugeriez à propos de communiquer cette lettre elle-même.

Mais Fermat ajoute qu'autant qu'il peut en juger au travers des nuages de cette obscure traduction, le très honorable Lord n'aurait nullement satisfait à sa question. Je crois précisément le contraire, et, à moins que Fermat n'ait pas bien encore compris ces solutions, je ne vois pas sur quoi il pourrait, soit en douter, soit le dissimuler.

Le premier problème était double.

Trouver un cube (p. 311, lignes 21 à 27) ..... *fasse un cube.*

J'ai répondu sur ce problème que le nombre 1 satisfait aux deux questions; il est, en effet, à la fois carré et cube, et il n'a pas de parties aliquotes.

Lord Vicomte Brouncker a ajouté à cette solution qu'on pouvait également satisfaire aux deux questions (dans le cas où les fractions seraient admises), au moyen du quotient du nombre 1 par la sixième puissance de tout nombre entier; d'autre part, que la première des

deux questions seulement pouvait aussi être résolue au moyen du quotient de 343 par un semblable diviseur, par exemple $\frac{343}{64}$.

En effet, un nombre fractionnaire n'ayant pas d'autres parties *actuelles* que celles qui sont dénommées comme l'est le tout, le cube ci-dessus $\frac{343}{64}$ n'aura pas d'autres parties aliquotes que $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$, lesquelles, ajoutées au même nombre $\frac{343}{64}$, font $\frac{400}{64}$, carré de $\frac{20}{8}$.

A la vérité, Fermat s'explique maintenant en disant qu'il ne sera satisfait que par un nombre entier. Mais, même ainsi, on ne peut nier qu'il ne lui ait été donné satisfaction. Car, en dehors du nombre 343 énoncé dans le problème, il n'en demande qu'*un seul autre*, et il ne promet d'en donner lui-même qu'*un seul autre*. (*Je demande un autre, etc.; et s'il répond qu'en entiers il n'y a que le seul nombre* 343, *je vous promets de le désabuser en lui en exhibant un autre*) (¹). Or nous avons donné un entier satisfaisant au problème, à savoir le nombre 1.

Si je n'en donne pas d'autres, ce n'est pas que j'estime qu'il n'en existe point; mais c'est qu'il n'en demande pas davantage et que je ne juge pas l'affaire de telle conséquence (car à quoi bon?) qu'elle soit digne d'une recherche minutieuse, et encore moins que l'Angleterre tout entière, avec les Gaules Celtique et Belgique, qu'il provoque toutes ensemble, se livrent exclusivement à cette étude. La question n'est pas plus importante, du moins à mon sens, que celle que je pourrais poser avec une pareille ostentation, en donnant deux nombres carrés, 16 et 25, qui font la même somme, si à chacun d'eux on ajoute ses parties aliquotes :

$$16+8+4+2+1=31=25+5+1,$$

et en demandant deux autres carrés jouissant de la même propriété. Fermat peut, s'il le veut, s'attaquer à ce problème, ou, s'il le préfère, le négliger; mais je n'y attache pas une telle importance que je l'en juge plus habile, s'il réussit, ou moins, dans le cas contraire.

(¹) Lettre de Fermat à Digby du 6 juin 1657. Tome II, page 342, ligne 3 à 7.

L'autre problème était ainsi conçu :

Étant donné un nombre (page 312, ligne 3 en rem., à page 313, ligne 7) ..... *qui peut être donné.*

Lord Vicomte Brouncker a fait usage d'une règle de ce genre, qu'il a munie de sa démonstration.

Soient n un nombre (page 418, lignes 3 à 10) ..... $= \left(\frac{q+n}{q-n}\right)^2$.

J'ai voulu en ajouter une autre de mon crû, un peu plus générale quant au mode de procéder, mais revenant au même, pour le fond. Elle est également munie de sa démonstration.

Soient n un nombre donné (page 418, lignes 14 à 20) .....

En effet,

$$\frac{man + d^2}{d^2} = \frac{man + \frac{m^2}{16p^2}a^2 - \frac{1}{2}man + p^2n^2}{\frac{m^2}{16p^2}a^2 - \frac{1}{2}man + p^2n^2}$$

$$= \frac{\frac{m^2}{16p^2}a^2 + \frac{1}{2}man + p^2n^2}{\frac{m^2}{16p^2}a^2 - \frac{1}{2}man + p^2n^2} = \left(\frac{\frac{ma}{4p} + pn}{\frac{ma}{4p} - pn}\right)^2.$$

Fermat peut choisir de ces deux règles celle qu'il lui plaira; il est clair qu'elle répondra à la question proposée. S'il en désire davantage, nous lui en promettons autant qu'il en voudra, mais elles coïncideront avec les deux ci-dessus, qui fournissent, en effet, non seulement des carrés en nombre infini, mais tous les carrés possibles qui jouissent de la propriété demandée.

On doit d'ailleurs lui faire remarquer que la limitation, que le nombre donné ne soit pas carré, est superflue, dans les termes où la question est posée. Car la règle s'applique aussi bien aux nombres carrés qu'aux non carrés.

Enfin il n'y aurait pas plus de difficulté s'il avait dit, en général, *en ajoutant un nombre carré quelconque*, et non pas *en ajoutant l'unité*. Il ne resterait, en effet, qu'une simple opération à faire, qui serait

de multiplier, par ce carré à ajouter, le nombre carré donné par les règles précédentes.

Ainsi soit b^2 le carré à ajouter.

Avec la première règle, au lieu de $\frac{4q}{d^2}$, il faut prendre $\frac{4b^2q}{d^2}$.

Avec la seconde, au lieu de $\frac{ma}{d^2}$, il faut prendre $\frac{mab^2}{d^2}$.

On a, en effet, de la sorte, d'une part $\frac{4qnb^2}{d^2}+b^2$, de l'autre $\frac{manb^2}{d^2}+b^2$, nombres carrés.

Voilà ce que je vous avais écrit dans cette lettre dont je vous ai parlé, mais que j'ai cru devoir faire revenir, en raison des nouvelles indications que Fermat donne seulement aujourd'hui. Il y a, en effet, lieu de compléter quelque peu ce qui précède, eu égard à la nouvelle limitation requise, dont il n'était nullement fait mention dans l'énoncé antérieur.

Fermat dit maintenant qu'il a voulu parler des seuls carrés entiers, non des fractionnaires; qu'en fractions, les solutions sont si faciles qu'elles peuvent être fournies *a quolibet de trivio arithmetico* (1).

En tout cas c'est déjà quelque chose que votre très noble correspondant reconnaisse enfin que la question qu'il avait posée est de celles que peut facilement résoudre *quilibet de trivio arithmeticus;* il n'y a guère qu'il en jugeait tout autrement et pensait même qu'elle n'avait pas été résolue par le très honorable Vicomte, parce que celui-ci ne l'avait pas trouvée difficile (2). Cependant on pourrait peut-être se demander si Fermat lui-même, pour ne pas parler de *quilibet de trivio arithmeticus,* avant l'énoncé de nos règles, en connaissait une générale, donnant non seulement des carrés en nombre infini, mais tous les carrés possibles, tant entiers que fractionnaires; s'il pouvait démontrer que cette règle était telle.

(1) « Par le premier venu des calculateurs de la rue. »

(2) Il est singulier que Wallis oppose entre elles, comme successives, deux déclarations de Fermat contenues dans la même lettre du 6 juin 1657 (*Pièce* n° 83 de la *Correspondance*).

Mais je ne sais si nous ne pourrions nous plaindre avec quelque raison de ne pas avoir été loyalement traités. Qu'il s'agît d'entiers, il n'en était pas soufflé mot dans l'énoncé de la question; rien ne nous pouvait faire deviner que nous avions à la comprendre ainsi. Dans le long préambule mis en tête, Fermat cite Diophante et égale au moins, s'il ne les préfère, ses questions arithmétiques aux problèmes géométriques des autres; il se donne comme imitant Diophante dans la question qu'il propose. Mais partout, chez Diophante, comme nombres carrés on entend indifféremment les entiers et les fractionnaires. Qui donc, même après avoir regardé Diophante plus ou moins rapidement, pouvait soupçonner ou bien qu'il n'y a pas de carrés, à part les entiers, ou bien qu'une question ainsi proposée devait être entendue des seuls entiers? Nous avons donc résolu la question proposée au sens de ses termes, tout à fait comme ils devaient être compris, et ce n'est pas notre faute, si, quand Fermat entendait les seuls entiers, il s'est exprimé autrement ([1]).

Mais puisqu'il propose maintenant sur les entiers cette question qu'il avait auparavant proposée simplement sur les carrés; en d'autres termes, puisque, cette question étant résolue, il en pose une nouvelle, nous voulons bien le suivre encore sur ce terrain. Nous allons donc aborder ce

Nouveau problème : Faire la même chose pour les nombres entiers.

Nous remarquons d'abord que la question ainsi limitée est moins générale qu'auparavant, et il est immédiatement clair qu'il faut, ainsi que le fait Fermat, la restreindre au moins à des nombres donnés non carrés.

Si en effet, d'une part n, de l'autre $\frac{4q}{d^2}$, sont des nombres carrés entiers, $\frac{4qn}{d^2}$ sera aussi un carré entier, et comme $\frac{4qn}{d^2}+1$ doit être

([1]) Wallis semble de fait avoir à peine regardé le préambule du second défi (*Pièce* n° 81 de la *Correspondance*). Dans le deuxième alinéa, en effet, Fermat pose très clairement la question comme concernant les nombres entiers et comme différant en cela des problèmes conservés de Diophante.

carré, on aurait deux nombres carrés entiers qui ne différeraient que de l'unité, ce qu'on sait être absolument impossible.

Dans le cas où la chose est possible, nos règles donnent non pas les *seuls*, mais cependant *tous* les carrés entiers. Elles donnent en effet tous les carrés demandés possibles, tant entiers que fractionnaires. Pour ne pas paraître parler au hasard, je vais le démontrer.

Soit f^2 un carré quelconque satisfaisant à la condition proposée; on aura nf^2+1 égal à un carré, soit l^2.

Prenons maintenant $r=\frac{l\mp 1}{f}$, je dis que f^2 sera $\frac{4q}{d^2}$, que donne la règle ci-dessus exposée. On a en effet : $q=r^2=\frac{l^2\mp 2l+1}{f^2}$. Mais $nf^2+1=l^2$. Donc $l^2-1=nf^2$ et $n=\frac{l^2-1}{f^2}$. Par conséquent,

$$d=|q-n|=\left|\frac{l^2\mp 2l+1}{f^2}-\frac{l^2-1}{f^2}\right|=\frac{2l\mp 2}{f^2}$$

et par suite, comme $2r=\frac{2l\mp 2}{f}$,

$$\frac{2l\mp 2}{f}:\frac{2l\mp 2}{f^2}=f=\frac{2r}{d},\qquad \text{ou bien}\qquad f^2=\frac{4q}{d^2}.$$

Ainsi la règle précitée fournit le carré f^2, c'est-à-dire un carré quelconque satisfaisant à la condition proposée.

(La démonstration se ferait de même, *mutatis mutandis*, pour l'autre règle.)

La règle précitée fournit donc une infinité de nombres carrés satisfaisant à la condition proposée et d'ailleurs, dans le cas où la chose est possible (c'est-à-dire si le nombre donné est non-carré), une infinité de carrés entiers.

Il faut, de plus, que $\frac{4q}{d^2}=f^2$ soit entier et il faut fournir une infinité de tels carrés.

Pour cela, parmi le nombre infini que donne la règle, on choisira arbitrairement un carré entier quelconque, satisfaisant à la condition

proposée, et qu'on peut d'ailleurs trouver de toute autre façon ; grâce à ce seul carré, on en fournira une infinité d'autres, comme suit :

Soit f^2, par exemple, ce carré ; par conséquent $nf^2 + 1 = l^2$.

$2fl$ sera la racine d'un autre carré satisfaisant à la condition proposée. De la même manière, connaissant ce second carré, on trouvera la racine d'un troisième carré, puis d'un quatrième, d'un cinquième, etc., à l'infini.

Exemple : Le nombre 3, multiplié par le carré 1, si l'on ajoute l'unité, fait un carré.

$$3 \times 1 + 1 = 4.$$

Le double produit de 1 et 2, racines des carrés 1 et 4, est $2 \times 1 \times 2 = 4$, qui sera racine du nouveau carré 16 satisfaisant à la condition proposée.

Et comme $$3 \times 16 + 1 = 49,$$

$2 \times 4 \times 7 = 56$ sera racine d'un nouveau carré 3136 satisfaisant également à la condition.

Comme d'autre part $$3 \times 3136 + 1 = 9409, \quad \text{carré de } 97,$$

$2 \times 56 \times 97 = 10864$ sera encore la racine d'un nouveau carré satisfaisant à la condition.

Et ainsi de suite. On aura donc une infinité de carrés entiers satisfaisant à la condition.

Je n'ignore pas d'ailleurs qu'en dehors de ces carrés on en peut encore trouver d'autres ; par exemple

$$3 \times 225 + 1 = 676 = 26^2,$$

et autres que nous pouvons également fournir en nombre infini. Ainsi tous ne peuvent pas être immédiatement induits de la sorte d'un seul ; mais on ne demandait pas cela ; car il n'a pas été proposé de fournir *tous* les carrés entiers satisfaisant à la condition, mais d'en fournir *en nombre infini*, ce que nous avons fait.

Fermat voudra-t-il changer encore les termes de sa question pour la

proposer sous une troisième forme? demandera-t-il que les carrés entiers satisfaisant à la condition soient fournis, non pas seulement en nombre infini, mais absolument tous? Cela, nous pouvons également le faire.

Qu'il en soit d'ailleurs ainsi que je l'ai dit, pour ne pas parler vainement, je vais le démontrer.

Il a déjà été prouvé que $\frac{4q}{d^2}$ satisfait à la condition; reste donc à faire que $\frac{4q}{d^2} = f^2$ soit un nombre entier, par suite que sa racine $\frac{2r}{d} = f$ soit un nombre entier, ou autrement, que $d = |n - q|$ soit une partie aliquote du nombre $2r$.

Or il peut se faire que $2r$, et dès lors $4q$, ne soit pas entier; substituons donc à q, $\frac{a^2}{e^2}$, et à r, $\frac{a}{e}$. Nous aurons

$$f = \frac{2r}{|q - n|} = \frac{2\frac{a}{e}}{\left|\frac{a^2}{e^2} - n\right|} = \frac{2ae}{|a^2 - ne^2|}.$$

Ainsi, f sera un nombre entier toutes les fois que $|a^2 - ne^2|$ sera une partie aliquote du nombre $2ae$; en d'autres termes, toutes les fois que la différence entre un carré et le produit d'un autre carré par le nombre donné sera partie aliquote du double produit des racines de ces carrés.

Or ceci peut arriver de mille manières différentes, mais a évidemment toujours lieu en particulier, si cette différence est 1 ou 2; car 1 est partie aliquote de tout nombre entier, et 2 l'est du nombre $2ae$.

C'est ce qui arrive évidemment dans notre cas. Puisqu'en effet, suivant la condition exigée, $nf^2 + 1 = l^2$, la différence $l^2 - nf^2$ sera 1; si donc par cette différence on divise $2fl$, le quotient sera le nombre entier $2fl$, et ce sera par suite un nouveau nombre f satisfaisant à la condition. Et ainsi de suite indéfiniment. C. Q. F. D.

Je crois superflu d'en dire plus long sur cette question, quoique j'aurais beaucoup de choses prêtes à ajouter; mais je crains déjà de m'être trop étendu.

Une autre question proposée par Fermat [1] n'est parvenue que tardivement entre mes mains. L'énoncé en est :

Trouver deux nombres cubes dont la somme soit égale à celle de deux autres nombres cubes.

Il me suffira d'en dire quelques mots. Elle a été, à ce que j'apprends, résolue de diverses façons par M. Frenicle; j'ai vu quelques-uns de ses nombres; Fermat les ayant déjà reçus, il est inutile que je les répète. J'en ajouterai d'autres qui viennent d'ici.

$$3^3+36^3=27^3+30^3,$$
$$1^3+8^3=\left(4\frac{1}{2}\right)^3+\left(7\frac{1}{2}\right)^3,$$
$$6^3+10^3=\left(1\frac{1}{3}\right)^3+\left(10\frac{2}{3}\right)^3,$$
$$1^3+17^3=\left(7\frac{1}{2}\right)^3+\left(16\frac{1}{2}\right)^3,$$
$$5^3+11^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(11\frac{1}{3}\right)^3,$$
$$\left(4\frac{1}{2}\right)^3+17^3=8^3+\left(16\frac{1}{2}\right)^3,$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(5\frac{1}{3}\right)^3=3^3+5^3,$$
$$8^3+64^3=36^3+60^3,$$
$$6^3+48^3=27^3+45^3,$$
$$3^3+\left(11\frac{1}{3}\right)^3=11^3+\left(5\frac{1}{3}\right)^3$$
$$10^3+80^3=45^3+75^3,$$
$$5^3+40^3=\left(22\frac{1}{2}\right)^3+\left(37\frac{1}{2}\right)^3,$$
$$32^3+66^3=18^3+68^3,$$
$$20^3+54^3=38^3+48^3,$$
$$30^3+66^3=4^3+68^3,$$
$$60^3+132^3=8^3+136^3,$$
$$4^3+48^3=36^3+40^3,$$
$$8^3+\left(6\frac{1}{3}\right)^3=\left(3\frac{1}{3}\right)^3+9^3,$$
$$30^3+81^3=57^3+72^3,$$
$$48^3+99^3=27^3+102^3,$$
$$5^3+60^3=45^3+50^3,$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3+6^3=\left(4\frac{1}{2}\right)^3+5^3.$$

Si ces nombres ne suffisent pas, j'en fournirai autant qu'il le voudra; et cela si facilement qu'en une heure de temps j'en promettrais bien cent, entiers ou fractionnaires, à son gré. Ce que j'ajoute pour qu'il ne dise pas encore qu'il ne veut que des nombres entiers, alors que l'énoncé de la question ne fait nullement mention d'entiers.

Après avoir résolu ces questions, et si du moins votre très noble

[1] *Voir* ci-avant la Lettre X du *Commercium*, page 419. — Wallis se contente ici de donner des nombres proportionnels à ceux de cette Lettre, calculés par Frenicle, sur le vu de la question de Fermat (Lettre du 15 août 1657, n° 84 de la *Correspondance*, 7).

correspondant trouve qu'il ait désormais suffisamment éprouvé nos forces, je voudrais le prier de ne pas trouver mauvais et de ne pas, non plus, attribuer à quelque épuisement de notre vigueur là-dessus, que nous ne nous montrions pas à l'avenir très préoccupés de résoudre des questions de ce genre. Il semble les aimer singulièrement, mais j'avoue (à dire ce qui en est) que, pour mon compte du moins, elles n'ont pas un attrait si puissant que je sois porté à leur consacrer beaucoup de temps ou de travail, et que je ne les estime pas assez importantes, pour que, négligeant les autres recherches en Géométrie, qui me plaisent davantage, je me détourne vers ces spéculations sur les nombres. Qu'il ne croie pas toutefois qu'en parlant ainsi je veuille en rien diminuer la juste gloire que mérite son habileté dans la poursuite de ces mêmes spéculations; je voudrais plutôt l'exhorter, s'il trouve dans ces matières quelque secret intéressant pour l'avancement général de la Science, à le publier ouvertement dans un Traité méthodique. Mais ce que je veux faire comprendre est seulement ceci que, ne pouvant m'occuper également de tous les sujets, je m'attache de préférence à ceux qui me séduisent davantage et me semblent avoir une utilité, tandis que je laisserai aux autres ce qui peut leur plaire au contraire plus qu'à moi; ainsi les uns et les autres pourront jouir chacun de son domaine.

Ce sera ma réponse aux nouvelles questions qu'il propose maintenant (¹), par exemple :

Partager un nombre cube en deux cubes rationels;

Et partager un nombre, somme de deux cubes, en deux autres cubes rationels.

Si le très honorable Vicomte Brouncker veut s'y essayer (et, s'il essaye, je ne doute pas qu'il n'obtienne un heureux succès, en tant du moins que la nature de la chose peut le permettre) ou si quelque autre a le même désir, je ne veux aucunement l'en détourner; mais moi du moins, je n'en ai ni le temps, ni l'intention.

(¹) Lettre du 15 août 1657, n° 84 de la *Correspondance*, 4 et 8, ci-avant, p. 343.

Il ne m'a certes pas été désagréable, sur le désir exprimé par votre très noble correspondant, d'engager une, deux fois la lutte avec lui et de descendre dans son arène; mais cet illustre savant n'attend pas, sans doute, que je continue toujours le même exercice, et que, comme si je n'avais rien autre chose à faire, j'aborde sans cesse de nouvelles questions, perpétuellement renaissantes.

J'en dis autant pour ses récentes propositions négatives, que : en dehors de 25, il n'y a aucun autre nombre carré entier qui, augmenté de 2, fasse un cube; ni, en dehors de 4 et 121, aucun qui, augmenté de 4, fasse un cube. Si cela est vrai ou non, je ne m'en soucie pas extrêmement, alors que je ne vois pas quelle grande conséquence peut en dépendre. Je ne m'appliquerai donc pas à le rechercher. En tout cas, je ne vois point pourquoi il en fait montre comme de choses d'une hardiesse étonnante et qui doivent stupéfier soit M. Frenicle, soit aussi les Anglais; car de telles déterminations négatives sont très fréquentes et nous sont familières. Les siennes n'avancent rien de mieux ou de plus fort que si je disais :

Il n'y a pas (en entiers) de *cubocube* (j'entends une sixième puissance) ou même de carré qui, ajouté à 62, fasse un carré.

Ou : En dehors de 4, il n'y a aucun carré qui, ajouté au nombre 12, fasse un bicarré.

Ou : En dehors de 16, il n'y a pas de bicarré qui, ajouté à 9, fasse un carré.

Ou : Il n'y a pas en entiers de cubes dont la différence soit 20, ni, à part 8 et 27, dont la différence soit 19.

Ou : Il n'y a pas de bicarrés entiers dont la différence soit 100, pas plus (pour le dire en une fois) qu'aucun autre nombre pair, à moins qu'il ne soit divisible par 16.

Il est facile d'imaginer d'innombrables déterminations négatives de la sorte.

Pour ce qui concerne mon *Arithmétique des Infinis*, dont il parle dans la même lettre, il avoue que les propositions que j'ai découvertes sont les mêmes que les siennes; sauf donc que je n'ai pas parlé du

centre de gravité, remarque sur laquelle je reviendrai tout à l'heure, j'aurais ainsi produit ce que, dans la première lettre que j'ai vue de lui [1], il vantait comme miracles de la Géométrie. Il n'y a en effet rien de ce qu'il indiquait dans cette lettre que l'on ne puisse voir dans mon Traité, comme je l'ai montré en citant les endroits.

Mais, à ce qu'il semble, il regrette (reproche que je n'aurais jamais présumé devoir être dirigé contre moi) que la méthode dont je me sers ne soit pas celle qui prouve seulement la vérité des découvertes par démonstrations *apagogiques* ou réductions à l'impossible (comme elles sont fréquentes chez Archimède et comme il convient d'en user si l'on veut moins se faire comprendre qu'admirer du lecteur); que ce soit au contraire cette méthode qui montre en même temps la marche des recherches.

S'il me rappelle l'exemple d'Archimède, exemple qui, à vrai dire, m'eût suffisamment justifié, si j'avais voulu employer la même méthode de démonstration, je ne crois pourtant pas que votre savant correspondant ignore que les hommes les plus sérieux et les plus doctes regrettent précisément, et sont bien près de considérer comme un défaut, qu'Archimède ait caché de la sorte les traces de ses procédés de recherche, comme s'il avait voulu par jalousie priver la postérité des moyens de découvertes, tout en voulant lui arracher l'aveu de ce qu'il avait trouvé. Mais Archimède n'a pas été le seul; la plupart des anciens ont tellement dérobé aux yeux de la postérité leur Analytique (car il est hors de doute qu'ils en avaient une) qu'il a été plus facile pour les modernes d'en inventer une nouvelle de toutes pièces (ce qui a été fait dans le dernier siècle et dans celui-ci) que de retrouver les traces de l'ancienne.

J'aurais certes plutôt attendu des remerciments qu'une accusation, pour avoir indiqué ouvertement et loyalement non seulement où j'étais

[1] Dans la Lettre du 20 avril 1657 (n° 82 de la *Correspondance*, T. II, p. 339), Fermat n'applique précisément cette expression de *miracles* qu'aux propositions relatives aux centres de gravité des aires comprises entre les hyperboles et leurs asymptotes. Il est d'ailleurs le premier à dire que ses énoncés sur la quadrature des mêmes aires peuvent se tirer de l'Ouvrage de Wallis.

arrivé, mais encore quelle route j'avais suivie; pour ne pas avoir été rompre le pont sur lequel j'avais passé le fleuve; d'autres peuvent le faire, mais on s'en plaint assez.

Votre très noble correspondant avance encore que certaines de mes propositions peuvent être démontrées par la méthode d'Archimède. Je n'en doute nullement; j'ai même indiqué plusieurs fois (*Arithm. Infin.*, pag. 38, 83 et ailleurs) qu'il était facile de le faire; mais j'ai dit aussi pourquoi je ne l'avais pas fait moi-même; il n'a donc pas sujet de s'enquérir des raisons du choix de ma méthode, quand je les ai indiquées dans le cours de mon Ouvrage.

Il n'y a guère, je crois, personne, je ne parle pas des arithméticiens *de trivio,* mais aucun géomètre un peu exercé (à plus forte raison quelqu'un de tel que lui) qui ne puisse facilement, sur mes démonstrations, en forger d'*apagogiques* et semblables à celles d'Archimède. Aussi, pour sa promesse de le faire lui-même, je n'ai certes pas à dédaigner son travail là-dessus, mais aucune nécessité ne l'oblige à se charger d'une telle entreprise, alors que ce qu'il annonce devoir faire a déjà été précisément accompli par Cavalieri, dans son Traité *De l'usage des indivisibles dans les puissances cossiques* (1). Cependant, s'il veut apporter son suffrage, je n'ai pas à le récuser.

Si enfin il repousse comme une forme de preuve illégitime l'induction, qui a été suffisamment employée tant par les Anciens que par les Modernes, plus souvent peut-être qu'il pourrait le penser de prime abord; s'il veut même écarter l'emploi des notes algébriques, partout répandues aujourd'hui, je n'ai certes pas à être aucunement préoccupé de rédiger une apologie sur ce chef. J'ai agi dans mon droit, suivant la voie qui me plaisait; il a de même le plein droit d'en suivre une autre, s'il le préfère; mais je ne doute pas que ce qu'il blâme, d'autres le loueront.

Il reste encore un point que je dois prendre surtout à cœur; j'ai, à propos du centre de gravité, à dégager ma parole et à détruire l'accu-

(1) *De usu eorundem indivisibilium in potestatibus cossicis* est le titre de la quatrième des six *Exercitationes geometricæ* publiées par Cavalieri en 1647.

sation de fausseté qu'à la vérité votre très subtil correspondant ne porte pas vraiment contre moi, mais qu'il semble réserver dans ses doutes.

J'avais dit, dans ma lettre du 6 juin, que les mêmes principes dont je me sers dans l'*Arithmétique des Infinis* permettent de déterminer sans difficulté le centre de gravité tant des paraboles de tout genre, que de la plupart des autres figures, planes ou solides; que, toutefois, pour ne pas me perdre dans des digressions, j'avais à dessein omis toute cette spéculation sur le centre de gravité. A cela votre très noble correspondant réplique qu'il n'en sera pas persuadé, et qu'il désire dès lors (comme si j'avais particulièrement énoncé ce point) que je détermine les centres de gravité dans les hyperboles infinies, en distinguant celles qui en ont d'avec celles qui n'en ont pas. Il demande qu'au moins j'envoie la proposition générale, même sans démonstration. Sinon, il laisse penser qu'il me regardera comme ne connaissant nullement une chose que pourtant, d'après lui, j'aurais avancé connaître; enfin il n'enverra pas auparavant ses spéculations qu'il a promises depuis longtemps, de peur sans doute que je n'y trouve quelque chose que je ne sache pas déjà.

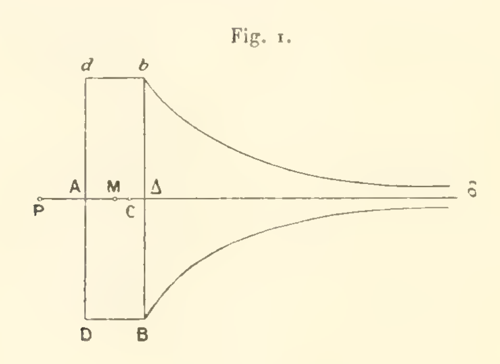
Je ferai donc ce que demande votre très noble correspondant, tant pour ne pas paraître accusé justement de mauvaise foi, que pour qu'il voie que ce qu'il considère comme des merveilles, dont il se croit peut-être le seul possesseur, m'appartient en fait également. Bien plus, ce qu'il ne demande pas, j'ajouterai, suivant mon habitude, et la méthode de recherche et la démonstration; il verra ainsi qu'elles procèdent directement de l'art d'invention que j'ai exposé. Je ne suis pas pour moi si jaloux de mes découvertes que je ne les communique pas aux autres, et je ne serai nullement fâché si le très savant Fermat y apprend quelque chose qu'il n'aurait pas remarquée. Je le laisse d'ailleurs libre de faire ou non connaître les spéculations auxquelles il fait allusion et ses procédés de démonstration; je ne réclamerai pas l'exécution de sa promesse, s'il la regrette.

Ses *hyperboles infinies* ne sont autres que les figures construites sui-

vant les séries que j'appelle *réciproques*, et dont j'ai enseigné la quadrature prop. 102, 103, 104, 105 *Arithm. Infin.*; j'ai déjà montré cette identité et il la reconnaît lui-même.

Soit donc, par rapport à la droite infinie $A\Delta\delta$ (*fig.* 1), une figure de ce genre répétée, de part et d'autre, de telle manière qu'il y ait con-

Fig. 1.



gruence entre $A\delta BD$ et $A\delta bd$, par exemple. La figure double ainsi formée est celle que Fermat appelle *hyperbole infinie* (¹) et dont il demande le centre de gravité.

Comme les droites parallèles à $A\delta$ (en dessous et au-dessus) forment une série réciproque, dont par conséquent l'indice est négatif, soit $-p$; comme, d'autre part, les moitiés sont proportionnelles aux lignes entières, et que par conséquent les milieux de ces droites, ou leurs centres de gravité, doivent être regardés comme suspendus à la balance $A\delta$ à des distances du point A (supposé le centre de la balance) proportionnelles aux grandeurs des droites elles-mêmes; les moments, dont la raison est composée de celle des grandeurs et de celle des distances, formeront une série ayant pour indice $-2p$.

Ainsi la figure totale est au parallélogramme inscrit Db, comme 1 est à $-p+1$, et la somme des moments de l'une est à la somme des moments de l'autre, comme 1 à $-2p+1$. Mais le centre de gravité du

(¹) Fermat ne s'est pas en réalité exprimé d'une façon si impropre : mais la figure de Wallis n'en répond pas moins à celle du Tome II, page 338. — Le nombre p de Wallis est l'exposant de y dans l'équation $y^p x = A$ de l'hyperbole $b\delta$ rapportée aux axes $A\delta$ (des x) et Ad (des y). D'autre part sa *figure totale* comprend le rectangle $DBbd$.

parallélogramme est, comme on sait, en son point milieu; le parallélogramme Db doit donc être regardé comme suspendu en M, milieu de AΔ, dont la distance à A est $AM = \frac{1}{2} A\Delta$.

Mais le poids de la figure totale, dans sa position ([1]), étant au poids du parallélogramme, dans sa position, comme 1 à $1 - 2p$, si l'on prend sur l'autre bras de la balance, la droite AP étant à AM comme 1 à $1 - 2p$, le parallélogramme suspendu en P fera équilibre à la figure totale suspendue comme auparavant. D'autre part, la grandeur de la figure totale étant à celle du parallélogramme comme 1 à $1 - p$, si l'on fait $\frac{1}{1-p} = \frac{AP}{AC}$, C étant sur l'autre bras que P, et les distances étant réciproquement proportionnelles aux grandeurs, ce point C sera le centre de gravité de la figure infinie, si toutefois il y en a un.

Mais, dans le cours de l'opération, on a dû prendre $\frac{1}{1-2p} = \frac{AP}{AM}$; il est donc clair que, pour qu'il y ait un point P, il faut que l'on ait

$$2p < 1 \quad \text{ou} \quad p < \frac{1}{2}.$$

Autrement $1 - 2p$ serait nul ou moins que rien, et dès lors il n'y aurait nulle part ni point P, ni point C.

Ainsi nous avons trouvé, pour toutes les hyperboles infinies de Fermat, qui en ont, le centre de gravité, et nous avons distingué celles qui en ont d'avec celles qui n'en ont point. Ce qui était demandé.

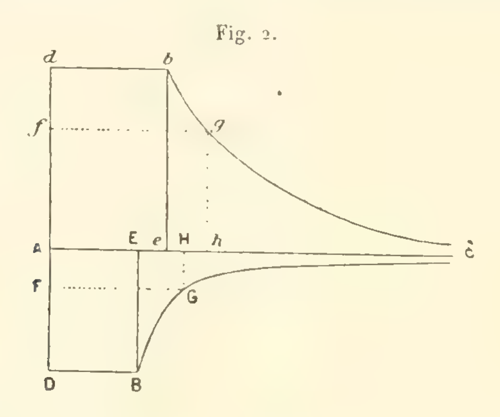
J'ajouterais bien davantage sur le centre de gravité, tant de ces figures, que d'autres formées de différentes façons; n'était que Fermat borne là sa demande, et que je dois me souvenir que j'écris une lettre, non un volume.

Mais, si jusqu'à présent je me suis conformé à ses ordres, je lui demanderai en retour de traiter la même question sur ses hyperboles, dans le cas où les courbes, de part et d'autre de l'axe, ne seraient pas des hyperboles de même espèce, et cela en général.

([1]) C'est-à-dire le moment par rapport à A.

Par exemple : Que, dans la figure A∂BD (*fig.* 2), infinie au sens de Fermat, on inscrive autant de parallélogrammes AG que l'on voudra :

Fig. 2.



de même, dans la figure A∂*bd*, autant de parallélogrammes A*g* que l'on voudra ; mais que d'un côté on ait

$$\overline{FG}^3 \times GH = \overline{BD}^3 \times BE,$$

et de l'autre

$$\overline{fg}^5 \times \overline{gh}^2 = \overline{bd}^5 \times \overline{be}^2.$$

On demande de trouver le centre de gravité de la figure totale, si toutefois il en a un, et de déterminer, en général, quelles figures de ce genre en ont un et lesquelles n'en ont pas.

S'il avoue qu'il ne le peut faire, je m'engage à donner la réponse.

Enfin, et après ses autres lettres, j'ai reçu à part du même Fermat quatre *Remarques* sur mon *Arithmétique des Infinis*. Je pourrais sans inconvénient les passer sous silence, si votre illustre correspondant ne pouvait penser que je le dédaigne ; en tout cas, je suis porté à croire qu'il a écrit ces Remarques à la hâte et sans grande réflexion, que peut-être même, s'il a lu aujourd'hui le reste de l'Ouvrage, il préférerait ne pas les avoir faites ; tant on y reconnaît mal la pénétration d'un si grand homme, tant tout y est ἀπροσδιόνυσα (1).

I. Dans l'Épître, en tête de l'*Arithmétique des Infinis*, j'expose l'his-

(1) Ne touchant pas à la question dont il s'agit. — Les *Remarques* en question forment la pièce n° 85 de la *Correspondance de Fermat*.

toire de mes recherches et notamment comment j'ai appliqué à mon sujet la Méthode des Indivisibles de Cavalieri. En effet, de même que :

La raison de la somme de tous les cercles dont se compose (au sens de Cavalieri) le conoïde parabolique à la somme d'autant de cercles du cylindre est la raison du conoïde lui-même au cylindre; et que la raison des sommes respectives de tous les diamètres de ces cercles est la raison de la parabole au parallélogramme; raisons qui sont connues l'une et l'autre;

Que la raison de la somme de tous les cercles dans le cône à celle de tous les cercles dans le cylindre est la raison du cône au cylindre, et que la raison des sommes respectives des diamètres de ces cercles est la raison du triangle au parallélogramme; raisons qui sont encore connues l'une et l'autre;

De même, la raison de la somme de tous les cercles dans la sphère à la somme de tous les cercles dans le cylindre est la raison de la sphère au cylindre, et la raison des sommes respectives des diamètres de ces cercles est la raison du cercle au parallélogramme; ce que Fermat d'ailleurs ne nie aucunement.

Mais ici la première raison est connue depuis longtemps, la seconde ne l'est pas. J'ai donc dit que je me proposais de chercher si par quelque moyen je pourrais, en partant de celle qui est connue, arriver à celle qui est inconnue jusqu'à présent.

Fermat réplique : « Mais elle ne peut être connue, à moins de connaître la quadrature du cercle. » Ce qui est parfaitement juste; carrer le cercle c'est précisément trouver cette raison, et du moment où je me proposais de la chercher, je me proposais de chercher la quadrature du cercle. Au reste, je l'ai dit là-même en propres termes.

II. J'avais dit, après avoir indiqué la formation de la série des nombres

$$1, \quad 6, \quad 30, \quad 140, \quad 630, \quad \ldots,$$

que je cherchais quel terme moyen devait être intercalé entre 1 et 6.

Il répond que le moyen géométriquement proportionnel ne satisfait pas à la question, comme n'ayant pas correspondance avec les autres

termes de la progression. Ce qui est juste, puisque la série exposée n'est pas formée de termes en proportion géométrique ; le moyen terme cherché ne peut donc être un moyen géométriquement proportionnel.

Mais quand il infère, de ce que le moyen géométriquement proportionnel ne convient pas, qu'aucun autre ne peut convenir, il n'y a pas même là une ombre de raison ; pas plus que s'il avait avancé la même chose sur la série

$$1,\quad 6,\quad 11,\quad 16,\quad \ldots.$$

Personne n'ignore qu'entre 1 et 6 on doit intercaler le moyen terme $3\frac{1}{2}$, non pas comme moyen géométriquement proportionnel, mais comme le moyen que comporte la série d'après sa nature, c'est-à-dire le moyen arithmétiquement proportionnel.

De même, dans la série des nombres triangulaires

$$1,\quad 6,\quad 15,\quad \ldots,$$

si quelqu'un affirmait qu'entre 1 et 6 il ne peut y avoir de moyen terme comporté par la série, par ce motif que ni le moyen arithmétique, soit $3\frac{1}{2}$, ni le moyen géométrique, soit $\sqrt{6}$, ne conviennent, il est certain qu'il se mécompterait puisqu'il y a un terme intermédiaire, le nombre triangulaire 3 que comporte la série ; de même qu'entre 6 et 15 on doit intercaler 10.

Si maintenant dans la série

$$1,\quad 3,\quad 6,\quad 10,\quad 15,\quad \ldots$$

on demande quel terme intermédiaire convient entre 1 et 3, j'ai montré, page 175, que c'est $1\frac{7}{8}$.

Mais, comme l'interpolation dans de pareilles séries revient très fréquemment dans tout le Livre, surtout depuis le scholie de la proposition 165 jusqu'à la fin ; comme c'est, en fait, l'objet principal de tout l'Ouvrage, il eût été impossible, s'il l'avait lu entièrement et

qu'il eût tant soit peu réfléchi, qu'il pensât que je voulais parler de moyen géométrique proportionnel.

Au reste, j'ai entrepris, entre autres, l'interpolation de cette même série

$$1, \quad 6, \quad 30, \quad 140, \quad \ldots,$$

et j'ai montré, proposition 167, que le terme moyen à intercaler entre 1 et 6 est 2□; ce que signifie ce symbole, je l'ai complètement expliqué sur la proposition 191 ([1]).

III. J'avais dirigé la recherche dans le premier lemme (prop. 1) de telle sorte qu'elle fût conforme à la marche à suivre dans les autres lemmes semblables, mais plus compliqués, des propositions 19, 39, 43, etc., et qu'ainsi elle pût les éclairer.

Fermat montre, par une longue discussion, qu'il est capable de donner une autre démonstration. Je n'en aurais douté en aucun cas; car qui donc, même arithméticien *de trivio* (à plus forte raison un tel homme) peut ne pas savoir prendre la somme d'une progression arithmétique? Je ne pense pas qu'il se figure que je serais dans ce cas; je le renverrais à la *Prop.* 2 *Con. Sect.* et à la proposition 45 du Chapitre XXVII de ma *Mathesis Universalis*.

Je dois faire remarquer à votre très subtil correspondant que, dans l'endroit dont il s'agit, je ne m'occupe pas de démontrer la proposition que j'ai énoncée, mais du moyen de découvrir la chose demandée, comme si elle était inconnue; je veux, par cet exemple de recherche dans une question facile, préparer à des recherches semblables dans des questions plus difficiles.

S'il avait voulu que sa remarque portât, il aurait dû montrer qu'il n'y avait pas là une méthode légitime de chercher une chose inconnue; il ne l'a point fait; il avoue même qu'elle est utile pour chercher des choses cachées, toutefois avec les précautions nécessaires. Mais il ne niera pas, je pense, que la quadrature du cercle, que je cherchais

([1]) Le symbole □ de Wallis signifie le rapport du carré du diamètre à la circonférence : *voir*, Tome II, la note de la page 348.

entre autres, ne soit chose assez cachée; il n'indique nullement, d'autre part, que j'aie employé cette méthode avec assez peu de précaution pour commettre une erreur; je ne vois donc pas à quel titre il peut justement blâmer ma méthode de recherche.

Voulait-il qu'après avoir légitimement découvert la chose, je la confirmasse *a posteriori* par des démonstrations apagogiques? J'ai suffisamment dit pourquoi je ne le faisais pas, tant à la proposition 2, *Con. Sect.* qu'à la proposition 43, *Arith. Infin.* et ailleurs. C'est que je n'en sentais pas le besoin, et je ne le sens pas encore.

IV. Enfin, lorsque, sur la proposition 2, il indique que la restriction serait faite à tort, votre clarissime Correspondant se trompe absolument sur le sens de ce que j'ai dit; il n'a pas assez fait attention à mes paroles.

J'ai affirmé cette proposition dans toute sa généralité, et je crois l'avoir démontrée généralement, en tant que besoin était; en tous cas, elle ressort de la recherche précédente. Oui, il est universellement vrai, et je l'ai universellement affirmé, qu'une somme de termes arithmétiquement proportionnels, commençant à 0 (série qui sera toujours comme 0, 1, 2, 3, ...) quel que soit le second terme, sera toujours, comme 1 est à 2, à la somme d'autant de termes égaux au plus grand. Et cela est vrai sans aucune restriction.

Mais j'avais ajouté, à titre d'explication ou, si l'on veut, comme corollaire :

Si l'on pose a pour le nombre des termes, l pour le dernier, quel que soit le second, la somme de tous les termes sera $\frac{1}{2}al$, c'est-à-dire la moitié du nombre des termes $\left(\frac{1}{2}a\right)$ multipliée par le dernier terme (l).

Cela est encore affirmé sans restriction. Mais j'ajoutais :

Si d'ailleurs le second terme est 1 (et autrement, il n'en serait pas de même), le nombre des termes sera $l+1$, c'est-à-dire supérieur d'une unité au dernier terme. Dès lors la somme des termes sera $\frac{l+1}{2}l$; car dans ce cas $\frac{l+1}{2}$ vaudra autant que $\frac{1}{2}a$, la moitié du

nombre des termes, laquelle, multipliée par l, le dernier terme, doit donner la somme totale.

Or que dans ce cas, le seul que j'aie énoncé sous restriction, il faille bien en faire une, votre très savant Correspondant ne peut le nier. S'il est vrai que, par exemple, dans la progression

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4,$$

dont le second terme est 1, le nombre des termes est $l+1$, c'est-à-dire $4+1=5$, dans une autre, dont le second terme ne soit pas 1, comme

$$0, \quad 2, \quad 4, \quad 6, \quad 8,$$

le nombre des termes n'est pas $l+1$, c'est-à-dire $8+1$, mais bien $\frac{8}{2}+1=5$.

Or mes expressions ne peuvent avoir aucun autre sens, et on ne peut les interpréter autrement sans leur faire une violence excessive. Car, après avoir affirmé en général qu'*une somme de termes arithmétiquement proportionnels et commençant à* 0 *est à la somme d'autant de termes égaux au plus grand comme* 1 *est à* 2, j'ai immédiatement ajouté en toutes lettres : *A savoir, si le premier terme est* 0, *le second* 1 (*car autrement la conclusion devrait être modifiée*), *et si le dernier est* l, *la somme sera* $\frac{l+1}{2}l$ (*car, en ce cas, le nombre des termes sera* $l+1$); *ou autrement* (*en posant* a *pour le nombre des termes, quelle que soit d'ailleurs la valeur du second*) $\frac{1}{2}al$.

Cela est dit si clairement qu'il est étonnant que quelqu'un, pourvu qu'il y fasse suffisamment attention, puisse le mal comprendre. On ne peut donc qu'attribuer à la précipitation qui l'a entraîné, que votre illustre Correspondant ait pu se méprendre sur ce que je voulais dire, alors qu'il a d'ordinaire une telle pénétration et une telle finesse d'esprit.

Voilà ce que je pense devoir dire sur ces Remarques, pour ne pas paraître les mépriser. Mais si Fermat a depuis trouvé assez de loisir pour examiner à nouveau ces questions et pour y réfléchir un peu

plus attentivement, je ne doute pas qu'il n'ait déjà de lui-même trouvé satisfaction.

Votre très noble Correspondant a pris plaisir à provoquer en champ clos (on peut le voir dans ses lettres), non pas un ou deux mathématiciens du commun, mais et l'Angleterre tout entière, et la Belgique et le reste de la Gaule, sauf la Narbonnaise; il ne trouvera dès lors pas mauvais, je crois, que nous lui rendions la pareille; et cela, non pas sur une bagatelle, mais sur une question où personne ne puisse nier que le nœud ne soit digne d'une telle main, ni, s'il le dénoue, que la chose en valait la peine. Je ne veux donc pas parler de la question par laquelle j'ai répliqué à sa première et qui est de même nature; ce n'est pas un sujet qui me semble mériter une anxieuse application. Je ne pense pas davantage à la question du tronc de cône; comme je l'ai dit alors, je ne l'ai pas proposée comme difficile, mais comme élégante. Pas davantage à celle qu'il a rappelée dans sa lettre, à savoir :

Étant donnée la série des nombres

$$1, \quad 6, \quad 30, \quad 140, \quad 630, \quad \text{etc.},$$

trouver entre 1 *et* 6 *le terme intermédiaire que comporte la série.*

Cependant c'était là, à le proposer pour la première fois, un problème suffisamment ardu, puisque même encore votre très noble Correspondant le considère comme insoluble. Mais puisque j'en ai déjà donné la solution dans un livre publié par moi, je n'ai pas à le proposer de nouveau.

Toutefois j'en choisirai un tout semblable; à savoir :

Étant donnée la série des nombres

$$1, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{31}{30}, \quad \frac{209}{140}, \quad \frac{1471}{630}, \quad \frac{10625}{2772}, \quad \text{etc.},$$

trouver entre 1 *et* $\frac{5}{6}$ *le terme intermédiaire que comporte la série.*

Qu'il ne pense pas là-dessus, comme il semble l'avoir fait pour l'autre série, que je demande une moyenne géométrique pas plus

qu'une moyenne arithmétique; je ne lui demande pas de tant s'appliquer pour trouver $\frac{11}{12}$ ou $\sqrt{\frac{5}{6}}$; il s'agit d'un terme convenant à la nature de la série et ayant correspondance avec tout l'ensemble. Il ne lui suffira pas non plus de dire que ni la moyenne géométrique, ni la moyenne arithmétique ne conviennent à la série; car on ne demande pas quel terme ne convient point, mais quel est celui qui convient.

Qu'il ne croie pas non plus que je lui propose cela comme plaisanterie, et que ce soit une bagatelle; s'il résout légitimement cette question, je promets en retour un enjeu assez précieux, la quadrature de l'hyperbole. Et si la Gaule Narbonnaise ne le peut, ce sera fourni à quelque jour par l'Angleterre, grâce à la faveur divine.

Mais il y a déjà trop longtemps que j'ennuie votre Seigneurie, et que, rendu trop audacieux par votre clémence, j'enfreins les lois de l'urbanité; et cela à tel point que je ne pourrais, sans une faute nouvelle, implorer le pardon de celle que j'ai commise. Mais du moins il me reste l'espoir que, dans votre insigne complaisance, vous daignerez interpréter avec assez de bienveillance ce que j'ai pu mal faire, pour que je ne sache pas trouver auprès de vous un meilleur avocat que vous-même, un meilleur défenseur, soit de moi, soit de notre nation. C'est dans cet espoir que j'ose encore, m'appuyant sur votre faveur, me dire,

Très insigne Seigneur,

Votre très obéissant et très respectueux,

J. Wallis.

Oxford, $\frac{\text{21 novembre}}{\text{1}^{\text{er}}\text{ décembre}}$ 1657.

J'ai cru à propos d'ajouter ici, pour que la question tout entière soit plus complètement exposée au lecteur, ce qui a été indiqué ci-dessus comme omis ou changé dans la lettre précédente, au sujet du centre de gravité (*voir* page 441, ligne 4, à page 444, ligne 11 : suit une première rédaction).

Fermat exige de moi que je fournisse le centre de gravité dans toutes les hyperboles infinies qui peuvent en avoir un, et que je dis-

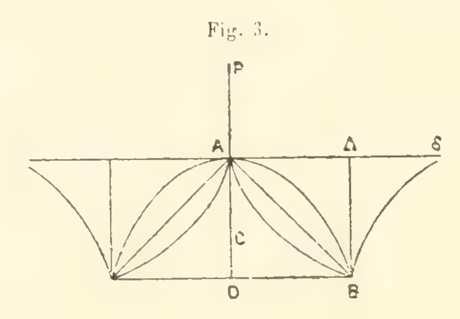
tingue celles qui en ont d'avec celles qui n'en ont pas. Il désire qu'au moins j'envoie la proposition générale, même sans démonstration.

Je ferai ce que demande votre très noble Correspondant, et même, ce qu'il ne demande pas, j'ajouterai la démonstration; il verra ainsi qu'elle procède directement de l'art d'invention que j'ai exposé.

Voici la proposition :

Si à l'axe AD (*fig.* 3), dont le sommet est A, se trouve rapportée (des deux côtés), une figure soit plane, soit solide, dont les ordon-

Fig. 3.



nées (soit des droites, soit des surfaces planes semblables) forment une série de termes soit égaux, soit suivant les premières, secondes, troisièmes, etc. puissances, soit suivant les sous-secondes, sous-troisièmes, etc., soit quelque autre série formée de tels termes combinés entre eux comme on voudra, soit enfin une série *réciproque* de l'une quelconque des précédentes (ce qui comprend ce qu'il appelle *hyperboles infinies*); que l'on divise l'axe AD au point C, en sorte que $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CA}}$ soit égal au rapport de l'unité à l'indice de la série augmenté de l'unité; C sera le centre de gravité de la figure.

Si la série est telle que l'axe puisse être divisé de la sorte, la figure aura un centre de gravité; autrement, non.

Pour que l'axe puisse être ainsi divisé, il faut que l'indice de la série soit plus grand que -1; autrement non.

Suit la démonstration :

Supposons d'abord que le point A du sommet soit au centre de suspension de la balance, et que l'axe AD soit dirigé suivant les bras de cette balance.

Soit p l'indice de la série suivant laquelle procèdent les ordonnées (droites ou surfaces planes); cette série sera donc, comme 1 à $p+1$, à la série des termes égaux correspondants, en partant de A.

Il est clair, d'autre part, que leurs distances au sommet, donc au centre de la balance, sont proportionnelles aux abscisses (ou plutôt sont ces abscisses même); c'est donc une série de termes de la première puissance, dont l'indice est 1.

Or la raison des moments entre eux est composée de la raison des grandeurs et de celle de leurs distances au centre de la balance. La série des moments, composée dès lors des deux séries correspondantes, aura donc pour indice $p+1$, qui est la somme des indices des séries composantes.

Par conséquent, la somme de tous les moments (c'est-à-dire le poids de la figure entière ainsi suspendue) sera à la somme d'autant de moments égaux au dernier (c'est-à-dire à la figure correspondante formée de termes égaux, et suspendue en D) dans le rapport $\frac{1}{p+2}$.

Si donc, sur l'autre bras de la balance, on prend le point P en sorte que $\frac{AP}{AD} = \frac{1}{p+2}$, et qu'on y suspende cette figure correspondante formée de termes égaux, elle fera équilibre à la figure proposée, suspendue comme auparavant, et le centre de gravité des deux poids ainsi suspendus sera le point A.

Si donc on supprime le poids suspendu en P et qu'on prenne C, en sorte que $\frac{1}{p+1} = \frac{AP}{AC}$ (c'est-à-dire les distances dans le rapport inverse des grandeurs), ce point sera le centre de gravité du second poids.

Mais $AP = \frac{1}{p+2}AD$; donc $AC = \frac{p+1}{1}AP = \frac{p+1}{p+2}AD$; dès lors $CD = \frac{1}{p+2}AD$ et $\frac{AC}{CD} = \frac{p+1}{1}$. C. Q. F. D.

Si maintenant p est -1 ou < -1 (comme -2, -3, etc.), $p+1$ (c'est-à-dire alors $-1+1$, $-2+1$, $-3+1$, etc.) sera soit 0, soit moins que 0; il n'aurait donc aucun rapport avec l'unité.

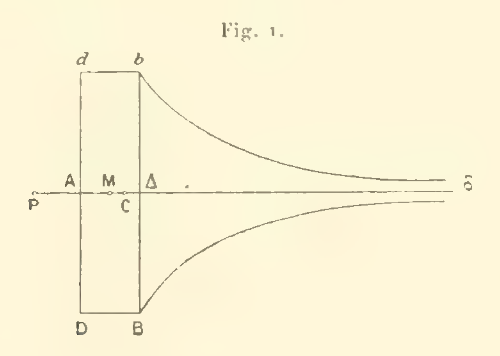
D'où ressort la distinction.

Fermat dira peut-être : « De cette manière on trouve bien le centre de gravité (entre autres) des mêmes figures que j'appelle *hyperboles infinies*, mais non pas dans la même situation. » En effet, il ne les suppose pas prolongées à l'infini des deux côtés du diamètre limité AD, mais des deux côtés du diamètre infini Aδ; or c'est dans cette position qu'il demande le centre de gravité.

J'avoue que cela est vrai; mais je réponds que ma spéculation n'est pas moins curieuse que l'autre, et si je ne me trompe, elle est nouvelle; je ne sache pas du moins que Fermat ou quelque autre l'ait déjà, je ne dis pas atteinte, mais seulement entreprise. Au reste, afin qu'il ne se plaigne pas que je ne lui aie point donné satisfaction, puisqu'il demandait le centre de gravité dans une autre situation, je ne refuserai pas de m'astreindre à lui répondre, même sur ce point.

Les droites parallèles à A$\Delta\delta$ (*fig.* 1) (tant dessous que dessus) forment une série réciproque d'une directe dont l'indice sera p, par

Fig. 1.



exemple. Cette série réciproque aura donc pour indice $-p$. Comme d'autre part les moitiés sont proportionnelles aux entiers, les moitiés de ces droites parallèles formeront de même une série d'indice $-p$; et par conséquent les milieux de ces droites ou leurs centres de gravité devront être regardés comme suspendus à la balance Aδ à des distances du centre de la balance A, proportionnelles aux grandeurs des droites elles-mêmes. Donc les moments, dont la raison est composée de celle des grandeurs et de celle des distances au centre de la balance,

seront eux-mêmes en raison double des grandeurs; ils formeront donc une série réciproque d'indice $-2p$.

Ainsi la figure totale sera au parallélogramme inscrit comme 1 à $-p+1$; et la somme des moments de l'une sera à la somme des moments de l'autre (dans cette situation) comme 1 à $-2p+1$. Mais le centre de gravité du parallélogramme est, comme on sait, en son point milieu, le parallélogramme inscrit doit donc être regardé comme suspendu au milieu de $A\Delta$, soit en M, dont la distance au centre de la balance est $AM = \frac{1}{2} A\Delta$.

Mais le poids de la figure totale, dans sa position, étant au poids du parallélogramme inscrit, dans sa position, comme 1 à $-2p+1$, si l'on prend sur l'autre bras de la balance, au delà du centre A, la droite AP qui soit à AM comme 1 à $-2p+1$, le parallélogramme suspendu en P fera équilibre à la figure totale suspendue comme auparavant. D'autre part, la grandeur de la figure totale étant à celle du parallélogramme comme 1 à $-p+1$, si l'on fait $\frac{1}{-p+1} = \frac{AP}{AC}$, C étant pris sur l'autre bras que P, et les distances étant réciproquement proportionnelles aux grandeurs, ce point C sera le centre de gravité de la figure proposée.

Mais $AP = \frac{1}{-2p+1} AM$ et $AC = \frac{-p+1}{1} AP = \frac{-p+1}{-2p+1} AM$. Par conséquent,

$$\frac{1-2p}{1-p} = \frac{AM}{AC}.$$

Il faut donc que $1 > 2p$ ou $p < \frac{1}{2}$, autrement $1-2p$ serait nul, ou même moins que rien.

Je dis donc (*seconde proposition*) que :

Si de part et d'autre de l'axe infini $A\delta$, dont le sommet est A, se trouve une figure plane, telle que, par rapport à l'axe conjugué DAd, limité de part et d'autre et également prolongé à partir de son milieu A, les ordonnées forment une série réciproque quelconque (dont l'indice sera, en tout cas, négatif), — c'est là ce que Fermat appelle

hyperboles infinies. — si l'on prend un point C, tel que le rapport du double de l'indice de la série plus l'unité au même indice, plus l'unité, soit celui de AM (distance du sommet au point milieu du parallélogramme inscrit) à AC (pris du même côté sur l'axe $A\delta$), ce point C sera le centre de gravité de la figure, si toutefois elle en a un. Or elle en aura un si l'indice de la série est supérieur à $-\frac{1}{2}$, autrement, non.

On peut remarquer au reste que le même mode de raisonner s'appliquerait absolument, même si les deux semi-hyperboles $DA\delta$, $dA\delta$, au lieu d'être disposées des deux côtés de la droite $A\delta$, de façon à produire une figure hyperbolique infinie en pointe, comme ici, étaient situées de part et d'autre de la droite DB, mise en coïncidence avec *db*, de façon à produire une figure avec creux. Au lieu de chercher, comme tout à l'heure, le point C sur la droite $A\delta$, on le chercherait de la même manière, mais sur la droite DB prolongée.

On arriverait encore au même résultat pour une figure composée de deux semi-paraboles ou semi-paraboloïdes, semblables et semblablement placées, soit de façon à être tangentes à $A\delta$ au sommet commun, soit à avoir DB comme base commune. On aura, en effet, toujours $\frac{2p+1}{p-1}$ égal soit à $\frac{AM}{AC}$, soit à $\frac{DM}{DC}$.

De la sorte il est surabondamment donné satisfaction aux demandes de Fermat; mais il eût été facile, en partant des mêmes principes, de déterminer le centre de gravité, non seulement dans les paraboles ou paraboloïdes entières, mais aussi dans les semi-paraboles et semi-paraboloïdes; bien plus, dans la moitié des figures de l'espèce que Fermat appelle *hyperboles infinies;* ce à quoi je ne sais s'il a jamais pensé.

J'entends la figure formée par les droites AD, DB limitées, $A\delta$ infinie, et une seule courbe. En effet, ayant trouvé les points C, tant sur la droite AD que sur la droite $A\delta$, si l'on en mène des parallèles à AD et à $A\delta$, leur point de rencontre sera le centre de gravité de cette figure.

D'où l'on conclura facilement de même, si besoin est, le centre de

gravité dans une figure formée de semi-paraboles de ce genre ou semi-hyperboles infinies, mais dissemblables.

Ce qui vient d'être montré au sujet des hyperboles planes de ce genre peut être étendu également (*mutatis mutandis*) aux figures solides formées, lorsque les ordonnées sont des surfaces planes semblables parallèles et rapportées à des parallèles soit à AD, soit à Aδ. Mais je dois me souvenir qu'en ce moment j'écris une lettre et non pas un Traité complet.

LETTRE XVII.

JOHN WALLIS A VICOMTE BROUNCKER.

Très illustre Seigneur, puisque vous le demandez (et je ne puis qu'obéir à de tels commandements de votre part), je vais formuler, aussi brièvement que possible, la méthode de rechercher les nombres requis pour la solution du problème de Fermat, telle que nous l'avons pratiquée jusqu'à présent; j'indiquerai en même temps et le fondement de cette méthode et, là où il conviendra, les divers abrégés des opérations, puisque, autrement, la recherche peut tourner en longueur.

Le problème demande que : *étant donné un nombre quelconque non carré, soit n, on trouve un nombre carré, soit a^2, tel que son produit par le nombre donné, étant augmenté de l'unité, fasse un carré, soit*

$$na^2 + 1 = l^2.$$

De plus, il faut fournir une infinité de carrés tels que a^2, quel que soit le nombre non carré n qui soit proposé.

Alors qu'il n'était nullement question de nombres entiers, nous avions déjà résolu ce problème en fournissant tous les possibles, tant entiers que fractionnaires. M. Fermat a ajouté après coup qu'il ne voulait que des entiers; ainsi il a demandé qu'on fournisse une infinité de carrés entiers satisfaisant à la condition. C'était changer complètement le problème primitivement proposé en un autre d'une tout autre

nature. Néanmoins, j'ai cru devoir admettre ce changement et aborder la question en nombres entiers. Voici le résultat :

J'ai jugé devoir partir de la règle générale précédemment énoncée. A savoir, si nous appelons n un nombre donné quelconque (carré ou non carré, entier ou fractionnaire); q un carré quelconque; d sa différence avec n; $\frac{4q}{d^2}$ sera un carré requis. Nous avons déjà démontré antérieurement que non seulement cette règle est vraie et donne une infinité de carrés satisfaisant à la condition, mais encore qu'elle donne absolument tous les possibles tant entiers que fractionnaires.

Cela posé, pour la nouvelle condition ajoutée, il suffit de faire que $\frac{4q}{d^2}$, et par conséquent sa racine $\frac{2R}{d}$, soit un nombre entier, ou autrement que d soit une partie aliquote du nombre $2R$. Toutes les fois, en effet, qu'il en est ainsi, le carré fourni par la règle est évidemment un nombre entier.

Or, ayant un entier de ce genre, une méthode sûre en donne aussitôt une infinité d'autres, pour ne pas dire tous; ce qui sera exposé plus loin. Cependant, comme il peut se faire, ce qu'il ne faut pas dissimuler, que $2R$ soit un nombre fractionnaire, même quand $\frac{2R}{d}$ est entier, nous poserons

$$R = \frac{s}{r} \qquad \text{et, par conséquent,} \qquad q = \frac{s^2}{r^2},$$

et aussi

$$d = |q - n| = \left|\frac{s^2}{r^2} - n\right|.$$

Ainsi ce sera la même chose de diviser soit $2R$ par d, soit $\frac{2s}{r}$ par $\left|n - \frac{s^2}{r^2}\right|$, ou, en multipliant de part et d'autre par r^2, $2sr$ par $|nr^2 - s^2|$.

Par conséquent, si, d'une manière quelconque, on trouve, entre le produit du nombre n proposé par un carré quelconque et un autre carré, une différence qui soit une partie aliquote du double produit des racines de ces deux carrés (c'est-à-dire si $|nr^2 - s^2|$ est partie aliquote du nombre $2sr$), le quotient de ce double produit par cette différence donne un nombre entier, racine du carré cherché.

Vous direz : Mais comment trouver ce carré dont il faut partir, et qui, multiplié par n, doit différer d'un autre carré d'une partie aliquote de ce double rectangle? C'est ce que je vais exposer maintenant à ma façon.

L'entier n proposé étant non carré, soit le carré entier immédiatement supérieur

$$c^2 = n + b.$$

Si l'on multiplie le nombre n par un carré quelconque, soit a^2, on aura

$$na^2 = c^2a^2 - ba^2 = (ca)^2 - b.a^2.$$

C'est-à-dire que le nombre donné n, multiplié par le carré du nombre a, donne pour produit le carré du même nombre a pris autant de fois qu'il y a d'unités dans la racine du carré immédiatement supérieur au nombre donné, moins le carré de ce même nombre a, après sa multiplication par la différence b entre le nombre donné et le carré immédiatement supérieur.

Par exemple, soient : $n = 7$ et, par suite,

$$c = 3 = \sqrt{9} \qquad \text{et} \qquad b = c^2 - n = 2.$$

Quel que soit maintenant le nombre pris pour a, on aura

$$na^2 = c^2a^2 - ba^2 = (ca)^2 - b.a^2,$$

c'est-à-dire

$$7a^2 = (3a)^2 - 2a^2.$$

Si nous prenons dès lors, pour a, les nombres successifs : 1, 2, 3, 4, etc., on aura un Tableau comme celui ci-contre, où il est clair que les nombres a du premier membre : 1, 2, 3, 4, etc., étant en progression arithmétique, les nombres ca du second membre : 3, 6, 9, 12, suivront également une progression arithmétique, dont la raison constante sera $c = 3$, et enfin les nombres ba^2 qui viennent en troisième ligne, 2, 8, 18, 32, etc. (multiples égaux de nombres carrés consécutifs), auront des différences suivant une progression arithmétique dont

la raison sera $2b$:

$$n.a^2 = (ca)^2 - b.a^2$$

$$\begin{array}{llll} 7.1^2 = & 3^2 & - 2 & \\ & & & 6 \\ 7.2^2 = & 6^2 & - 8 & \\ & & & 10 \\ 7.3^2 = & 9^2 & - 18 & \\ & & & 14 \\ 7.4^2 = & 12^2 & - 32 & \\ & & & 18 \\ 7.5^2 = & 15^2 & - 50 & \end{array}$$

. . . .

En effet, on sait que les carrés consécutifs se forment par l'addition continue des nombres impairs $1 + 3 + 5 + 7$, etc.

$$1 = 1,$$
$$4 = 1 + 3,$$
$$9 = 1 + 3 + 5,$$
$$16 = 1 + 3 + 5 + 7,$$

. . . .

Par suite, leurs différences croissent suivant une progression arithmétique de raison 2; dès lors leurs équimultiples auront des différences croissant suivant une progression arithmétique dont la raison sera l'équimultiple de 2. On a, en effet, évidemment

$$1b = 1b,$$
$$4b = 1b + 3b,$$
$$9b = 1b + 3b + 5b,$$

. . . .

De ce fondement dépendent toutes les relations qui suivent pour les progressions arithmétiques, et il sera inutile de le répéter davantage par la suite.

Cela posé, si $b = 1$, il est clair que le nombre $a = 1$ est un des carrés cherchés; car alors

$$na^2 = c^2a^2 - ba^2 = c^2 - 1;$$

C'est ce qui arrive pour les nombres 3, 8, 15, etc., inférieurs d'une unité à un carré.

Si maintenant b est supérieur à l'unité, il est clair que ba^2 l'est également, et qu'on chercherait vainement le nombre 1 dans la colonne correspondante des nombres à retrancher (quoique, ainsi qu'on le dira plus loin, il puisse s'y trouver parfois un nombre qui y conduise).

Il faudra donc passer à une seconde colonne et de là à une troisième, une quatrième, etc., suivant les exigences de la question, jusqu'à ce que l'on trouve enfin le nombre 1 dans quelque colonne, ou du moins un autre nombre qui y conduise, comme je l'expliquerai plus loin.

Or on passera à une colonne suivante, dès que, dans la colonne considérée, le nombre à retrancher sera égal ou supérieur au double de la racine du carré adjacent. Alors on prendra la racine immédiatement inférieure, et l'on diminuera le nombre à retrancher de la somme des deux racines :

$$\begin{array}{lllllll}
7.1^2 = & 3^2 - 2 & & & & & \\
 & \quad 6 & & & & & \\
7.2^2 = & 6^2 - 8 & & & & & \\
 & \quad 10 & & & & & \\
7.3^2 = & 9^2 - 18 & = & 8^2 - 1 & & & \\
 & \quad 14 & & \quad 8 & & & \\
7.4^2 = & 12^2 - 32 & = & 11^2 - 9 & & & \\
 & \quad 18 & & \quad 12 & & & \\
7.5^2 = & 15^2 - 50 & = & 14^2 - 21 & & & \\
 & & & \quad 16 & & & \\
7.6^2 = & \ldots\ldots & = & 17^2 - 37 & = & 16^2 - 4, & \\
 & & & & & \quad 14 & \\
7.7^2 = & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & = & 19^2 - 18 & \\
 & & & & & \quad 18 & \\
\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots &
\end{array}$$

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, relatif au nombre 7, on trouve à la troisième ligne

$$7.3^2 = 9^2 - 18.$$

Or 18 est double de la racine de l'adjacent 9; par suite dans la co-

lonne suivante, à $9^2 - 18$, je substitue $8^2 - 1$, et je rencontre immédiatement, comme nombre à retrancher, 1 que je cherche. Dès lors, le carré du nombre 3 est un des carrés cherchés; et, en effet,

$$7.3^2 = 7 \times 9 = 63 = 8^2 - 1.$$

Si je continue dans la même colonne, je trouve à la sixième ligne $17^2 - 37$, à quoi je substitue dans la colonne suivante, $16^2 - 4$, puisque

$$17^2 - 16^2 = 17 + 16 = 33 = 37 - 4$$

(et ainsi toujours. Car la différence de deux carrés immédiatement consécutifs est égale à la somme de leurs racines).

Je vois donc ainsi que

$$7.6^2 = 252 = 16^2 - 4.$$

Or, comme le nombre à retrancher, 4, est partie aliquote de la racine adjacente 16, il est clair que ce même nombre 4 est, *a fortiori*, partie aliquote du double produit des racines 6 et 16. Si donc je divise par 4 le nombre $2 \times 6 \times 16 = 192$, le quotient 48 sera racine d'un autre carré cherché. En effet,

$$7.48^2 = 7 \times 2304 = 16128 = 127^2 - 1.$$

On a donc ainsi un autre carré cherché; mais immédiatement au début, nous avions, dans la première colonne,

$$7 \times 2^2 = 6^2 - 8,$$

où il est clair que le nombre à retrancher 8 divise le double produit de 2 et 6;

$$2 \times 2 \times 6 = 24 \qquad \text{et} \qquad \frac{24}{8} = 3,$$

racine d'un carré déjà trouvé.

Encore dans la même colonne, quatrième ligne, on a

$$7.4^2 = 12^2 - 32,$$

et comme le quotient par 32 de $2 \times 4 \times 12 = 96$ est 3, on retrouve pour la troisième fois la racine du même carré déjà connu. En y fai-

sant attention, on reconnaîtra que cette colonne donne souvent coup sur coup le même résultat, car il se présente à toutes les lignes paires ou dont le rang est multiple de deux. Mais bien plus, dès la première ligne où le nombre à retrancher, 2, est partie aliquote du double produit $2 \times 1 \times 3$, le quotient est encore ce même nombre 3; toutes les lignes de la première colonne devront donc fournir cette même racine pour le carré cherché.

Il faut noter que non seulement les différences 6, 10, 14, 18, etc. de la première colonne, mais encore celles de la seconde, 8, 12, 16, 20, etc., de la troisième, 14, 18, 22, 26, etc. et ainsi de suite dans toutes les autres, sont en progression arithmétique, avec la même raison 4 que dans la première; il est donc très facile de prolonger une colonne quelconque, sans avoir à s'embarrasser d'aucune extraction de racine.

D'autre part, ces mêmes différences, prises obliquement, comme 10 et 8, 14 et 12, ou 18, 16, 14, etc. sont toujours en proportion arithmétique, et leur commune différence est toujours 2 (ce qu'on reconnaîtra d'ailleurs, *mutatis mutandis,* quel que soit le nombre n proposé). Il est donc de même facile de passer de colonne à colonne.

Il l'est encore, pour les mêmes raisons, de donner à volonté un nombre quelconque, dans une colonne quelconque, sans calculer les intermédiaires, ou encore, si cela paraît expédient, d'effectuer les opérations par bonds. Mais tout cela se présente de soi-même à qui a une pratique suffisante de la nature de la progression arithmétique, et il n'est pas besoin de le prouver plus longuement.

Au reste, ce que j'ai montré jusqu'à présent, en prenant le carré c^2 plus grand que le nombre n proposé, arrive également en prenant le carré inférieur. Je ne veux pas dire que l'on obtienne immédiatement le nombre cherché (comme dans le premier cas où l'on a $7.3^2 = 8^2 - 1$), mais on a une différence partie aliquote du double produit (comme, quand sur $7.2^2 = 6^2 - 8$, on a trouvé le nombre 8 partie aliquote du double produit $2 \times 2 \times 6$, d'où l'on déduit le quotient 3 comme racine d'un carré cherché). En effet, il est simplement requis que la diffé-

rence $|nr^2 - s^2|$ divise le double produit $2rs$, sans qu'il y ait nécessité que nr^2 ou s^2 soit le plus grand des deux termes; c'est donc la même chose, pour la question, que nr^2 soit supérieur ou inférieur d'une unité à un carré.

Par exemple, soit proposé le nombre 13,

$$na^2 = (ca)^2 + ba^2$$

$$\begin{array}{r|l} 13.1^2 & 3^2 + 4 \\ & \quad 12 \\ 2^2 & 6^2 + 16 = 7^2 + 3 \\ & \qquad\qquad 14 \\ \text{etc.} & \qquad 10^2 + 17 \\ & \qquad\qquad 22 \\ & \qquad 13^2 + 39 = 14^2 + 12 \\ & \qquad\qquad\qquad 24 \\ & \qquad\qquad 17^2 + 36 = 18^2 + 1. \end{array}$$

On trouvera, à la cinquième ligne, quatrième colonne (ou troisième à partir de la première),

$$13.5^2 = 18^2 + 1.$$

Or 1, différence des nombres 13.5^2 et 18^2 divise le double produit $2 \times 5 \times 18 = 180$, et donne pour quotient 180. Ce sera donc la racine d'un des carrés cherchés.

En effet,

$$13 \times 180^2 = 421200 = 649^2 - 1.$$

Si enfin, jusqu'à présent, nous avons pris pour c^2 le carré soit immédiatement supérieur, soit immédiatement inférieur au nombre donné, cela est tout à fait arbitraire et sans nécessité; car tout autre carré supérieur ou inférieur eût donné les mêmes résultats; ce qu'il faut également entendre de ce qui suit.

Il semble que de la sorte nous ayons suffisamment traité la première partie du problème, à savoir la recherche d'un au moins des carrés demandés. Car, s'il en existe un, il est impossible qu'on ne le trouve pas ainsi, par l'un ou l'autre mode, ou au moins par le premier.

Mais, comme il peut parfois être long d'y arriver, à moins d'em-

ployer un abrégé, il convient, pour faciliter le calcul, d'enseigner, entre beaucoup, quelques abrégés de ce genre.

L'un, qui est excellent, a déjà été indiqué; il se présente lorsque la différence $|nr^2 - s^2|$ divise le double produit $2rs$. Cela arrive toujours quand cette différence est soit 1, soit 2, c'est-à-dire si nr^2 est supérieur ou inférieur, de 1 ou de 2, par rapport à un carré quelconque s^2, car 1 divise tout nombre et 2, tout nombre pair, donc $2rs$. Mais cela se présente souvent aussi pour d'autres différences.

En voici un autre : à moins de rencontrer $ba^2 = 1$ dans la première colonne, ce qui résout immédiatement la question, pour trouver 1 comme nombre à retrancher, il faut passer aux colonnes suivantes et en prendre une ou plusieurs, comme j'ai dit. Mais quel que soit le rang de la colonne où l'on trouvera 1, de ce rang connu on déduira aussitôt la racine du carré cherché. En effet, si, dans la première colonne, la racine du carré essayé est ca, elle sera, dans la seconde, $ca - 1$, dans la troisième, $ca - 2$, etc. Cela est évident dans le premier mode du procédé, où l'on prend le carré c^2 immédiatement supérieur à n; quant au second mode, j'en parlerai plus loin.

Ainsi, il est clair que la racine du carré, dans une colonne quelconque, est inférieure à la racine du carré correspondant dans la première colonne, d'autant d'unités qu'il y a de rangs d'une colonne à l'autre; appelons d cette distance ou différence. La racine du carré dans une colonne quelconque sera $ca - d$ et son carré

$$c^2a^2 - 2cda + d^2$$

étant, par rapport au carré c^2a^2, supérieur du nombre $2cda - d^2$, il faudra diminuer d'autant le nombre à retrancher ba^2 pour retrouver en tous cas la même différence na^2. Ainsi ce nombre à retrancher sera $ba^2 - 2cda + d^2$. Mais je voudrais que ce nombre ainsi déterminé soit 1. Il faut donc poser

$$ba^2 - 2cda + d^2 = 1,$$

et, transposant,

$$d^2 - 1 = 2cda - ba^2,$$

d'où

$$\frac{d^2-1}{b}=\frac{2cd}{b}a-a^2,$$

et résolvant l'équation

$$a=\frac{cd}{b}\pm\sqrt{\frac{c^2d^2-bd^2+b}{b^2}}=\frac{cd\pm\sqrt{c^2d^2-bd^2+b}}{b}=\frac{cd\pm\sqrt{nd^2+b}}{b}$$

à cause de $c^2=n+b$, d'où $c^2-b=n$ et $c^2d^2-bd^2=nd^2$.

Ainsi, connaissant d, on connaîtra a.

Cela posé, pour connaître d, il faut chercher, de la même manière que l'on a montré pour a, un carré dont le produit par le nombre donné, étant augmenté du nombre b qui a été pris, fasse un carré, en sorte que $\sqrt{nd^2+b}$ soit un nombre rationel entier. Cela peut paraître à première vue aussi difficile que la première recherche proposée; mais, en fait, il y aura un grand abrégé, parce que d (nombre des colonnes suivant la première) sera toujours moindre que a (nombre des unités dans la racine du carré cherché), comme cela est évident. On parviendra donc plus tôt au nombre à retrancher b qu'au nombre à retrancher 1.

Par exemple : soit proposé le nombre 13 et, par suite, soit

$$13.1^2=4^2-3.$$

On ne trouvera pas 1 avant la ligne 180, où

$$13.180^2=649^2-1,$$

et par conséquent $a=180$. Mais on retrouvera le nombre à retrancher $b=3$, au moins dès la ligne 71, car

$$13.71^2=256^2-3,$$

et par conséquent $d=71$, d'où l'on conclura $a=180$, comme précédemment. Le calcul est donc abrégé de plus de moitié.

Si cependant il arrivait, ce qui peut se faire parfois, que le nombre d, ainsi trouvé en premier lieu, donnât un nombre a, non pas entier, mais fractionnaire, et par suite impropre à la question

proposée, on en chercherait un second, ou même un troisième, enfin quelqu'autre d donnant a entier. Ce qu'il faut aussi entendre pour ce qui suit.

Que si cette réduction des opérations ne paraît pas encore assez satisfaisante, et qu'on ne parvienne qu'avec trop de lenteur au nombre d lui-même, dans ce cas sa recherche peut aussi être abrégée par le même artifice. Précédemment, pour trouver a, nous avons cherché le rang de la colonne renfermant le nombre à retrancher prescrit 1; maintenant il faut chercher le rang de la colonne renfermant le nombre à retrancher b. Or, comme, à cause de $c^2 = n + b$, on a

$$nd^2 = c^2d^2 - bd^2,$$

et que le nombre à retrancher bd^2 est trop grand (à moins que l'on n'ait $b = 1$) puisque celui qu'on cherche est b, il faut diminuer le carré c^2d^2 (comme nous avons tout à l'heure diminué le carré c^2a^2), de façon que le nombre à retrancher, étant diminué d'autant, devienne égal à b.

Ainsi, de même qu'à la racine ca du carré nous avons substitué $ca - d$, à cd nous substituerons maintenant $cd - e$, e étant le rang de la colonne où l'on trouvera le nombre à retrancher b. La différence des carrés de ces racines sera $2ced - e^2$, et en la retranchant du nombre bd^2, il restera

$$bd^2 - 2ced + e^2 = b,$$

d'où

$$e^2 - b = 2ced - bd^2$$

et

$$\frac{e^2 - b}{b} = \frac{2ce}{b} d - d^2,$$

et, résolvant l'équation,

$$d = \frac{ce \pm \sqrt{c^2e^2 - be^2 + b^2}}{b} = \frac{ce \pm \sqrt{ne^2 + b^2}}{b}.$$

Par exemple : soit proposé le nombre 13, on trouvera à la ligne 28,

$$13.28^2 = 101^2 - 9,$$

et, comme $9 = b^2$, on aura $e = 28$, d'où $d = 71$ et $a = 180$. Ainsi le

travail, déjà réduit auparavant de la ligne 180 à la ligne 71, se trouve maintenant réduit à la ligne 28.

Mais la même méthode peut encore le réduire davantage. En effet, on montrera de la même manière, s'il est besoin, comment cette réduction doit se faire, et de même que l'on a trouvé

$$\frac{cd \pm \sqrt{nd^2 + b}}{b} = a, \qquad \frac{ce \pm \sqrt{ne^2 + b^2}}{b} = d,$$

on trouvera

$$\frac{cf \pm \sqrt{nf^2 + b^3}}{b} = e, \qquad \frac{cg \pm \sqrt{ng^2 + b^4}}{b} = f, \qquad \frac{ch \pm \sqrt{nh^2 + b^5}}{b} = g,$$

et ainsi de suite.

Ainsi on est ramené à ceci : en commençant à procéder comme précédemment, on observera si l'on rencontre comme nombre à retrancher, soit 1, soit 2, soit quelque autre diviseur du double produit $2rs$ ci-dessus mentionné (car dès qu'un tel cas se présente, la question est aussitôt résolue, comme il a été dit); soit encore b ou une de ses puissances quelconques, b^2, b^3, etc. Si l'on rencontre ainsi b, on aura d; si l'on rencontre b^2, on aura e; si b^3, f et ainsi de suite.

Un de ces nombres étant connu, on aura évidemment les autres en rétrogradant, à moins que l'on ne trouve ainsi des nombres fractionnaires; dans ce cas, il faudra, comme je l'ai indiqué, poursuivre encore la recherche commencée.

Par exemple, soit proposé, comme auparavant, $n = 13$,

$$\begin{array}{r|llll}
13.1 & 4^2 - 3 & & & \\
2 & 8^2 - 12 & & & \\
3 & 12^2 - 27 = 11^2 - 4 & & & \\
4 & 16^2 - 48 = 15^2 - 17 & & & \\
 & \text{etc.} & 19^2 - 36 & & \\
 & & 23^2 - 61 = 22^2 - 16 & & \\
 & & & 26^2 - 39 & \\
 & & & 30^2 - 68 = 29^2 - 9 & \\
 & & & & 33^2 - 36 \\
 & & & & 37^2 - 69 \\
 & & & & 41^2 - 108 = 40^2 - 27.
\end{array}$$

On trouvera, à la ligne 11, colonne quatrième à partir de la première,

$$13.11^2 = 40^2 - 27,$$

et, comme ici $27 = b^3$, on aura $f = 11$, d'où $e = 28$, $d = 71$, $a = 180$.

Mais nous négligeons, dans la première colonne, tant 3 à la première ligne, que 27 à la troisième; dans la colonne 3 après la première, ligne 8, nous négligeons 9; parce que l'un quelconque de ces nombres donnerait a fractionnaire $\left(\text{de fait } 0 \text{ ou } \frac{8}{3} \text{ ou } \frac{164}{9}\right)$, et par conséquent impropre à la question.

Ainsi l'opération a été réduite de 180 à 11. Avec le nombre proposé, on ne peut d'ailleurs obtenir une nouvelle réduction, à moins de passer à des colonnes antérieures. En effet, puisque l'on a $f = 11$, comme j'ai dit, on doit le trouver à la ligne 11, colonne 4 après la première; car $g = 4$, et l'on a d'ailleurs

$$13.4^2 = 17^2 - 81;$$

mais on ne peut trouver cette puissance dans aucune des colonnes ci-dessus; il faudrait prendre celle qui est immédiatement antérieure à la première, puisque $17 = (ca)^2 + 1$. La même chose est à dire, *a fortiori*, des nombres suivants h, i, etc.

On peut, il est vrai, prendre $g = 84$, puisque

$$13.84^2 = 303^2 - 81,$$

et que ce nombre donne, en effet, aussi bien $f = 11$ que $f = 213$, mais on voit qu'il se trouve plus tard que le f cherché.

Il n'est peut-être pas sans intérêt de noter que, de même que si l'on connaît d, par exemple, on peut en déduire a, de même réciproquement, si l'on connaît a, on peut en déduire d; de même pour les autres. En effet, comme on l'a montré,

$$ba^2 - 2cda + d^2 = 1;$$

d'où, ordonnant et résolvant l'équation,

$$a = \frac{cd \pm \sqrt{nd^2 + b}}{b},$$

comme on l'a déjà vu, et

$$d = ca \pm \sqrt{na^2+1}.$$

De même, puisque

$$bd^2 - 2ced + e^2 = b,$$

on aura à la fois

$$d = \frac{ce \pm \sqrt{ne^2+b^2}}{b} \quad \text{et} \quad e = cd \pm \sqrt{nd^2+b};$$

et ainsi de suite.

Mais il s'ensuit aussi que

$$ba = e \quad \text{et semblablement} \quad bd = f, \quad be = g, \quad \text{etc.}$$

En effet, puisque

$$a = \frac{cd \pm \sqrt{nd^2+b}}{b},$$

on aura

$$ba = cd \pm \sqrt{nd^2+b} = e,$$

et de même pour les autres.

Il y a toutefois à faire cette distinction que le signe, qui est double dans les deux cas, doit être pris de deux façons différentes, le supérieur convenant mieux à la question pour l'une des quantités, l'inférieur pour l'autre. Par exemple, si l'on prend

$$ba = cd - \sqrt{nd^2+b},$$

a sera un nombre fractionnaire, à moins que b ne divise le nombre $cd - \sqrt{nd^2+b}$, ou bien, s'il est entier, il se trouverait encore plus tard que d ou e, dans la recherche dont il s'agirait. Au contraire, si, pour e, on prenait la plus grande quantité

$$e = cd + \sqrt{nd^2+b},$$

quoique dans ce cas le nombre soit bien entier, comme il est plus grand que a, il n'arriverait que plus tard, dans la recherche faite pour le trouver le premier.

Ce qu'on vient de dire pour a et e s'applique également à d et f, à e et g, etc.

Ainsi, si par exemple, après avoir trouvé e, on remonte par les égalités ci-dessus à d et à a, il faut prendre les quantités les plus grandes;

si, au contraire, on veut avoir les suivantes f, g, etc., on prend les moindres, comme mieux appropriées à la question.

Les procédés abrégés, que nous venons d'indiquer pour chercher na^2 inférieur d'une unité à un carré (et en prenant dès lors $c^2 > n$), s'appliquent de même, *mutatis mutandis*, si l'on veut chercher na^2 ou nr^2 supérieur d'une unité à un carré (en prenant pour c^2 le carré immédiatement inférieur) ou encore na^2 ou nr^2, ayant avec un carré une différence de 2, en plus ou en moins. Quoiqu'en effet, dans ce cas, a^2 ne soit pas le carré cherché en premier lieu, il le donnera toutefois, comme j'ai dit plus haut. Les relations se présentent ainsi :

na^2 inférieur d'une unité à un carré.	*na^2 supérieur d'une unité à un carré.*
$a = \frac{cd \pm \sqrt{nd^2 + b}}{b}$,	$a = \frac{\sqrt{nd^2 - b} - cd}{b}$,
$d = \frac{ce \pm \sqrt{ne^2 - b^2}}{b}$,	$d = \frac{\sqrt{ne^2 + b^2} - ce}{b}$,
$e = \frac{cf \pm \sqrt{nf^2 + b^3}}{b}$,	$e = \frac{\sqrt{nf^2 - b^3} - cf}{b}$,
$f = \frac{cg \pm \sqrt{ng^2 - b^4}}{b}$,	$f = \frac{\sqrt{ng^2 + b^4} - cg}{b}$,
$g = \frac{ch \pm \sqrt{nh^2 + b^5}}{b}$,	$g = \frac{\sqrt{nh^2 - b^5} - ch}{b}$,
. . . . ,	. . . .

na^2 inférieur de deux unités.	*na^2 supérieur de deux unités*
$a = \frac{cd \pm \sqrt{nd^2 + 2b}}{b}$,	$a = \frac{\sqrt{nd^2 - 2b} - cd}{b}$,
$d = \frac{ce \pm \sqrt{ne^2 - 2b^2}}{b}$,	$d = \frac{\sqrt{ne^2 + 2b^2} - ce}{b}$,
$e = \frac{cf \pm \sqrt{nf^2 + 2b^3}}{b}$,	$e = \frac{\sqrt{nf^2 - 2b^3} - cf}{b}$,
$f = \frac{cg \pm \sqrt{ng^2 - 2b^4}}{b}$,	$f = \frac{\sqrt{ng^2 + 2b^4} - cg}{b}$,
$g = \frac{ch \pm \sqrt{nh^2 + 2b^5}}{b}$,	$g = \frac{\sqrt{nh^2 - 2b^5} - ch}{b}$,
. . . . ,	. . . .

On procéderait, de même, pour chercher na^2 différant d'un carré d'un nombre quelconque, en plus ou en moins. J'entends en tant que la chose est possible, car il n'est pas universellement vrai que pour un nombre quelconque, même non carré, son produit par un carré entier puisse avoir, soit en plus, soit en moins, une différence donnée quelconque avec un carré. Mais comme, dans la question posée, il est certain que 1 et 2 divisent toujours $2rs$, que cela n'est pas de même assuré ou universellement constant pour les autres nombres, il suffira de porter son attention sur ce qui suit : à savoir si, en instituant le calcul indiqué, on trouve na^2 ayant avec quelque carré pour différence le nombre 1 ou 2, ou quelque autre partie aliquote du double produit des racines; ou bien inférieur à un carré du nombre b (différence entre le nombre donné et un carré plus grand), ou d'une quelconque de ses puissances, ou du double d'une quelconque de ses puissances; ou encore supérieur à un carré du nombre b (différence entre le nombre donné et un carré plus petit), ou de son double ou d'une puissance quelconque impaire de b ou du double d'une telle puissance; ou enfin, dans le même cas, inférieur d'une puissance paire de b ou de son double.

Si, en effet, quelqu'une de ces circonstances se présente, on aura, soit le nombre a, racine du carré cherché ou qui le fournira immédiatement, soit quelqu'un des nombres d, e, f, qui, par rétrogradation, conduiront à a, à moins que le nombre a ainsi trouvé ne soit fractionnaire, auquel cas il faudra pousser plus loin la recherche, comme il a été dit.

Par exemple, soit proposé le nombre $n = 149$, et soit pris

$$c = 12 \quad \text{et par conséquent} \quad b = 149 - 144 = 5;$$

on trouvera, à la ligne 17 de la colonne troisième ou 2 après la première (car il n'est pas nécessaire d'aller plus loin),

$$149 \cdot 17^2 = 206^2 + 625;$$

et dès lors, comme $625 = b^4$, on aura $g = 17$, d'où, en rétrogradant,

on trouvera

$$f = 82, \quad e = 397, \quad d = 1922, \quad \text{enfin} \quad a \text{ ou } r = 9305.$$

Le produit de ce dernier nombre par n dépasse un carré d'une unité; car

$$149 \times \overline{9305}^2 = 12900870725 = \overline{113582}^2 + 1 = s^2 + 1.$$

Le double produit

$$2rs = 2 \times 9305 \times 113582,$$

divisé par

$$nr^2 - s^2 = 1,$$

donnera

$$2113761020,$$

racine du carré cherché dont le produit par n ou 149 sera inférieur d'une unité au carré du nombre

$$25801741449.$$

On aurait obtenu le même résultat si, passant la ligne 17, on était allé jusqu'à la ligne 82 ou 397, etc., où l'on aurait eu $f = 82$ ou $e = 397$, etc.

Ainsi, dès la ligne 17, nous avons le nombre qui, par la méthode exposée, conduit au nombre cherché, lequel est passablement élevé, puisque le plus petit des carrés satisfaisant à la question doit être écrit avec 19 figures. C'est

$$4467985649671440400,$$

carré de

$$2113761020,$$

comme je l'ai dit; et ce carré, multiplié par 149, est inférieur d'une unité à

$$665729861801044619601,$$

carré du nombre

$$25801741449.$$

En voilà sans doute bien assez sur les procédés d'abréviation de la recherche; je n'ignore pas qu'on peut ajouter encore d'autres remarques, qui abrégeraient cette abréviation même; mais je crains d'être trop prolixe.

J'avais pensé notamment à indiquer une autre méthode abrégée. Il s'agit de montrer comment nous pourrions poursuivre par sauts l'investigation dont j'ai parlé, ce qui peut être utile, quand elle traîne en longueur, comme cela arrive parfois; de la sorte il ne serait pas même besoin, en certains cas, d'examiner une ligne sur 100. Mais cela ne me paraît pas nécessaire, et je ne dois pas en mettre trop; ou bien, si vous désirez que je traite aussi ce point, ce sera pour une autre fois.

Désormais, ayant longuement exposé la méthode de recherche d'un carré quelconque propre à notre objet, c'est-à-dire tel que son produit par un nombre donné, étant augmenté d'une unité, fasse un carré, il reste à montrer comment nous en fournirons ensuite une infinité de même espèce, pour ne pas dire tous les possibles. Là-dessus je serai aussi rapide que possible, car je n'ai pas à être prolixe, en vous exposant ce qui est de vous.

Comme je l'ai déjà dit plus haut, toutes les fois que la différence $|nr^2 - s^2|$ est une partie aliquote du double produit $2rs$, le quotient de ce dernier par cette différence sera la racine d'un carré satisfaisant à la question.

Soit donc déjà connu (par la recherche ci-dessus développée) un carré quelconque satisfaisant à la question et que nous désignerons par r^2. Puisque dès lors, par hypothèse, nr^2+1 est un carré, soit s^2 ce dernier. On a donc

$$nr^2+1=s^2, \qquad \text{d'où} \qquad |nr^2-s^2|=1.$$

Comme 1 divise tout nombre entier, il est clair que cette différence, $|nr^2-s^2|=1$, divise le double produit $2rs$; et le quotient résultant de cette division sera la racine d'un second carré satisfaisant à la question. Grâce à ce second, on en déduira de la même façon un troisième; de celui-ci un autre, et ainsi de suite à l'infini.

Toutefois, si cette solution satisfait largement à la question, de fournir une infinité de carrés de l'espèce, elle ne donne pas absolument tous les possibles.

Par exemple, soit donné le nombre 3, la racine du premier carré sera 1; on en déduira pour celle du second 4, puis successivement

56, 10864, 408855776, ...,

et cependant on passe sur de nombreux carrés intermédiaires, à savoir ceux des racines 15, 209, 780, 2911, 40545, 151316, 564719, 2107560, 7865521, 29354524, 109552575.

Ces racines intermédiaires seront fournies par la règle suivante :

Soient n le nombre donné, r la racine du premier ou plus petit carré satisfaisant à la question, supposée trouvée par la méthode exposée ci-dessus, et $t = 2\sqrt{nr^2+1}$,

la racine du premier sera	...	r ou $r \times 1$,
celle du second »	...	$r \times t$,
» du troisième »	...	$r \times (t^2 - 1)$,
» du quatrième »	...	$r \times (t^3 - 2t)$,
» du cinquième »	...	$r \times (t^4 - 3t^2 + 1)$,

et ainsi de suite, selon la série ci-contre :

$r \times 1$,	$r \times 1$,
t,	t,
$t^2 - 1$,	u,
$t^3 - 2t$,	x,
$t^4 - 3t^2 + 1$,	y,
$t^5 - 4t^3 + 3t$,	z,
$t^6 - 5t^4 + 6t^2 - 1$,	a,
................,	...

La construction de cette série se reconnait de prime abord; il suffit d'indiquer que les coefficients sous-entendus, sinon inscrits, des premiers termes sont les unitaires 1, 1, 1, etc.; ceux des seconds les linéaires 1, 2, 3, etc., engendrés par l'addition successive des unitaires $1+1+1$, etc.; ceux des troisièmes termes sont les triangulaires 1, 3, 6, etc., formés par l'addition successive des linéaires $1+2+3$, etc.; ceux des quatrièmes termes sont les pyramidaux 1,

4, 10, etc., formés par l'addition successive des triangulaires $1+3+6$, etc., et ainsi de suite.

Ou bien si, à t, t^2-1, t^3-2t, etc., nous substituons t, u, x, etc., on aura

$$\begin{aligned} u &= tt - 1, \\ x &= tu - t, \\ y &= tx - u, \\ z &= tx - y, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que chaque terme est le produit par t du terme immédiatement précédent, si l'on retranche de ce produit le terme pénultième.

Ou enfin (figuration qui pourra trouver des préférences) la série aura la forme suivante (*voir* Lettre XIV) :

Pour le nombre donné 3 :

$$3 \text{ par le carré de } 1 \times 3\frac{1}{1} \times 3\frac{3}{4} \times 3\frac{11}{15} \times 3\frac{41}{56} \times 3\frac{153}{209} \times \ldots;$$

ou pour 2 :

$$2 \text{ par le carré de } 2 \times 5\frac{1}{1} \times 5\frac{5}{6} \times 5\frac{29}{35} \times 5\frac{169}{204} \times 5\frac{985}{1189} \times \ldots.$$

Ici connaissant, comme précédemment, la première et la seconde racine, on forme les autres de telle sorte que, dans les fractions successives, le numérateur de chacune soit égal à son dénominateur moins le dénominateur immédiatement précédent, et que chaque dénominateur soit égal au numérateur du terme immédiatement précédent réduit en fraction impropre.

Si ce que je viens de dire ne suffisait pas surabondamment pour la question à traiter présentement, on peut encore ajouter ce qui suit.

Si l'on a trouvé une série quelconque comme ci-dessus, convenant pour un nombre non carré donné, par exemple $n=2$, on aura immédiatement les séries convenant aux multiples du même nombre par un carré quelconque, soit à nm^2; pour cela, il suffit de diviser la série des racines déjà trouvées par la racine m de ce carré.

Ainsi l'on a :

2 par le carré de $2 \times 5\frac{1}{1} \times 5\frac{5}{6} \times 5\frac{29}{35} \times 5\frac{169}{204} \times 5\frac{985}{1189} \times \dots,$

8 » $1 \times 5\frac{1}{1} \times 5\frac{5}{6} \times 5\frac{29}{35} \times 5\frac{169}{204} \times 5\frac{985}{1189} \times \dots,$

18 » $4 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times \dots,$

32 » $3 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times \dots,$

50 » $14 \times 197\frac{1}{1} \times 197\frac{197}{198} \times \dots,$

72 » $2 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times \dots,$

98 » $10 \times 197\frac{1}{1} \times 197\frac{197}{198} \times \dots,$

128 » $51 \times \dots,$

162 » $1540 \times \dots,$

200 » $7 \times 197\frac{1}{1} \times 197\frac{197}{198} \times \dots,$

242 » $1260 \times \dots,$

288 » $1 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times \dots,$

c'est-à-dire

2	par le carré de	2.	12.	70.	408.	2378.	13860....,
8	»	1.	6.	35.	204.	1189.	6930....,
18	»	»	4.	»	136.	»	4620....,
32	»	»	3.	»	102.	»	3465....,
50	»	»	»	14.	»	»	2772....,
72	»	»	2.	»	68.	»	2310....,
98	»	»	»	10.	»	»	1980....,
128	»	»	»	»	51.	»	»
162	»	»	»	»	»	»	1540....,
200	»	»	»	7.	»	»	1386....,
242	»	»	»	»	»	»	1260....,
288	»	»	1.	»	34.	»	1155.....

Il est facile de voir que la division en question peut s'effectuer tantôt sur tous les termes, tantôt en les prenant de deux en deux,

ou de trois en trois, ou de quatre en quatre, cinq en cinq, etc. De même pour les autres nombres.

Il ne sera pas mauvais d'avertir de ce que j'ai déjà indiqué plus haut, quoique la chose soit étrangère au sujet à traiter présentement.

Si, dans la question proposée, au lieu de dire, *étant augmenté de l'unité*, on avait dit : *étant augmenté d'un nombre carré quelconque*, soit k^2, les séries des carrés que nous venons de trouver seraient à multiplier par ce carré k^2, ou, ce qui revient au même, les racines des carrés seraient à multiplier par k.

Par exemple : étant donné le nombre $n = 2$, on demande que na^2 soit inférieur d'une unité à un carré. On aura alors

$$na^2 = 2 \text{ par le carré de } 2.12.70\ldots.$$

Mais si l'on demandait que na^2 soit inférieur du nombre 9 à un carré, on aurait

$$na^2 = 2 \text{ par 9 fois le carré de } 2.12.70\ldots.$$

Cette série fournit une infinité de carrés satisfaisant toujours à la condition proposée, toutefois elle ne les donne pas toujours tous. Cette remarque doit suffire.

Voilà les principales choses qui m'ont semblé à dire sur ce sujet; je les ai réunies dans ce résumé pour obéir à vos ordres. Il me reste à vous prier d'excuser avec bonté ce qui pourra n'être pas en tout conforme à votre désir, et de ne pas vous lasser de continuer vos faveurs accoutumées,

Très insigne Lord,

au très respectueux serviteur de votre Seigneurie,

John Wallis.

Oxford, 7/17 décembre 1657.

J'avais déjà écrit tout le reste, quand l'idée m'est venue d'ajouter encore, sous une forme tout à fait différente de celle ci-dessus, votre méthode de rechercher le premier carré. (*Voir* Lettre XIX.)

Soit, par exemple, proposé le nombre non carré $n = 13$, et soit a^2 le carré cherché, tel que $13a^2 + 1$ soit carré. On aura

$$13a^2 + 1 = 9a^2 + 6ab + b^2$$

ou bien

$$4a^2 + 1 = 6ab + b^2;$$

par conséquent

$$2b > a > b.$$

Soit $a = b + c$; et, par suite,

$$4b^2 + 8bc + 4c^2 + 1 = 6b^2 + 6bc + b^2,$$

ou bien

$$2bc + 4c^2 + 1 = 3b^2;$$

$$2c > b > c.$$

$b = c + d$:

$$2c^2 + 2cd + 4c^2 + 1 = 3c^2 + 6cd + 3d^2,$$

$$3c^2 + 1 = 4cd + 3d^2;$$

$$2d > c > d.$$

$c = d + e$:

$$3d^2 + 6de + 3e^2 + 1 = 4d^2 + 4de + 3d^2,$$

$$2de + 3e^2 + 1 = 4d^2;$$

$$2e > d > e.$$

$d = e + f$:

$$2e^2 + 2ef + 3e^2 + 1 = 4e^2 + 8ef + 4f^2,$$

$$e^2 + 1 = 6ef + 4f^2;$$

$$7f > e > 6f.$$

$e = 6f + g$:

$$36f^2 + 12fg + g^2 + 1 = 36f^2 + 6fg + 4f^2,$$

$$6fg + g^2 + 1 = 4f^2;$$

$$2g > f > g.$$

$f = g + h$:

$$6g^2 + 6gh + g^2 + 1 = 4g^2 + 8gh + 4h^2,$$

$$3g^2 + 1 = 2gh + 4h^2;$$

$$2h > g > h.$$

$g = h + i$:

$$3h^2 + 6hi + 3i^2 + 1 = 2h^2 + 2hi + 4h^2,$$

$$4hi + 3i^2 + 1 = h^2,$$

$$2i = h, \qquad i = 1.$$

Par conséquent,

$$i = 1, \quad h = 2, \quad g = 3, \quad f = 5, \quad e = 33,$$
$$d = 38, \quad c = 71, \quad b = 109, \quad a = 180.$$

On procédera de la même façon pour tout nombre donné non carré.

LETTRE XVIII.

John Wallis a Kenelm Digby.

Très illustre Seigneur,

J'ai reçu avant-hier soir très tard et j'ai parcouru hier le Traité de M. Frenicle sur les problèmes de Fermat, Traité que votre Seigneurie a récemment adressé au très honorable Lord vicomte Brouncker, et que ce dernier a bien voulu me communiquer; je ne l'avais pas vu auparavant et je n'en avais même jamais entendu parler, avant d'avoir reçu à ce sujet la lettre du très honorable vicomte.

Il est certain, d'après ce Traité, que son clarissime auteur, ou bien n'a pas vu, ce que j'aime mieux croire, la lettre que je vous ai adressée à Paris, ou qu'il n'a pas loyalement agi : dirai-je avec nous ou avec notre nation?

Il commence tout d'abord par insulter notre nation, et non pas elle seulement, mais aussi les Belges et même les autres nationaux de France.

« Voici », dit-il, « que Lutèce vous fournit, très illustre Seigneur, » la solution de problèmes que ni vos Anglais, ni les Belges, n'ont » aucunement pu procurer; la Gaule Celtique est fière d'enlever la » palme à la Narbonnaise, etc. »

Et bientôt après, il répète à plusieurs reprises, que « la plupart des

» autres mathématiciens, tant d'Angleterre que de Batavie, s'atta-
» chent à les résoudre », ou même « y dépensent leurs sueurs », mais qu' « il a vainement attendu quelque chose des Anglais ou des Ba-
» taves, quoique la plupart aient sué là-dessus », et autres phrases pareilles.

Pour les Français et les Bataves, ce qu'il convient d'en dire, j'ai d'autant moins à m'en soucier que j'ignore davantage ce qui s'est fait chez eux; mais, pour vos Anglais, je puis en parler.

Tout d'abord, quand les Anglais n'auraient rien fait sur la question, on n'aurait pas pour cela à triompher de notre nation; car il n'y a pas un de ses mathématiciens sur cent qui ait, je ne dis pas, sué à résoudre ces problèmes, mais les ait seulement abordés, ou même qui en ait entendu parler. Je ne sache pas, en effet, à part Lord vicomte Brouncker et moi, qu'il y ait en Angleterre un mathématicien qui y ait dépensé une petite heure, ou même qui y ait pensé tant soit peu; au moins tous ceux que je connais, d'après mes informations actuelles, les ont absolument ignorés ou bien ne s'en sont pas occupés. Si leur très noble auteur a pu dire dans une lettre particulière qu'il les proposait à tous les mathématiciens de l'Europe, il ne faut pas croire que tous, je ne dis pas : se soient aussitôt mis à la besogne, mais même en aient eu immédiatement connaissance.

Quant à nous deux, nous avouons qu'il peut bien se faire que votre clarissime correspondant ait résolu ces problèmes, au moins les deux premiers, avant l'un ou l'autre de nous. A cela, il n'y a rien d'étonnant puisqu'il les aurait résolus deux mois avant qu'il en fût rien parvenu ici. Il dit, en effet, avoir trouvé la solution dès le 23 janvier (nouveau style), alors que ces problèmes, quoiqu'ils semblent m'être adressés personnellement, n'ont pas été vus de l'un de nous deux avant le 4 mars (vieux style), soit huit semaines entières, moins deux jours, plus tard. Ce fut là, au reste, la date de leur arrivée de Paris à Londres, et ils ne parvinrent à Oxford qu'un peu plus tard.

Ce que nous avons fait sur ce sujet, il est inutile de le répéter longuement à nouveau, puisque je vous l'ai déjà exposé à plusieurs

reprises dans mes lettres précédentes. Toutefois, comme cela se trouve épars et mêlé à d'autres choses (car le même M. Fermat nous a posé d'autres questions et nous avons répondu sur plusieurs points de plus d'importance), il paraît utile de faire le résumé de ce que j'ai déjà écrit à ce sujet, et de le donner à voir d'ensemble, pour qu'on puisse juger combien à tort on croit triompher de nous ou de notre nation. D'ailleurs, comme on semble parfois accuser notre lenteur, j'ai cru bon de marquer les dates.

Les deux premiers problèmes étaient conçus en ces termes :

Proposez (*voir* page 311, n° 79, à page 312, ligne 4) .... *d'une amitié naissante.*

Pour qu'on ne nous accuse pas de lenteur, je dirai que M. White, qui devait nous apporter ce papier de Paris, l'a remis à Londres à Lord vicomte Brouncker, le 4 mars (vieux style); celui-ci l'envoya le lendemain à Oxford, où il arriva le 6 mars, le soir à une heure avancée. J'y fis aussitôt une réponse, en sorte qu'elle pût être emportée par le courrier partant le lendemain de grand matin pour Londres. Voici le résumé de cette réponse :

Les questions proposées sont à peu près du même genre que celles que l'on pose sur les nombres dits parfaits, déficients ou abondants, et ne peuvent guère dès lors, ou ne peuvent pas du tout être ramenées à une équation générale embrassant tous les cas. Mais le seul et même nombre 1 satisfait aux deux questions, puisqu'il est à la fois carré et cube, et que d'ailleurs il n'a pas de parties aliquotes. J'ajoutais en même temps un problème très semblable à ces questions, et pour lequel je n'ai encore rien reçu comme réponse,

Trouver deux (*voir* p. 404, lignes 16 à 19) .... *semblable.*

A ma solution, le très honorable vicomte ajouta ensuite la sienne, à savoir : non seulement le nombre 1, mais (au cas où les fractions seraient admises) le quotient du nombre 1 par la sixième puissance de tout nombre entier; et, de plus, pour la première question, le quo-

tient du nombre 343 divisé de la même façon, par exemple, $\frac{343}{64}$. En effet, un nombre fractionnaire n'ayant pas d'autres parties actuelles que celles qui sont dénommées comme le tout, le cube ci-dessus $\frac{343}{64}$ n'aura pas d'autres parties aliquotes que $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$, lesquelles, ajoutées au même nombre $\frac{343}{64}$, font $\frac{400}{64}$, nombre carré. Ainsi ni M. Frenicle, ni M. Fermat ne peuvent dire qu'aucun Anglais n'ait satisfait aux questions, puisqu'au contraire les seuls qui les aient abordées, au moins que je sache, les ont résolues.

Comme cette solution était immédiate et qu'on ne demandait qu'un seul nombre de l'espèce, je n'ai pas jugé à propos de poursuivre des recherches dans l'infinité des nombres. La question ne me paraissait pas d'assez grande importance pour l'exiger, et l'eussé-je voulu faire, je n'en aurais pas eu le loisir. Car le problème me surprenait au milieu des occupations les plus pressantes et alors que je me disposais à partir pour assister à l'enterrement d'un frère que je venais de perdre.

Je n'étais pas encore de retour (mon absence dura deux semaines, si je me souviens bien) que, dans un entretien à Londres avec le lord vicomte, j'appris de lui que, dans l'intervalle, il avait déjà reçu, du même M. Fermat, une autre question, dans laquelle l'auteur avait une plus grande confiance, tandis qu'il semblait abandonner les autres, déjà résolues, à ce qu'on sait maintenant, par M. Frenicle; le lord avait répondu à cette question et donné, avec les précédentes, cette réponse à M. White; celui-ci les envoya immédiatement à Paris, comme on peut le reconnaître, et l'on ne peut non plus sur ce point nous reprocher un retard.

Or cette troisième question, après le préambule (*Il est à peine quelqu'un qui propose des questions purement arithmétiques, il est à peine quelqu'un qui sache les résoudre, etc.*), était conçue en ces termes :

Étant donné un nombre non carré quelconque, il y a une infinité de carrés déterminés, tels qu'en ajoutant l'unité au produit de l'un d'eux

par le nombre donné, on ait un carré.... Mais je demande la règle générale s'appliquant à tout nombre non carré quelconque qui peut être donné, etc.

Cette règle générale qu'on demandait fut fournie par le très honoré vicomte, et appuyée de sa démonstration.

Soient n un nombre donné quelconque (carré ou non carré, entier ou fractionnaire); q un autre carré quelconque (entier ou fractionnaire); d la différence entre n et q; à savoir soit $n - q$, soit $q - n$.

Règle : $n\dfrac{4q}{d^2} + 1$ est un nombre carré. En effet,

$$n\frac{4q}{d^2} + 1 = \frac{4qn + d^2}{d^2} = \frac{q^2 + 2qn + n^2}{q^2 - 2qn + n^2} = \left(\frac{q+n}{q-n}\right)^2.$$

Que cette solution soit légitime, personne n'en doutera, à moins qu'il ne la comprenne pas; et la démonstration, qui n'était pas réclamée, est certainement tout aussi régulière. Cependant, pour qui serait embarrassé des notations analytiques, la voici en d'autres termes :

Si le quadruple d'un carré quelconque est divisé par le carré de sa différence avec le nombre proposé, le quotient sera le carré cherché; car son produit par le nombre proposé, étant augmenté de l'unité, fera un carré.

J'ai envoyé moi-même à Paris une autre règle semblable, mais plus tard, car alors je n'avais pas eu pleine connaissance de la question.

Soient n un nombre donné quelconque; a un nombre quelconque arbitrairement choisi, par lequel on divise un carré q quelconque, ce qui donne le quotient m. Soit, d'autre part, o le quotient de m par $4p$ (c'est-à-dire par le quadruple d'un nombre quelconque); soit enfin d la différence entre oa et pn.

$\dfrac{ma}{d^2}$, disais-je, est le carré cherché. En effet,

$$\frac{man}{d^2} + 1 = \frac{man + d^2}{d^2} = \frac{o^2a^2 + \frac{1}{2}man + p^2n^2}{o^2a^2 - \frac{1}{2}man + p^2n^2} = \left(\frac{oa + pn}{oa - pn}\right)^2.$$

Que Fermat prenne l'une ou l'autre de ces règles, il n'aura pas seulement une infinité de carrés, mais bien tous les carrés possibles

entiers ou fractionnaires, dont le produit par le nombre donné (d'ailleurs carré ou non carré, car il n'y a pas de raison pour restreindre aux seuls non-carrés la question ainsi posée), étant augmenté de l'unité, fera un carré. Et cela même a déjà été démontré par nous, comme suit :

Soit f^2 un carré possible quelconque (satisfaisant à la question); on aura donc, par hypothèse, nf^2+1 égal à un nombre carré, soit l^2. Prenons maintenant

$$\sqrt{q} \quad r = \frac{l \mp 1}{f},$$

on aura, disais-je pour la première règle,

$$\frac{4q}{d^2} = f^2.$$

Et, en effet,

$$q = r^2 = \frac{l^2 \mp 2l + 1}{f^2}.$$

Mais

$$nf^2 + 1 = l^2;$$

par conséquent,

$$l^2 - 1 = nf^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{l^2-1}{f^2} = n.$$

Dès lors

$$d = |q - n| = \left| \frac{l^2 \mp 2l + 1}{f^2} - \frac{l^2-1}{f^2} \right| = \frac{2l \mp 2}{f^2}.$$

Mais, comme $2r = \dfrac{2l \mp 2}{f}$,

$$\frac{2l \mp 2}{f} : \frac{2l \mp 2}{f^2} = f = \frac{2r}{d},$$

c'est-à-dire

$$f^2 = \frac{4q}{d^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La même chose peut être prouvée de même, s'il est besoin, pour l'autre règle.

Ainsi nous avons donné la règle générale demandée pour obtenir, étant donné un nombre quelconque, une infinité de nombres carrés

dont le produit par le nombre donné, étant augmenté d'une unité, fasse un carré. On ne peut donc nous accuser de ne pas avoir résolu le problème.

Je montrais encore, par surcroît, que la question se serait résolue avec la même facilité si, au lieu de l'unité, on eût proposé d'ajouter un nombre carré quelconque, par exemple, b^2. Il eût suffi, au lieu de $\frac{4q}{d^2}$, de prendre $\frac{4q}{d^2}b^2$. Mais c'était là un hors-d'œuvre, puisqu'on ne demandait que ce qui est donné par la première règle; or celle-ci fut envoyée à Paris, aussitôt après la réception de la question, toujours dans le mois de mars, si je ne me trompe; on ne peut donc nous reprocher ni de ne pas avoir résolu le problème, ni d'y avoir mis quelque retard.

La vérité est que ce fut seulement au mois d'octobre que j'eus communication d'une Lettre écrite par Fermat à Votre Seigneurie, où il faisait entendre, d'une part, qu'il n'avait pas bien saisi ce qu'avait voulu dire le Lord Vicomte (car il n'avait pas bien compris les solutions, écrites en anglais, puisqu'elles étaient adressées à M. White, un Anglais, et il n'avait pu trouver quelqu'un assez au courant de ces questions pour lui faire une traduction fidèle); d'autre part, il voulait que les questions proposées fussent entendues des seuls nombres entiers; c'était là changer absolument l'état de la question, car jusqu'alors il n'avait pas été soufflé mot d'*entiers;* enfin il proposait nombre d'autres questions, tout à fait étrangères à la précédente, et auxquelles il demandait une réponse, qui lui a été donnée. Mais à cette époque j'étais occupé d'autres affaires, et sur le point de faire un voyage, en sorte qu'il ne m'était pas possible de me mettre à cette besogne avant mon retour, en novembre; ce fut donc dans ce mois (par la lettre que je vous adressai le 21 novembre) qu'il fut longuement répondu sur les uns et les autres points, tant en mon nom qu'en celui du très honoré Vicomte. Pourvu donc qu'on nous fasse grâce sur ce délai si court et en tous cas indispensable, il n'y a encore là aucun reproche à nous faire.

Si d'ailleurs votre illustre correspondant a mal compris notre langue, le problème n'en a pas été, pour cela, moins résolu, et on ne peut pas plus reprocher au très honoré Vicomte d'avoir écrit en anglais à un Anglais qu'à votre illustre correspondant d'avoir rédigé en français presque tout ce que nous avons vu de lui.

Qu'enfin il limite maintenant aux seuls carrés entiers ce qu'il avait proposé sur les carrés en général, cela ne peut nullement nous faire tort. Car nous ne pouvions deviner qu'il fallait entendre ainsi la question, surtout quand il disait qu'il y cherchait à imiter Diophante, chez lequel par nombres carrés il faut toujours entendre indistinctement les entiers et les fractionnaires.

Admettons pourtant qu'il s'agisse de nombres entiers. Nous disons que, même dans ce cas, les questions sont résolues. Car pour la première et la seconde nous avons donné le nombre 1, entier qui satisfait à l'une et à l'autre. Quant à la troisième, nous avons donné la règle générale demandée, qui fournit tous les carrés satisfaisant à la question, soit entiers, soit fractionnaires.

Fermat peut nous dire qu'il voulait seulement des entiers et qu'il les voulait en nombre infini; mais quoique auparavant je n'en eusse rien su ni rien pu soupçonner, il lui a été donné satisfaction même sur ce point, comme il ressort de ma lettre de novembre.

Nous avons, en effet, montré que la proposition ainsi entendue est moins générale que dans les termes où elle était proposée tout d'abord, et qu'il faut la limiter au moins aux nombres non carrés, ainsi que l'a fait Fermat. Car si, en effet, n est carré entier, comme $\frac{4q}{d^2}$, $\frac{4qn}{d^2}$ sera aussi un carré entier, et sa différence avec un autre carré entier ne pourra être la seule unité.

Nous avons montré de même que, dans le cas où l'on peut donner un certain carré remplissant la condition prescrite, on peut aussi en trouver une infinité d'autres, et nous avons indiqué comment, d'un seul connu, les autres se déduisent en nombre infini. C'est là un point qui ne paraîtra pas à négliger, même, je crois, à M. Frenicle,

qui a passé tout cela sous silence (quoique ce semble être la principale partie du problème); qui n'a donné aucune démonstration de théorème, ni aucune construction de problème se rapportant à ces carrés à fournir en nombre infini; or nous avons donné et démonstration et construction.

De même nous avons montré comment, dans l'infinité des nombres carrés que donnent nos règles ci-dessus, nous distinguons les entiers des fractionnaires.

En effet, toutes les fois que $\frac{4q}{d^2}$ est un nombre entier, c'est-à-dire toutes les fois que d^2 est une partie aliquote du nombre $4q$, et dès lors en prenant les racines, d ou $|q-n|$ une partie aliquote du nombre $2\mathrm{R}$, ou encore, si l'on pose $q=\frac{s^2}{r^2}$ et $\mathrm{R}=\frac{s}{r}$, puisqu'il peut se faire que q et R soient des nombres fractionnaires, toutes les fois que $\left|n-\frac{s^2}{r^2}\right|$ est une partie aliquote du nombre $\frac{2s}{r}$, ou, en multipliant de part et d'autre par r^2, toutes les fois que la différence $|nr^2-s^2|$ est une partie aliquote du double rectangle $2rs$; toutes les fois, disais-je, que cela arrive, le carré donné par la règle énoncée est un nombre entier, dont la racine est $\frac{2sr}{|nr^2-s^2|}$.

Or ceci a lieu de diverses façons et en particulier de la suivante : $|nr^2-s^2|$, différence entre le produit par le nombre donné d'un carré quelconque et un autre carré quelconque, sera soit 1, soit 2. Car 1 divise tout nombre entier et 2 tout nombre pair, tel que $2rs$.

Et cette seule règle renferme l'ensemble de tout ce qu'a donné là-dessus M. Frenicle. Car le nombre de la quatrième colonne de sa Table est précisément le nombre r, puisque son carré, multiplié par le nombre n, diffère en plus ou en moins d'avec un autre carré (qui sera s^2), soit de 1 ou de 2, soit au moins d'une partie aliquote du nombre $2rs$. Ainsi trouver le nombre de sa quatrième colonne, c'est justement trouver notre nombre r; or il n'enseigne nulle part comment on peut le faire et il laisse ainsi toute la question non résolue; il ne donne que des exemples sur les nombres particuliers non carrés

jusqu'à 150, mais ne donne nullement ce qu'exige le problème, c'est-à-dire la règle applicable à un nombre donné quelconque. Quant aux préceptes que renferment les dix pages suivantes, et qui enseignent à trouver, d'après le nombre de la quatrième colonne, celui qu'on cherche dans la seconde colonne, nous les renfermons tous ensemble dans celui-ci : que $\frac{2rs}{|nr^2 - s^2|}$ est le nombre cherché, c'est-à-dire celui dont le carré remplit la condition proposée.

Quant à l'abrégé qu'il indique comme particulier aux nombres pairement pairs, c'est-à-dire divisibles par 4 (cas où il n'a pas recours aux nombres de la quatrième colonne), nous avons montré en général que cet abrégé s'applique aux nombres divisibles non seulement par 4, mais encore par tout carré quelconque.

Tout cela, avec d'autres choses se rapportant au même sujet, a été déjà longuement exposé soit dans ma dernière Lettre de novembre à Votre Seigneurie, soit dans celle (XVII) que j'ai écrite peu après au Lord Vicomte Brouncker, avant d'avoir en tout cas, remarquez-le bien, vu le Traité de M. Frenicle; vous recevrez une copie de cette Lettre en même temps que la présente.

Je ne voudrais pas au reste que vous pensiez que, dans ce qui précède, j'aie voulu manquer en rien aux très illustres et très nobles Fermat et Frenicle, rabaisser leurs travaux ou leurs connaissances en la matière; je respecte, comme il convient, des personnages aussi éminents, mais j'ai voulu vous montrer que vous n'avez pas non plus à rougir des Anglais vos compatriotes. Je laisse à Votre Seigneurie à apprécier ce qui a été fait sur la question tant par le très honoré Vicomte, qui a joué le rôle principal dans l'affaire, que par moi qui suis intervenu comme suppléant et qui reste

De Votre Seigneurie le très respectueux

John Wallis.

Oxford, 16/26 décembre 1657.

LETTRE XIX.

John Wallis a Vicomte Brouncker.

Voici, très illustre Seigneur, ce que je pense sur la seconde méthode de l'induction à instituer, méthode que je crois devoir développer un peu plus longuement que je ne l'ai déjà fait (*voir* l'Appendice à la Lettre XVII). Ce n'est pas que vous n'ayez suffisamment saisi mes brèves indications (un mot vous aurait suffi); mais puisque la chose doit être soumise à d'autres yeux, qui peuvent être moins familiers avec ces questions, je crois utile, et il me semble que vous-même le réclamez, de donner une explication un peu plus développée.

Je reprends donc le même exemple qu'auparavant : étant donné un nombre non carré $n = 13$, dont le produit par un carré a^2 doit être inférieur à un carré d'une unité, il s'agit de trouver ce carré a^2.

Puisque, par hypothèse, $13a^2 + 1$ est un carré entier (le problème étant désormais posé pour des nombres entiers), il est clair que ce carré doit être inférieur à $(4a)^2 = 16a^2$, supérieur à $(3a)^2 = 9a^2$. Si en effet a est entier, on a évidemment

$$16a^2 > 13a^2 + 1 > 9a^2.$$

Soit donc ce carré ou bien $(3a + b)^2$ ou bien $(4a - b)^2$, en sorte que b soit la différence de la racine du carré cherché avec celle du carré immédiatement supérieur ou inférieur.

Il est indifférent de prendre l'une ou l'autre expression; choisissons la première.

Ainsi

$$13a^2 + 1 = (3a + b)^2 = 9a^2 + 6ab + b^2$$

et, supprimant de part et d'autre les termes égaux,

$$4a^2 + 1 = 6ab + b^2.$$

Cela posé, il est évident que la quantité b est inférieure à a, supérieure à $\frac{1}{2}a$, c'est-à-dire que

$$2b > a > b.$$

Si, en effet, l'on avait $b = a$, on aurait $3a + b = 4a$, nombre déjà reconnu comme trop fort; donc $b < a$. Si, au contraire, on avait $b = \frac{1}{2}a$ et dès lors $a = 2b$, on aurait, à cause de l'équation $4a^2 + 1 = 6ab + b^2$ posée ci-dessus,

$$16b^2 + 1 = 12b^2 + b^2 = 13b^2,$$

ce qui ne peut avoir lieu en aucun cas. Par conséquent $b > \frac{a}{2}$ et

$$2b > a > b.$$

Puisque l'on a donc $2b > a > b$, on peut arbitrairement de la même façon poser

$$\text{soit} \quad a = 2b - c, \qquad \text{soit} \quad a = b + c,$$

en sorte que c soit la différence entre a et soit $2b$, soit b. Le choix entre ces deux positions étant libre, prenons $a = b + c$ et par suite, en raison de l'équation

$$4a^2 + 1 = 6ab + b^2$$

posée ci-dessus,

$$4b^2 + 8bc + 4c^2 + 1 = 6b^2 + 6bc + b^2$$

et, supprimant les termes égaux,

$$2bc + 4c^2 + 1 = 3b^2.$$

D'où l'on conclut, comme ci-dessus,

$$2c > b > c.$$

De même, posant $b = c + d$, on conclura

$$2d > c > d.$$

Posant $c = d + e$,

$$2e > d > e,$$

ainsi qu'on peut le voir en opérant suivant l'exemple déjà donné.

Posant enfin $d = e + f$, on a

$$e^2 + 1 = 6ef + 4f^2,$$

d'où, évidemment,

$$7f > e > 6f.$$

Si, en effet, on avait $e = 7f$, on aurait

$$(6ef + 4f^2) = 46f^2 = 49f^2 + 1 = (e^2 + 1),$$

tandis que le premier membre de l'égalité est plus petit. Au contraire, dans le cas de $e = 6f$, on aurait

$$(6ef + 4f^2) = 40f^2 = 36f^2 + 1 = (e^2 + 1);$$

le premier nombre est au contraire plus grand. Dès lors e est supérieur à $6f$ et inférieur à $7f$. De même pour les autres relations.

Il ne faut pas d'ailleurs croire qu'il faille de nombreux essais pour reconnaître ces limites, comme $7f$ et $6f$, entre lesquelles doit être compris le nombre e, il ne faut pas redouter que cette recherche ne devienne fastidieuse. Cette crainte s'évanouira si l'on remarque que l'une des limites est pour ainsi dire toujours obtenue en divisant le coefficient du produit par le coefficient du carré dont on cherche les limites. Ainsi, dans l'exemple en question,

$$e^2 + 1 = 6ef + 4f^2,$$

en divisant 6 par 1, on a le quotient 6; par conséquent $6f$ sera une limite ou au moins le nombre immédiatement voisin de celle-ci. Si l'on fait l'essai en remplaçant e par $6f$, d'où $6ef$ par $36f^2$, on aura

$$6ef + 4f^2 = 40f^2, \quad \text{nombre plus grand que} \quad 36f^2 + 1 = (e^2 + 1);$$

il est donc clair que $\frac{1}{6}e$ est plus grand que f, ou $e > 6f$. Que de même $e > 7f$, cela est aussi évident; car, posant $e = 7f$,

$$6ef + 4f^2 = 46f^2 \quad \text{plus petit que} \quad 49f^2 + 1 = (e^2 + 1).$$

Ainsi on connaîtra les limites

$$7f > e > 6f,$$

et de même dans les autres cas.

Mais il est évident que les différences b, c, d, etc. sont des nombres entiers et qu'elles décroissent continuellement; on arrivera donc nécessairement à une certaine différence de cette suite (au plus tard si elle se

réduit à 1) qui sera une partie aliquote de la précédente. C'est tout de même ainsi que, dans la réduction des fractions à leur plus simple expression, c'est-à-dire dans la recherche du plus grand commun diviseur, suivant la proposition VII, 2 des Éléments d'Euclide, en divisant successivement les diviseurs par les restes, on arrive au même résultat; cette recherche est, en effet, tout à fait voisine de celle dont il s'agit ici. Dès qu'on sera arrivé à ce point, au lieu de limites comme

$$7f > e > 6f,$$

on aura une égalité. Ainsi dans l'exemple proposé, lorsqu'on arrive à

$$4hi + 3i^2 + 1 = 3h^2,$$

si l'on prend $h = 2i$, car h est évidemment, d'après cette équation, supérieur à i,

$$4hi + 3i^2 + 1 = 8i^2 + 3i^2 + 1 = 11i^2 + 1 - (3h^2) = 12i^2,$$

équation qui peut évidemment avoir lieu, si l'on pose $i = 1$. La valeur du nombre i est ainsi déterminée. En revenant sur nos pas, on en déduira la valeur des différences h, g, f, e, d, c, b, et enfin de $a = 180$, racine du carré qu'on se proposait de chercher.

Ceci doit suffire pour expliquer la forme du procédé.

Il est facile de conclure de là la vérité du théorème : Étant donné un nombre quelconque non carré, on peut déterminer un certain carré, dont le produit par ce nombre, étant augmenté de l'unité, fasse un carré, et l'on déduira de là une infinité de tels carrés, comme nous l'avons antérieurement démontré (XVI). Mais cela est vrai, non pas seulement si l'augmentation est d'une unité, ainsi que l'énonce Fermat, mais si elle est d'un nombre carré quelconque, comme nous l'avons d'ailleurs prouvé antérieurement. Car, de même que, par exemple, en proposant d'égaler à un carré $13a^2 + 1$, on arrive à $11i^2 + 1 = 12i^2$, d'où $i^2 = 1$; si l'on avait posé tout d'abord $13a^2 + 9$, on serait arrivé à $11i^2 + 9 = 12i^2$, d'où $i^2 = 9$, et l'on calculerait a^2 par rétrogradation, comme ci-dessus. De même, pour tout autre carré ajouté au lieu de 1 ou de 9.

Mais si l'on ajoutait *un nombre quelconque*, j'entends *non carré*, le théorème ne serait plus universellement vrai, ainsi que nous l'avons déjà avancé et qu'il est facile de le prouver. Mais, dans le cas où la chose est possible, on résoudrait la question tout à fait de la même façon, en substituant, au lieu de 1, ce nombre possible quelconque.

On doit également remarquer qu'on procéderait encore tout à fait de même, si, au lieu d'ajouter un nombre quelconque, on devait retrancher un nombre quelconque (possible, bien entendu). On substituerait seulement à $+1$, -1 ou tout autre nombre possible. Cette remarque est essentielle pour ce qui va suivre.

Jusqu'ici nous avons sans doute suffisamment mis en lumière ce qui a un rapport nécessaire à la question. Mais nous ajouterons d'autres développements qui peuvent rendre les calculs plus aisés.

En premier lieu, nous avons dit plus haut qu'il est indifférent de poser au début, soit

$$13a^2+1=(4a-b)^2=16a^2-8ab+b^2,$$

ou bien

$$13a^2+1=(3a+b)^2=9a^2+6ab+b^2.$$

Cela est vrai absolument; cependant il est avantageux de choisir la position pour laquelle b est le plus petit. Ainsi dans l'exemple proposé, où il est clair que $13a^2+1$ est plus près de $16a^2$ que de $9a^2$, puisque la différence est d'un côté $4a^2+1$, de l'autre $3a^2-1$, il est plus avantageux de poser

$$13a^2+1=16a^2-8ab+b^2.$$

De même, pour ce que nous avons dit ensuite que, en posant

$$13a^2+1=9a^2+6ab+b^2,$$

on trouve a plus grand que b, mais plus petit que $2b$, et que l'on peut poser indifféremment

$$\text{soit } a=2b-c, \qquad \text{soit } a=b+c;$$

quoique cela soit absolument vrai, il est cependant préférable de

choisir la position à laquelle correspond la moindre valeur de c. Et puisqu'ici a est évidemment plus voisin de b que de $2b$, on posera avec plus d'avantage

$$a = b + c \qquad \text{que} \qquad a = 2b - c.$$

Il faut entendre la même chose pour les autres différences d, e, f, etc.

La raison en est toujours la même; il s'agit de ramener à l'unité ces différences b, c, d, etc., toujours décroissantes. On y arrivera plus vite, en prenant toujours les plus petites différences et non les plus grandes. Ce qui peut s'appliquer aussi à la méthode connue de réduction des fractions à leur plus simple expression par la recherche du plus grand commun diviseur. Cette remarque se présente d'elle-même, si l'on fait la moindre attention, quoique je ne croie pas qu'on ait coutume de s'y conformer.

L'exemple ci-dessous montre suffisamment qu'il résulte du procédé indiqué un abrégé notable. Le calcul est d'un tiers plus court, pour le même nombre 13, que si l'on prend toujours, comme auparavant, les différences les plus grandes. Dans ce cas, on doit le continuer jusqu'à i; ici il suffit d'aller jusqu'à f:

$$n = 13$$
$$13a^2 + 1 = 16a^2 - 8ab + b^2$$
$$8ab - b^2 = 3a^2 - 1$$
$$3b > a > 2b$$
$$a = 2b + c$$
$$16b^2 + 8bc - b^2 = 12b^2 + 12bc + 3c^2 - 1$$
$$3b^2 + 1 = 4bc + 3c^2$$
$$2c > b > c$$
$$b = 2c - d$$

$$12c^2 - 12cd + 3d^2 + 1 = 8c^2 - 4cd + 3c^2$$
$$c^2 + 1 = 8cd - 3d^2$$
$$8d > c > 7d$$
$$c = 8d - e$$
$$64d^2 - 16de + e^2 + 1 = 64d^2 - 8de - 3d^2$$
$$3d^2 + 1 = 8de - e^2$$
$$3e > d > 2e$$
$$d = 2e + f$$
$$12c^2 + 12ef + 3f^2 + 1 = 16e^2 + 8ef - e^2$$
$$4ef + 3f^2 = 3e^2 - 1$$

$e = 2f$
$f = 1$
Donc $e = 2$
$d = 5$
$c = 38$
$b = 71$
$a = 180$

Pour prouver maintenant que cette méthode peut servir non seulement pour chercher des nombres petits ou ordinaires, mais même des nombres suffisamment considérables, nous en montrerons l'essai sur le nombre proposé, non carré, 109, qui demande le plus grand carré

de tous ceux que traite M. Frenicle, et pour lequel celui-ci avoue n'avoir pu trouver la solution, que M. Fermat lui a communiquée. On aura

$$n = 109,$$

$$109a^2 + 1 = 100a^2 + 20ab + b^2,$$

$$9a^2 + 1 = 20ab + b^2,$$

$$3b > a > 2b,$$

$$a = 2b + c,$$

$$36b^2 + 36bc + 9c^2 + 1 = 40b^2 + 20bc + b^2,$$

$$16bc + 9c^2 = 5b^2 - 1,$$

$$4c > b > 3c,$$

$$b = 4c - d,$$

$$64c^2 - 16cd + 9c^2 = 80c^2 - 40cd + 5d^2 - 1,$$

$$24cd - 5d^2 = 7c^2 - 1,$$

$$4d > c > 3d,$$

$$c = 3d + e,$$

$$\dots\dots\dots\dots;$$

d'où l'on conclut

$y =$	1,	$l = 20m + n =$	17 405 432,
$x = 2y =$	2,	$k = 2l + m =$	35 662 389,
$v = 4x + y =$	9,	$i = 4k + l =$	160 054 988,
$t = 3v - x =$	25,	$h = 3i - k =$	444 502 575,
$s = 5t + v =$	134,	$g = 5h + i =$	2 382 567 863,
$r = 7s - t =$	913,	$f = 7g - h =$	16 233 472 466,
$q = 7r + s =$	6 525,	$e = 7f + g =$	116 016 875 125,
$p = 5q - r =$	31 712,	$d = 5e - f =$	563 850 903 159,
$o = 3p + q =$	101 661,	$c = 3d + e =$	1 807 569 584 602,
$n = 4o - p =$	374 932,	$b = 4c - d =$	6 666 427 435 249,
$m = 2n + o =$	851 525,	$a = 2b + c =$	15 140 424 455 100.

Nous voyons ainsi que le nombre a, racine du carré cherché, a au moins 14 figures, que son carré en a au moins 27 (nombre passablement élevé) et qu'il a réclamé 22 positions. On ne peut guère nier que sa détermination ne soit passablement abrégée, eu égard à la nature de la question.

Mais il y a encore un autre abrégé qui peut souvent supprimer au

moins la moitié du travail, grâce à la règle antérieurement énoncée, à savoir que si la différence entre le produit du nombre proposé par un certain carré et un autre carré quelconque est une partie aliquote du double produit des racines de ces carrés, le quotient de cette division sera la racine du carré cherché. Or cela arrive nécessairement toutes les fois que la différence est 1 ou 2; si donc on trouve un carré dont le produit par le non-carré donné soit, par rapport à un autre carré, en excès de l'unité ou de 2, ou en défaut de 2, il est évident que l'on pourra en déduire le carré cherché. Or cela arrive très souvent dans les opérations, surtout quand il s'agit de nombres un peu forts, pour lesquels surtout il y a besoin d'abrégés.

Par exemple, prenons, comme tout à l'heure, $n = \overline{13}$; puisqu'en posant

$$13a^2 + 1 = 16a^2 - 8ab + b^2,$$

on arrive à l'équation

$$3b^2 + 1 = 4bc + 3c^2,$$

d'où l'on conclut

$$2c > b > c,$$

si l'on avait posé tout d'abord $13a^2 - 1$, on serait arrivé à

$$3b^2 - 1 = 4bc + 3c^2;$$

d'où l'on aurait conclu

$$2c = b, \qquad c = 1, \qquad b = 2, \qquad a = 5.$$

Le carré de ce dernier nombre donnant avec 13 un produit supérieur d'une unité au carré du nombre 18, il s'ensuit que $180 = 2 \times 5 \times 18$ est le véritable nombre a cherché, celui dont le produit du carré par 13 sera inférieur d'une unité à un carré, à savoir $\overline{649}^2$.

De même, pour le nombre proposé 109, en opérant comme ci-dessus, c'est-à-dire en posant

$$109a^2 + 1 = 100a^2 + 20ab + b^2,$$

on arrive à

$$16kl + 5l^2 = 9k^2 - 1, \qquad \text{d'où} \qquad 3l > k > 2l;$$

mais il est clair que si l'on eût posé en commençant $109a^2 - 1$, on serait arrivé à

$$16kl + 5l^2 = 9k^2 + 1, \qquad \text{d'où} \qquad k = 2l, \qquad l = 1,$$

et, en rétrogradant, $a = 851\,525$, nombre dont le carré, multiplié par 109, sera supérieur d'une unité à un carré. On en conclura, de la façon expliquée, que le nombre a cherché, dont le carré multiplié par 109 est inférieur d'une unité à un carré, a pour valeur 15 140 424 455 100. Ainsi le calcul, qui a été poussé jusqu'à y, pouvait être arrêté à l.

De même, pour le nombre non carré proposé 433, si l'on pose

$$433a^2 + 1 = 441a^2 - 42ab + b^2,$$

en poursuivant les opérations suivant la marche prescrite, on arrivera à l'équation

$$8o^2 + 1 = 38op + 9p^2, \qquad \text{d'où} \qquad 5p > o > 4p.$$

Par conséquent, si au début j'avais posé $433a^2 - 1$, j'aurais

$$8o^2 + 1 = 38op + 9p^2, \qquad \text{d'où} \qquad 5p = o, \qquad p = 1, \qquad o = 5, \qquad \text{etc.};$$

$$\begin{array}{lll}
p = 1, & k = 4l - m = 601, & e = 4f + g = 2\,309\,442, \\
o = 5p = 5, & i = 13k + l = 7\,975, & d = 3e - f = 6\,361\,385, \\
n = 4o + p = 21, & h = 2i + k = 16\,551, & c = 2d + e = 15\,032\,212, \\
m = 2n + o = 47, & g = 3h - i = 41\,678, & b = 4c + d = 66\,490\,233, \\
l = 3m + n = 162, & f = 14g - h = 566\,941, & a = 5b + c = 347\,483\,377;
\end{array}$$

d'où $a = 347\,483\,377$, nombre dont le carré 120 744 697 291 324 129, multiplié par 433, donne 52 282 453 927 143 347 857 qui surpasse d'une unité le carré du nombre 7 230 660 684. Par conséquent,

$$5\,025\,068\,784\,834\,899\,736,$$

double produit des racines 347 483 377 et 7 230 660 684, est le nombre a primitivement cherché, dont le carré

$$25\,251\,316\,292\,322\,095\,858\,983\,939\,617\,172\,869\,696,$$

multiplié par 433, donne

$$10\,933\,819\,954\,575\,467\,506\,940\,045\,854\,235\,852\,578\,368,$$

qui est inférieur d'une unité au carré de 104 564 907 854 286 695 713. Ainsi le carré cherché, d'au moins 38 figures, se découvre après 15 positions, en continuant les opérations jusqu'à p seulement.

Je m'arrêterais ici, sans une ou deux remarques qu'il me reste à ajouter comme bon poids; non qu'elles soient en rien nécessaires au sujet, mais parce qu'elles n'en seront peut-être pas moins intéressantes.

En premier lieu, quoique l'abrégé qui vient d'être exposé tout à l'heure pour trouver a au moyen d'un α ou a accessoire (dont le carré, multiplié par n, soit supérieur d'une unité à un carré), d'où l'on passe à l'a vrai (dont le carré, multiplié par n, soit inférieur d'une unité à un carré); quoique cet abrégé soit absolument valable et pratique, si, néanmoins, il plaisait de le négliger et de poursuivre le travail commencé jusqu'à ce que l'on arrive à l'a véritable, il sera facile d'y parvenir sans calculs pénibles parce que les mêmes équations reviennent dans le même ordre. Par exemple, pour le nombre pris ci-dessus 109, après avoir trouvé les équations qui concernent a, b, c, d, etc. jusqu'à m (qui a pour valeur 851 525, c'est-à-dire celle de l'α ou a succédané), on retrouvera les mêmes équations pour m, n, o, p, etc. qu'auparavant pour a, b, c, d, etc., en exceptant toutefois les deux dernières pour x et y, auxquelles on s'arrêtera, mais qui, si l'on ne veut pas s'arrêter là, n'en seront pas moins reconnues conformes à celles pour k et l. Ainsi le calcul institué pour trouver les équations pourra être arrêté dès que l'on sera arrivé à l ou m (c'est-à-dire au point où l'on déterminerait l'α ou a accessoire). Celui qui voudra employer ce moyen pourra donc, sans grande perte de temps, négliger l'abrégé qui a été indiqué en dernier lieu.

L'autre remarque que je voudrais faire est celle-ci. Nous avons jusqu'à présent exposé le mode de recherche de la racine du premier carré, grâce à laquelle on peut très facilement, suivant la série antérieurement exposée, trouver successivement les racines de tous les carrés en nombre infini. Mais, si l'on ne voulait pas employer cette série, on pourrait obtenir les racines de ces autres carrés par le même

procédé qui sert à déterminer la première (toutefois avec un travail un peu plus long). Il suffirait de continuer les opérations commencées jusqu'à ce que l'on arrive à la racine du second, troisième, quatrième carré.

Ainsi, par exemple, prenons, comme ci-dessus, $n = 13$. Étant arrivés à l'équation

$$4ef + 3f^2 = 3e^2 - 1,$$

nous en avons conclu ci-dessus que l'on pouvait poser $e = 2f$, en supposant d'ailleurs $f = 1$, et de là en rétrogradant, nous en avons déduit les autres valeurs jusqu'à celle de a, racine du premier carré. Mais si, au contraire, on pose $f > 1$, on aura $e < 2f$ et, par suite, posant $e = 2f - g$, il faudra poursuivre jusqu'à ce que l'on retombe de nouveau sur une équation semblable, ce qui aura lieu quand on arrivera à l, m, et, en effet, on trouvera

$$4lm + 3m^2 = 3l^2 - 1.$$

Posant alors $m = 1$, on aura $l = 2m = 2$, d'où, en rétrogradant, $a = 233\,640$, racine du second carré. Mais si, au contraire, on pose encore, non pas $m = 1$, mais $m > 1$, on aura $l < 2m$. Posant donc $l = 2m - n$, il faudra poursuivre jusqu'à ce que l'on retombe encore sur une équation semblable, savoir

$$4rs + 3s^2 = 3r^2 - 1,$$

d'où posant $s = 1$, on aura $r = 2$ et $a = 303\,264\,540$. Si l'on posait autrement $s > 1$, procédant toujours de même, on aurait la racine du quatrième carré, puis celle du cinquième, etc., *ad libitum*,

$$n = 13;$$

$s = 1$,	$m = 8n - o = 1\,369$,	$f = 8g - h = 1\,776\,961$
$r = 2$,	$l = 2m - n = 2\,558$,	$e = 2f - g = 3\,320\,282$
$q = 2r + s = 5$ α.	$k = 2l + m = 6\,485$ β.	$d = 2e + f = 8\,417\,525$ γ.
$p = 8q - r = 38$,	$i = 8k - l = 49\,322$,	$c = 8d - e = 64\,019\,918$,
$o = 2p - q = 71$,	$h = 2i - k = 92\,159$,	$b = 2c - d = 119\,622\,311$,
$n = 2o + p = 180$ A.	$g = 2h + i = 233\,640$ B.	$a = 2b + c = 303\,264\,540$ C.
....	....	....

Au reste, pour ce calcul, comme auparavant, dès que l'on aura obtenu le premier a, les opérations seront facilitées par le retour constant des équations semblables, comme on le voit dans l'exemple ci-dessus, où l'on a tant les a vrais (que j'appellerai A, B, C, etc.) que les a succédanés (que je désigne par les lettres α, β, γ, etc.), c'est-à-dire tous ceux dont les carrés, multipliés par le non-carré donné, sont soit inférieurs, soit supérieurs d'une unité par rapport à un carré. Si, en effet, là où par exemple se trouve $s = 1$, on pose $f = 1$, on aura a, la première racine, là où est n; si, au contraire, au lieu de $s = 1$, on pose $m = 1$, on aura, là où est g, $a =$ B racine du second carré, de même que l'on a maintenant $a =$ C racine du troisième carré. Au contraire, en répétant toujours les mêmes opérations, on obtiendra D, E, F, etc., tant que l'on voudra. Ce qui, *mutatis mutandis*, doit aussi être entendu de α, β, γ, δ, etc.

On peut cependant remarquer que de même que de α, lorsqu'il est connu, on peut, par la règle donnée ci-dessus, déterminer A (puisque de $13 \times 5^2 - 18^2 = 1$, on conclut $2 \times 5 \times 18 = 180 =$ A), l'on pourra par A connaître B; par β, C; par B, D; par γ, E; par C, F, etc. Le plus souvent, il en est absolument de même; il n'y a que parfois une légère différence. Ainsi par exemple si l'on prend le non-carré 21, et par conséquent

$$21a^2 + 1 = 25a^2 - 10ab + b^2$$
$$\text{ou bien} = 16a^2 + 8ab + b^2,$$

nous aurons dans un cas les nombres 1.2.5.12 ou bien 1.2.3.5.12, dans l'autre 1.2.7.12 ou 1.2.5.7.12 ou bien encore 1.2.3.5.7.12, suivant que nous prendrons de différentes façons les différences soit additives, soit soustractives, soit des deux sortes. Mais en tout cas on aura $a = 12$ pour la première racine; et les autres s'obtiendront successivement en poursuivant comme ci-dessus. On remarquera cependant que non seulement les carrés des nombres A, B, C, etc., multipliés par le donné 21, sont inférieurs d'une unité par rapport à un carré, mais que les produits par 21 des nombres α, β, γ, etc. sont supérieurs à un carré, non pas cette fois d'une unité, mais du

moins d'une partie aliquote du double produit des racines des deux carrés, partie qui peut servir, comme on l'a vu, à trouver la racine d'un carré cherché. Par exemple,

$$n\alpha^2 = 21 \times 2^2 = 84 = 81 + 3 = 9^2 + 3.$$

Donc

$$\frac{2 \times 2 \times 9}{3} = 12 = \text{A racine cherchée,}$$

et de même pour les autres. Ainsi α fera connaître A; A, B; β, C; B, D; γ, E, etc. Et il en sera ordinairement de même pour les autres nombres. Toutefois il peut arriver que l'on ait seulement A, B, C, etc. Mais il n'y a pas à s'arrêter plus longuement à ce sujet.

$$n = 21;$$

$d = 1,$	$e = 10a - b = 115,$	$i = 10h - g = 12649,$
$c = 2d = 2 \quad \alpha.$	$f = 2e - a = 218 \quad \beta.$	$k = 2i - h = 23978 \quad \gamma.$
$b = 2c + d = 5,$	$g = 2f + e = 551,$	$l = 2k + i = 60605,$
$a = 2b + c = 12 \quad \text{A}.$	$h = 2g + f = 1320 \quad \text{B}.$	$m = 2l + k = 145188 \quad \text{C}.$
....	....	....

Voilà, très illustre Lord, ce qui m'a paru devoir être dit pour expliquer cette solution du problème de Fermat.

Ainsi le très noble Fermat (pour en finir) a son problème résolu par une méthode si multiple à la fois et si heureuse que je ne crois pas qu'il ait pu être traité plus complètement, je ne dis pas par M. Frenicle, lequel a déjà publié ce qu'il a fait là-dessus, mais par Fermat lui-même. Je ne veux pas aller plus loin, car je ne pense point que ni l'un ni l'autre prétende triompher soit de nous (au moins de Votre Seigneurie), soit de notre nation. Mais il me reste à féliciter Votre Seigneurie qui, provoquée par le très noble Fermat à un *coup de lance* littéraire, a su maintenir sans tache l'ancienne gloire acquise autrefois par les Anglais contre les Français, qui a su prouver que les champions de l'Angleterre sont aussi puissants dans la science que dans la guerre. Votre très noble adversaire a pu croire que ces ma-

tières lui étaient réservées et qu'elles seraient inaccessibles pour les autres (car toute terre ne porte pas tout fruit); il avoue cependant qu'*il sera pourtant ravi d'être détrompé par cet ingénieux et savant Seigneur*; il aura donc, lui aussi, à vous féliciter. Pour moi, je ne puis que vous rendre très humblement grâces d'avoir jugé digne d'être appelé à prendre part à cette victoire,

Très insigne Lord,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

JOHN WALLIS.

Oxford, 20/30 janvier 1657/8.

LETTRE XX.

VICOMTE BROUNCKER A JOHN WALLIS.

Monsieur, j'ai reçu hier de Sir Kenelm Digby, avec les deux ci-jointes, une lettre à mon adresse qui ne renfermait que des compliments et un renvoi aux deux autres. Je ne suis pas fâché de voir qu'en somme le désir que M. Frenicle a évidemment de nous faire toute l'opposition possible, n'aboutit qu'à des objections aussi triviales que celles que renferme sa Lettre. Mais je regrette que sa passion l'ait égaré au point qu'il se soit exprimé aussi incivilement. Ses arguments sont si faibles qu'ils méritent à peine une réponse. Sa chicane sur votre solution par le nombre 1 est bien mauvaise; car chacun sait que quelques-uns sont de l'opinion que 1 n'est pas un nombre; mais ceux-là même savent tout aussi bien que, dans l'opinion des autres, il en est un. Et que soit M. Fermat qui a proposé le problème, soit M. Frenicle, qui fait maintenant cette objection, aient pris 1 comme nombre, cela est évident d'après leurs écrits. Mais que 1 fût une solution telle que l'attendait l'auteur du problème, personne ne peut le supposer, et cette solution n'était pas donnée comme telle, mais plutôt pour montrer combien le problème, tel qu'il était énoncé, pouvait être facilement résolu; il aurait dû être conçu autrement ou bien il fallait faire l'exception. Quant à la chicane contre

ma solution, elle provient de ce qu'il n'en a pas saisi le sens que vous avez pleinement exprimé; car autrement il n'aurait aucun motif pour son objection, les parties aliquotes étant restreintes aux parties actuelles exclusivement. Que je ne me sois à aucun égard mis d'accord avec l'exemple 343, cela est parfaitement vrai; mais le problème ne le demandait nullement et il est tout aussi vrai qu'aucune de ses solutions ne s'y rapporte davantage. Car si le cube 1 n'a pas de parties aliquotes, aucun des siens n'est cube de nombre premier, comme dans l'exemple donné 343 est cube de 7 nombre premier. Quelques amis, en compagnie desquels je suis maintenant, ne me permettent pas de vous dire autre chose, sinon que je suis,

Monsieur, votre très fidèle ami et serviteur,

BROUNCKER.

18/28 février 1657/8.

LETTRE XXI

(jointe, ainsi que la suivante, à celle qui précède).

KENELM DIGBY A JOHN WALLIS.

Très honoré Monsieur, je puis sembler être un de ces débiteurs qui se sont mis si fort en retard qu'ils ne peuvent espérer satisfaire leurs créanciers ni oser se présenter devant eux; car il y a maintenant près de quatre mois que j'ai reçu votre très obligeante Lettre du 3 septembre dernier (vieux style). Je pourrais m'excuser, et avec vérité, sur ce que j'ai longtemps été hors de la ville, et imputer ainsi mon silence à ce motif. Mais il n'y a là qu'une excuse qui, pas plus que l'embarras des déplacements ou le dérangement des voyages, ne peut être alléguée pour justifier suffisamment la vingtième partie du retard que je mets à reconnaître humblement, comme je le dois, l'excessive faveur et les politesses infinies de cette noble et généreuse Lettre. Le plus sage pour moi est aussi le moyen le plus candide; c'est d'avoir recours à la pleine et absolue vérité, qui ne manquera jamais de soutenir qui l'aime, aussi longtemps que ses intentions sont sincères et

respectueuses. Qu'elle fasse donc valoir ce moyen en ma faveur! Les obligeantes expressions de votre Lettre étaient tellement hors de proportion ou de possibilité pour mon mérite que je jugeai que des remerciments purs et simples seraient un trop mince retour pour une si haute faveur. Je fus désireux de mettre en compte avec moi quelque autre qui pût vous offrir quelque chose d'assez agréable pour pouvoir rendre bienvenue ma Lettre y servant d'introduction. D'après cela, j'envoyai à M. Fermat votre ingénieux et noble théorème sur le segment d'une pyramide ou d'un cône, le priant de m'en donner la démonstration pour que je pusse vous la transmettre. Et là-dessus, jusqu'à ce que j'eusse sa réponse, je différai de vous écrire, car je pensais qu'il me l'enverrait par le premier ou le second courrier. Mais, depuis ce temps, je n'ai rien eu de lui que des excuses successives, me remettant toujours à la prochaine fois. Il est vrai que j'étais précisément tombé sur l'époque du déplacement des juges de Castres à Toulouse, où il est juge suprême à la Cour souveraine du Parlement; et depuis, il a été occupé par des causes capitales de grande importance, dans lesquelles il a fini par donner une sentence qui a fait beaucoup de bruit et a été très applaudie; il s'agissait de la condamnation au feu d'un prêtre ayant abusé de ses fonctions. Cette affaire vient seulement de finir et l'exécution s'en est ensuivie. Mais ce qui peut être une excuse pour un autre ne l'est pas pour M. Fermat, qui est incroyablement vif et pénétrant en tout ce qu'il entreprend. Aussi, si pendant tout ce temps il n'a pas donné la démonstration de votre théorème (ni aucune autre réponse, mais seulement de grands éloges et applaudissements, toutes les fois que je lui ai écrit à ce sujet), ce m'est maintenant une preuve évidente qu'en fin de compte je ne dois pas en attendre de lui. Je ne dois donc pas espérer de voir ma soif sur ce point satisfaite autrement que par votre obligeance; et pour cela, quand j'aurai le plaisir de vous rendre mes devoirs à Oxford, je vous demanderai humblement cette démonstration. Car certainement, dès que je serai de retour en Angleterre (ce qui, je l'espère, ne sera pas long), un des premiers voyages que j'ai l'intention de faire est celui de ce

célèbre séjour des Muses et des sciences les plus profondes, afin que je puisse vous témoigner de vive voix la grande estime et l'extrême respect que j'ai pour vous, afin que je puisse également recevoir la faveur de saluer, sur votre présentation, vos dignes et nobles collègues et amis les Docteurs Wilkins et Ward, que j'honore infiniment.

Comme j'étais ainsi désespéré de recevoir ce que j'attendais de M. Fermat, et que je me résolvais donc à rompre mon silence, et à vous supplier humblement de l'excuser, en vous en disant la véritable cause, j'ai reçu de vous une nouvelle faveur : votre très obligeante Lettre du 21 novembre dernier, qui ne m'est arrivée que très tardivement, par suite, à ce que j'ai compris, de l'absence de Londres de Mylord Brouncker et aussi par le fait de M. White; car elle n'est parvenue ici que par la dernière poste. M. Frenicle était à dîner avec moi lorsqu'on me l'apporta; là-dessus quelques affaires indispensables me forcèrent à m'absenter pour quelques heures; pendant ce temps, je la lui laissai à sa disposition, après l'avoir seulement parcourue rapidement à part moi. A mon retour, je trouvai qu'il avait écrit à la hâte et dans ma chambre, où je l'avais laissée, quelques réflexions sur la première partie de votre Lettre, et sous forme d'une épître adressée à moi-même; il se réservait d'ailleurs de m'envoyer ou m'apporter ses considérations sur la seconde partie de ce jour-là en huit; car il allait quitter la ville le lendemain matin pour quatre ou cinq jours. J'ai longtemps discuté avec moi-même pour savoir si je vous enverrais ou non son écrit, où il exprime des sentiments si différents des vôtres. En dernier lieu deux raisons m'ont convaincu que le mieux serait de vous l'envoyer; d'une part, il désirait très sérieusement que je le fisse; si je ne l'avais pas fait et que dès lors vous n'eussiez pas su quoi y répondre, il aurait pu mal juger votre silence et se complaire dans la croyance à son avantage dont, je ne doute pas, vous ne serez pas longtemps à le détromper. D'un autre côté, la variété des opinions entre des hommes éminents et savants ne fait pas peu pour le progrès de la Science, en donnant occasion de décou-

vrir de profondes et abstruses vérités. J'ai donc fait copier par mon secrétaire cette Lettre adressée à moi (car elle était écrite tellement à la hâte par une main française que vous n'auriez jamais été capable de la lire) et je vous l'envoie ci-incluse, comme je ferai pour sa prochaine, aussitôt que je l'aurai reçue.

Après vous avoir si longtemps importuné à ce coup, je serais trop blâmable, si je prolongeais davantage votre ennui, en vous faisant une apologie de mon procédé. Je ne puis mieux l'amender qu'en ne continuant pas à mal faire; je coupe donc court, en marquant moi-même que je suis vraiment,

Noble et illustre Sir,

Votre très humble et très affectionné serviteur et admirateur,

KENELM DIGBY.

Paris, 6 février 1658.
(Nouveau style.)

LETTRE XXII

(jointe à la précédente)

DE FRENICLE A KENELM DIGBY.

Il me paraît véritablement étonnant, très illustre Seigneur, que des mathématiciens, d'ailleurs éprouvés, aient pu se méprendre dans leur réponse aux deux problèmes numériques du clarissime M. Fermat, sur les cubes et carrés à ajouter à toutes leurs parties aliquotes; qu'ils n'aient pas hésité à présenter pour la seconde et la troisième fois l'unité comme une solution, ainsi qu'on peut le voir dans la lettre du clarissime Wallis, datée d'Oxford le 21 novembre, que vous avez bien voulu me donner à lire. Car quel arithméticien, même du vulgaire, même des apprentis les plus novices, ne rougirait pas de donner cette solution, quand bien même l'unité résoudrait parfaitement la question? C'est qu'elle contient en soi tous les degrés et toutes les figures des nombres, en sorte que, sans être nombre elle-même, elle les repré-

sente tous en quelque sorte; mais aux problèmes dont il s'agit, l'unité elle-même ne peut satisfaire. En voici les énoncés :

I. Trouver un cube (p. 311, lignes 21 à 25).... propriétés.

II. On demande aussi (p. 311, lignes 26 à 27).... cube.

Ainsi on demande un nombre qui ait des parties aliquotes; mais un nombre est une pluralité d'unités, et l'unité elle-même n'est pas un nombre; elle ne résout donc pas la question, où l'on demande un nombre, non pas quelconque, mais qui ait des parties aliquotes qui puissent lui être ajoutées et qui soit de même nature que le nombre 343, dont les parties sont énumérées. Mais quelles sont les parties de l'unité? Il est clair que si elle n'en a pas, ainsi que l'avoue Wallis lui-même, elle n'est aucunement de la même nature que le nombre 343, cube ayant des parties aliquotes, qui, ajoutées à ce nombre, en donnent un autre carré.

Si d'ailleurs on veut, pour les parties des nombres, aller jusqu'aux fractions, l'unité, comme aussi bien tout nombre quelconque, a une infinité de parties (si l'on prend les fractions comme des parties) que dès lors on ne peut additionner. On est donc si loin de la question que je suis stupéfait et honteux de voir un pareil savant, non seulement accepter cette réponse comme une solution, mais encore la louer et l'approuver; bien plus, oser affirmer que cette prétendue solution répond très exactement aux questions.

Venons maintenant à l'autre solution du très noble mylord Brouncker, par des nombres fractionnaires, et examinons si elle peut être admise.

J'ai dit plus haut que si l'on reçoit les fractions comme parties, on peut à tout nombre, entier ou fractionnaire, assigner une infinité de parties.

On ne peut donc faire aucune addition de ces parties. Si, par exemple, on prend pour le cube $\frac{343}{64}$, pourquoi, à côté des parties énumérées, $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$, ne pas compter tout aussi bien $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, etc., $\frac{7}{32}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{7}{8}$, etc., ou même $\frac{343}{128}$? Car il n'est nullement besoin, pour

avoir des parties, de conserver toujours le même dénominateur. En regard de celles qui sont données, $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$, il en ressort nécessairement, pour le même nombre $\frac{343}{64}$, d'autres : $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{49}$, $\frac{1}{343}$ qui, ajoutées aussi avec ce nombre, ne donneront pas un carré.

Mais quand il n'y aurait pas pour $\frac{343}{64}$ d'autres parties à considérer légitimement que celles qui ont été données et qui gardent le même dénominateur, qui ne voit qu'il n'y a là que ce même nombre 343 donné par M. Fermat, sauf un tout petit changement, et que la solution est absolument dérivée de la sienne? Si, étant donné le triangle rectangle 3.4.5, on en cherchait un autre pareil, suffirait-il, comme solution légitime et digne d'un homme de science, de fournir son multiple 6.8.10? Pourquoi aussi ne pas, de même, donner avec des fractions un nombre carré qui, ajouté à ses parties, fît un cube? Il n'y a pas évidemment d'autre motif, si ce n'est que M. Fermat n'a pas, pour le carré, donné d'exemple comme pour le cube. Mais maintenant que, dans l'opuscule écrit en latin et qui, très noble Seigneur, vous est dédié, se trouve un carré satisfaisant à la question, il sera facile, par le même moyen, en divisant ce carré par des carré-cubes, d'en fournir autant qu'on voudra.

Je ne suis pas plus satisfait du motif allégué pour ne pas fournir plusieurs cubes : parce que Fermat, dit-on, n'en demande pas plusieurs. Quant à regarder ce problème comme ne valant pas la peine de recherches ultérieures, cette dernière excuse pourrait être admise, si l'on n'avait pas consacré ses veilles à la question avant de feindre qu'on la néglige. Il y a dans cette ville de très éminents mathématiciens, qui, quoique nommément provoqués par M. Fermat à la solution de ces problèmes, ont préféré se taire plutôt que de faire quelque réponse déplacée (seul Frenicle les a abordés et en a obtenu la solution ; chacun peut se glorifier de ce qui lui est particulièrement donné ; il a cela, d'autres ont autre chose ; il faut reconnaître qu'on peut dire franchement : Nous ne pouvons pas, tous, faire toutes choses) ; mais ce silence n'a causé aucun préjudice à leur réputation. Mais quand Wallis

présente à plusieurs reprises l'unité comme étant le cube cherché, et qu'il néglige d'en rechercher d'autres, parce que Fermat n'en demande pas plusieurs, il est inexcusable, puisqu'en donnant l'unité, il ne donne en fait aucun cube. Il est d'ailleurs aisé de déprécier ce à quoi on ne peut atteindre; mais il ne convient guère à un professeur de Mathématiques de demander à quoi peuvent être utiles ces problèmes; on pourrait tout au plus nous pardonner ce langage à nous, qui ne faisons pas profession de ces sciences, mais nous y exerçons pour notre seul plaisir.

On aurait aussi bon droit de demander à Wallis à quoi bon, et pour quel profit, la peine qu'il a prise si longtemps à la recherche malheureuse de la quadrature du cercle, ou même à la composition de son *Arithmétique des infinis;* rien de tout cela ne peut servir à aucun usage mécanique; mais à quoi bon presque toute la Géométrie et l'Arithmétique, si l'on excepte quelques faibles parties, d'ailleurs les plus vulgaires, et que méprisent les savants, tandis qu'elles servent aux calculs des géodètes, des arpenteurs, des marchands, ou des praticiens des deux architectures, et autres pareils? Car tout le reste, plus secret et plus précieux, ne regarde que la subtilité et la perfection de la Science; mais c'est le propre de l'intellect humain que de rechercher la vérité, il n'y a pas d'autre motif qui ait engagé tant d'hommes éminents à s'adonner à l'étude, et l'on ne peut traiter d'inutile, en Science, l'acquisition d'aucune vérité.

Allant plus loin, je vois qu'il propose un problème assez élégant; il demande, en effet, les nombres carrés qui ajoutés, chacun à la somme de ses parties aliquotes, font le même nombre; comme sont 16 et 25, dont chacun, ajouté à la somme de ses parties, fait 31. Mais il semble avoir proposé là, à peu près au hasard, la première question qui lui venait à l'esprit, comme s'il avait cru que Fermat eût procédé de la sorte en posant ses problèmes; je demande donc à Wallis s'il a de tels carrés, ou du moins s'il sait d'une façon certaine et démonstrative qu'il y a ou qu'il n'y a pas, dans toute la multitude des nombres, d'autres tels carrés premiers entre eux que 16 et 25. Après cela, il aura

une réponse; car il ne doit pas ignorer si ce qu'il propose est impossible ou non, et un mathématicien ne propose pas à la légère et sans mûr examen ce qui lui passe tout d'abord à l'esprit, à moins qu'il ne le fasse, pour son instruction, sur des questions qu'il aurait vainement essayé de résoudre.

Au reste, si, dans cette première partie, Wallis n'a guère réussi, il n'a guère été plus heureux dans le reste; il l'a même été encore moins, alors qu'il donne comme solutions différentes des nombres multiples, et que n'ayant rien fait que multiplier par 2, 3 ou un autre nombre, il se vante d'avoir montré là-dessus une suffisante preuve de ses forces. Il me serait très facile de le faire ressortir avec nombre d'autres absurdités; mais je n'ai pas maintenant le loisir de tout discuter en particulier; cependant votre bonté et vos faveurs me font tellement votre esclave que je ne puis refuser aucun travail pour accomplir vos ordres ou me prêter à vos désirs; vous me trouverez donc toujours tout prêt à vous obéir. Je vous salue.

Paris, 3 février 1658.

LETTRE XXIII.

John Wallis a Kenelm Digby.

Très illustre Seigneur, votre lettre datée de Paris, 6 février style nouveau, m'est arrivée le 19 février vieux style, au moment où j'allais me coucher, envoyée par le très honoré vicomte Brouncker, qui l'avait reçue la veille, en même temps que la lettre y incluse de M. Frenicle à vous : dès le lendemain, je préparais ma réponse, mais j'ai différé de l'envoyer jusqu'à présent, parce que vous me faisiez espérer, pour la semaine suivante, l'envoi d'une autre lettre que nous n'avons pas encore reçue; je croyais donc pouvoir répondre à tout ensemble, et cela d'autant plus que, quand vous avez écrit votre dernière, vous n'aviez pas encore reçu, comme il semble bien, la mienne datée du 26 décembre, ni même celle que vous a envoyée un peu auparavant le vicomte Brouncker. Je ne puis faire autrement que de vous remercier

très humblement de la très grande faveur dont vous continuez à m'honorer, et me féliciter, en même temps que notre Oxford, de l'espoir que vous nous donnez de dissiper bientôt par votre présence la tristesse que nous cause la mort de votre si savant ami Longbain; perte presque irréparable, survenue le 9 février à la suite d'une pleurésie. Voilà, en bien peu de temps, trois hommes incomparables, Armagh, Selden, Longbain, disparus au grand dommage de la Science et aux amers regrets de l'Angleterre.

Quant à la lettre du très noble Frenicle, que renfermait la vôtre, je suis embarrassé pour répondre. Car s'il s'agit d'injures, j'aime mieux me taire que de donner la réplique.

Que le nombre 1 n'ait pas de parties aliquotes, cela n'est pas nouveau et je ne l'ignorais pas. Mais que 1 ne soit pas cube, qu'il ne soit pas nombre, j'aurais bien pu croire que quelque autre l'eût dit, mais non pas Frenicle, qui l'a déjà donné et comme nombre et comme cube. Car, si la renommée ne m'a pas trompé, il a fourni, pour un autre problème de Fermat, 1 et 1728 comme deux nombres cubes dont la somme est égale à celle des deux cubes 1000 et 729. Il l'appelle encore nombre dans le livre qu'il a publié et que j'ai la reconnaissance de devoir à votre obligeance. Page 6 : « *Soient posés*, dit-il, *les deux nombres* 1 *et* 7 » à un endroit où il parle de cette même question. Il l'appelle carré, page 17, en reproduisant les paroles de Fermat, dans l'exposition de la seconde question : « *Le carré* 1, *multiplié par* 3, *après addition de l'unité, fait* 4. » Et Frenicle, page 21 à la fin, confirme cette expression par ses propres termes, qui énoncent la même chose. De même, page 23, « *produit de* 5 *par le carré* 1 »; page 25, ligne 19 : « *Le nombre* 7 *multiplié par le carré* 1 », et, ligne 23 : « *Le plus petit nombre sera donc carré, à savoir* 9, *et le plus grand*, 11, *multiplié par le carré* 1. » De même, en d'autres nombreux endroits. Comment donc, s'il avoue qu'il est carré, niera-t-il qu'il soit cube? ou bien si, pour les clarissimes MM. Fermat et Frenicle, il est aussi bien nombre que carré et cube, je ne vois pas pourquoi il ne le serait pas pour nous.

Quand nous ne serions, moi et le très honoré Vicomte, que des *arith-*

méticiens du vulgaire ou même *des apprentis les plus novices,* nous ne pouvons bien comprendre ce qui peut *étonner,* faire *rougir* ou rendre *stupéfait et honteux* votre clarissime Correspondant. Le problème proposé était bien de trouver un cube tel qu'ajouté à la somme de toutes ses parties aliquotes il fît un carré. Or je dis que 1 est cube, qu'au moins Frenicle doit le tenir pour tel, et qu'ajouté à la somme de toutes ses parties aliquotes, qui sont nulles, il vient toujours 1, qui est aussi carré. On demande aussi un carré tel qu'ajouté à la somme de toutes ses parties aliquotes, il fasse un cube. Or je dis que 1 est encore carré (du moins il doit être carré pour Fermat et pour Frenicle, puisqu'ils l'ont assez souvent affirmé comme tel), et qu'ajouté à la somme de ses parties aliquotes, qui sont nulles, il vient toujours 1, qui est cube. Pourquoi donc craindrions-nous d'affirmer non pas deux, trois fois, mais quatre, cinq, s'il le faut, qu'un seul et même nombre 1 satisfait aux deux questions?

J'ignore absolument ce qui peut émouvoir la bile de votre clarissime Correspondant, qui n'a pas été mis en cause, je ne dis pas provoqué, et avec qui, quand j'ai écrit la lettre qu'il attaque, je n'avais jamais eu aucune affaire; dont je n'avais jamais vu le Livre, dont je n'avais rien entendu dire; que je suis donc bien loin d'avoir blessé en quoi que ce soit. Ce n'est pas parce que, soit lui, soit Fermat, ce dont je ne puis douter, attendaient quelque autre nombre, ou parce que lui-même (ce que j'ignorais alors) en avait donné d'autres, qu'ils doivent être fâchés de voir qu'on leur fournit ce nombre inattendu, que Fermat, proposant le problème, n'avait pas prévu, et contre lequel il ne s'était donc pas précautionné, ou que Frenicle, dans sa solution, n'a pas aperçu et n'a donc pas produit. C'est de même que Fermat n'a sans doute pas prévu et que Frenicle n'a pas découvert que la troisième question pouvait être résolue par des fractions; que, par suite, il demandait simplement des *carrés,* alors qu'il ne voulait que des *carrés entiers.*

Pour ce que dit votre clarissime Correspondant des parties aliquotes d'un nombre fractionnaire, sur ce que nous avions seulement avancé hypothétiquement (à savoir si Fermat y admettait aussi des parties ali-

quotes), je ne veux pas déterminer s'il faut l'attribuer à la chaleur de sa passion ou plutôt à sa hâte; mais j'ai bien peine à croire qu'il ait réfléchi posément, lorsque, comme parties aliquotes du nombre $\frac{343}{64}$, il demande qu'on compte $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, etc., ou encore $\frac{7}{32}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{7}{8}$, etc., non moins que $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$.

Que ces parties ne doivent pas être regardées comme aliquotes (pas même pour la quantité continue, et non seulement pour la discontinue), cela est certain tant par Euclide, VII, déf. 3 et 4, que par V, déf. 1, où, pour la nature de la partie (aliquote), il est spécifié qu'elle doit mesurer le tout, c'est-à-dire que, prise un certain nombre de fois, elle doit lui devenir égale; or cela n'a pas lieu pour celles qu'il propose. Par exemple, le nombre $\frac{7}{8}$, pris 6 fois, est inférieur au nombre $\frac{343}{64}$; mais, pris 7 fois, il lui est supérieur. Il n'en est donc pas une partie aliquote, mais bien aliquante, ou, autrement, il en est plusieurs parties, suivant le langage d'Euclide; de même pour les autres. Quant à $\frac{343}{128}$, qu'il prétend de même être une partie aliquote du même nombre $\frac{343}{64}$, on peut, à vrai dire, soutenir cela sous un meilleur prétexte, puisqu'il faut au moins l'admettre pour la quantité continue, au même titre que $\frac{1}{2}$ sera tenu pour partie aliquote du nombre 1, ou $\frac{3}{2}$ pour partie aliquote du nombre 3. Mais pour la quantité discontinue, on ne doit pas l'admettre. De même, en effet, que celui qui compte comme unités 343 $\left(\text{ou } \frac{343}{1}\right)$ suppose séparées en acte ces unités, mais non pas les moitiés ou autres parties des unités, de même pour $\frac{343}{64}$, celui qui compte les 64mes suppose ces 64mes (en tant que comptés) séparés en acte et dénombrables; mais il ne fait pas cette supposition pour les 128mes qu'on peut bien dire exister en puissance et comme mesurables (de même que les moitiés dans les unités), mais non pas distingués en acte.

Si j'ai négligé de pousser plus loin la solution du problème proposé, j'en ai donné plusieurs fois les motifs. Si votre clarissime Correspondant n'y ajoute point de foi, on ne peut guère croire qu'il le fasse alors que je les répéterais encore à nouveau.

Mais, puisqu'il insiste d'une façon si importune, en allant presque jusqu'aux injures, pour le cas où je ne le ferais point, je veux bien (pour la première fois) lui donner satisfaction en abordant sérieusement cette question du cube dans le sens où il la prend. Il verra ainsi que ses mystères des parties aliquotes ne nous sont pas inaccessibles et il n'aura pas à répéter son : « Il est facile de déprécier ce que l'on ne peut atteindre. » Nous disons donc :

1. Il est clair qu'une puissance quelconque d'un nombre premier, ajoutée à la somme de ses parties aliquotes, est la somme d'une progression géométrique (soit $1.R.R^2.R^3.$etc.), dont le premier terme (A) est 1, tandis que la racine ou raison commune de la progression (R) est ce nombre premier, et que le nombre des termes (T) est supérieur d'une unité à l'exposant de la puissance en question.

2. On sait également qu'en général (*voir* notre *Mathesis universalis*, prop. 68, Chap. 33) la somme d'une progression géométrique est $\frac{R^T-1}{R-1}A$; que, par conséquent, dans le cas présent, où $A=1$, elle sera $\frac{R^T-1}{R-1}$.

3. De même, puisqu'il s'agit d'une puissance cubique, et dès lors 3me, 6me, 9me ou autre, dont l'exposant est divisible par 3, il est clair que le nombre T des termes, en tant que supérieur d'une unité à l'exposant de la puissance proposée, sera 4, 7, 10 ou quelque autre nombre supérieur d'une unité à un multiple de 3.

4. Si donc nous divisons la puissance 4me, 7me, 10me, etc. d'un nombre premier quelconque, diminuée d'une unité (à savoir R^T-1), par l'excès sur l'unité du même nombre premier (soit $R-1$), nous

aurons la somme d'une certaine puissance cubique (3[me], 6[me], 9[me], etc.) de ce nombre, et des parties aliquotes de cette puissance.

5. Traitant d'après cette règle tous les nombres premiers plus petits que 100, je trouve que, pour le nombre 2, le cube ajouté à ses parties aliquotes est $15 = 3 \times 5$; que son cubocube (ou puissance 6[me]), augmenté de même, est 127 nombre premier; que la 9[me] puissance, augmentée de même, est $1023 = 3 \times 11 \times 31$.

De même pour les autres, suivant le Tableau ci-dessous, où les sommes avec les parties aliquotes sont décomposées en facteurs premiers.

Racine.	Cube ajouté à la somme de ses parties aliquotes.	Racine.	Cube augmenté.	Racine.	Cube augmenté.
1	1	7	2×2×2×2×5×5	47	2×2×2×2×2×3×5×13×1
2	3×5	11	2×2×2×3×61	53	2×2×3×3×3×5×281
2×2	127	13	2×2×5×7×17	59	2×2×2×3×5×1741
2×2×2	3×11×31	17	2×2×3×3×5×29	61	2×2×31×1861
2×2×2×2	8191	19	2×2×2×5×181	67	2×2×2×5×17×449
2×2×2×2×2	3×5×17×257	23	2×2×2×2×3×5×53	71	2×2×2×2×3×3×2521
3	2×2×2×5	29	2×2×3×5×421	73	2×2×5×13×37×41
3×3	1093	31	2×2×2×2×2×2×13×37	79	2×2×2×2×2×5×3121
3×3×3	2×2×11×11×61	37	2×2×5×2603 (1)	83	2×2×2×3×5×7×13×53
5	2×2×3×13	41	2×2×3×7×29×29	89	2×2×3×3×5×17×233
5×5	19531	43	2×2×2×5×5×11×37	97	2×2×5×7×7×941
5×5×5	2×3×11×71×521				

Celui qui le jugera utile pourra, de la même manière, faire cette détermination pour les cubes de davantage de nombres premiers ou pour d'autres puissances cubiques de ceux-ci.

6. Il est clair, d'après un tel examen de ces cubes, qu'il n'y en a aucun qui seul puisse satisfaire à la condition proposée, à l'exception de 1 et du cube du nombre 7. Comme en effet il n'y a pas de nombre premier, sauf 1, qui puisse être carré, on ne peut attendre un autre carré, si ce n'est là où tous les facteurs sont par paires; ce qui a bien lieu pour le nombre 7, où l'on a 2.2.2.2.5.5; mais nulle part ailleurs.

(1) Dans la seconde édition, 2603 est remplacé par le produit 19×137.

7. Ainsi, pour avoir un autre carré égal à la somme d'un cube et de ses parties aliquotes, à moins d'examiner les cubes d'autres nombres premiers ou d'autres puissances de ceux-ci, il faut prendre un cube formé par les puissances cubiques de deux ou plusieurs nombres premiers.

8. Si l'on multiplie entre elles des puissances quelconques de deux ou plusieurs nombres premiers, le produit augmenté de ses parties aliquotes est égal au produit des puissances composantes, augmentées chacune de ses parties aliquotes. Si, par exemple, on multiplie $a^3 + a^2 + a + 1$ par $b^2 + b + 1$, on aura la somme du nombre $a^3 b^2$ et de ses parties aliquotes; en multipliant par $c + 1$, on aura la somme du nombre $a^3 b^2 c$ et de ses parties aliquotes. Ce qui peut d'ailleurs s'étendre en général à deux nombres quelconques premiers entre eux.

9. Par conséquent, un cube formé de deux ou plusieurs des cubes ci-dessus (pourvu qu'ils ne proviennent pas du même nombre premier), après addition de ses parties aliquotes, sera égal au produit des cubes composants, augmentés de même. Par exemple, le cube du nombre 2, ainsi augmenté, est $15 = 3 \times 5$; celui du nombre 3 est $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$; donc le cube du nombre 6 ou 2×3, ainsi augmenté, sera égal au nombre $600 = 15 \times 40 = 3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$. De même pour les autres.

10. Dès lors, pour qu'un cube ainsi composé, augmenté de ses parties aliquotes, fasse un carré, il faut prendre des cubes composants tels qu'en prenant tous les facteurs premiers de ces cubes ainsi augmentés, ils soient doubles, ou autrement que chacun de ces facteurs premiers se présente un nombre pair de fois.

11. Or, parmi les facteurs des cubes augmentés ci-dessus, les nombres premiers 41, 71, 127, 137, 181, 233, 257, 281, 421, 449, 521, 941, 1093, 1741, 1861, 2521, 2603 (¹), 3121, 8191 et 19531 ne se pré-

(¹) Ce nombre 2603 a été supprimé dans la seconde édition, qui a ajouté 137.

sentent qu'une fois; il est donc clair que les cubes où ils figurent, c'est-à-dire les cubes des nombres 19, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 89, 97, le second, le quatrième et le cinquième cube du nombre 2, le second cube de 3, et le second et le troisième cube de 5 doivent être immédiatement éliminés comme impropres à la question (tant que l'on ne fera pas le calcul pour encore plus de cubes), puisqu'il ne pourra y avoir de paire de ces facteurs dans aucune combinaison des cubes ci-dessus. Mais si l'on élimine le cube du nombre 61, il faudra aussi éliminer le troisième cube du nombre 2, puisque le facteur 31 ne se rencontre pas ailleurs. A la suite de cette dernière élimination, il faudra faire celle du cube de 43, dont le facteur 11 n'aura plus de pareil; car il ne se rencontre nulle part ailleurs que dans le troisième cube du nombre 3, où il est déjà en double. Après cette élimination, on fera encore celle du cube du nombre 31, où 37 sera désormais solitaire. Enfin on éliminera le cube de 17, car nulle part ailleurs on ne trouve 29 solitaire (car il est double pour le cube de 41).

12. Des cubes qui restent, il est clair que celui de 1, qui ne change rien dans la multiplication, est inutile pour la composition. De même celui du nombre 7, où les facteurs de la somme sont tous par paires; toutefois quand nous aurons trouvé un autre cube satisfaisant au problème, ce cube de 7 pourra nous servir, puisque son produit avec l'autre satisfera également, un carré, multiplié par un carré, donnant un carré (remarque qui doit d'ailleurs s'entendre de deux cubes quelconques premiers entre eux et satisfaisant au problème); en attendant toutefois cet autre cube, il faut écarter celui de 7, dont les facteurs étant tous par couple, ne peuvent s'accoupler avec aucun autre facteur solitaire.

13. Examinons donc les autres cubes séparément. Le facteur 53 ne se rencontre que pour les nombres 23 et 83; il est donc clair qu'il faut combiner les cubes de ces nombres ou bien les éliminer tous deux. Mais, en réunissant les facteurs en regard de chacun d'eux, on trouve, en dehors de 2 pris six fois, 3, 5, 53 pris chacun deux fois, les soli-

taires 2, 7, 13; on cherchera donc ailleurs des facteurs pour les coupler. Comme 13, parmi les facteurs déjà éliminés, ne se rencontre que pour 47 et 5, essayons ces deux nombres; si aucun ne réussit, il faudra éliminer 83 et 23.

Au nombre 47, on trouve, outre les paires 2, 3, 5, 13, 17 qui, réunis aux trois solitaires précédents 2, 7, 13, couplent bien 2 et 13, mais donnent désormais comme solitaires 3, 5, 7, 17. Réunissons-les aux facteurs en regard de 13, où l'on peut seulement espérer de coupler 17, comme là 5, 7, 17 sont solitaires, il ne reste plus que 3 d'isolé. Si nous lui cherchons un double dans les facteurs au nombre 41, 7 restera solitaire sans espoir désormais de compagnon; si nous prenons les facteurs pour 5, 13 sera de même cette fois abandonné à lui seul. Allons au nombre 11, il restera comme solitaires 2 et 61; pour le dernier de ceux-ci, nous pouvons bien trouver un compagnon dans le troisième cube du nombre 3, mais 2 n'en restera pas moins isolé sans espoir d'appareillage. Au premier abord, on pourrait croire qu'on peut recourir au premier cube de 3, mais on doit se l'interdire, puisque le troisième cube du même nombre 3, qui a déjà été pris, comprend le premier. Si enfin (seul espoir qui nous reste), pour trouver un compagnon au solitaire 3, nous allons au nombre 2, il viendra comme solitaire 5; et cherchant, pour coupler celui-ci, au premier cube de 3 (le seul qui, n'ayant pas encore été rejeté, puisse nous donner espoir), il restera le nombre 2 solitaire et sans espoir de compagnon; car, pour la raison déjà indiquée, on ne peut recourir au troisième cube de 3 pour trouver le second de la paire. Ainsi il ne reste aucun moyen, comme le prouve l'inspection du tableau; donc, des nombres 47 et 5, le premier ne réussit pas.

Il reste donc à essayer le nombre 5 pour trouver, s'il est possible, des compagnons aux solitaires 2, 7, 13 ci-dessus mentionnés. Or on y trouve, outre les doubles, les solitaires 3, 13 qui, réunis aux solitaires 2, 7, 13, laissent encore comme solitaires 2, 3, 7. D'ailleurs 7 ne se trouve nulle part ailleurs qu'aux nombres 13 et 41, dont aucun des deux ne peut satisfaire. 13, en effet, laisserait solitaire sans espoir

de compagnon le nombre 17, qui nous rejetterait inutilement au nombre 47 déjà écarté. 41, au contraire, permettrait de doubler les nombres 3 et 7, mais 2 resterait toujours solitaire sans espoir de compagnon, si ce n'est par les nombres 3 ou 11, séparément et non ensemble; or 3 laisserait comme solitaire 5, auquel on ne peut trouver de compagnon que par 2, qu'il faut abandonner sans espoir, car il laisse à son tour le solitaire 3, et nous renvoie inutilement à 11 comme seul moyen de trouver le compagnon cherché. On ne peut davantage prendre 11 au lieu de 3 pour coupler le facteur 2; car il resterait alors comme solitaires 3 et 61, et si pour le dernier on peut se procurer un double au troisième cube de 3, pour le premier, 3, il n'y en aura pas; car on ne peut l'espérer de 2 qui laisserait 5 à abandonner solitaire. Ainsi, tout pesé, il est certain qu'on ne peut trouver de ressources ni par 5 ni par 47; il faut donc éliminer et le nombre 83 et tout aussi bien le nombre 23.

14. Prenons maintenant le nombre 47; on y trouve, outre les doubles, les facteurs solitaires 2, 3, 5, 13, 17; or 13 ne se rencontre pas dès lors ailleurs qu'au nombre 5, ni 17 ailleurs qu'au nombre 13; il est donc clair qu'il faudra soit combiner ensemble les cubes de 5, 13 et 47, soit les éliminer tous ensemble.

Or 5 fournit les facteurs solitaires 3, 13, et le nombre 13, les facteurs solitaires 5, 7, 17, tandis que 47 nous donnait les facteurs solitaires 2, 3, 5, 13, 17. Réunissant tous ces facteurs, il reste, en dehors de ceux qui se doublent par la réunion, les solitaires 2 et 7. Parmi les nombres non éliminés, 41 est désormais le seul où l'on trouve 7; il faut donc combiner ce nombre avec les trois autres, ou les éliminer tous quatre ensemble.

Mais 41, outre les doubles, donne les facteurs solitaires 3 et 7, qui, réunis aux précédents 2 et 7, permettent de doubler 7, mais laissent encore comme solitaires 2 et 3, auxquels il faut désormais chercher des compagnons. On peut les trouver de deux manières différentes, sans plus.

En premier lieu, le nombre 11 fournit, outre les doubles, les facteurs solitaires 2, 3, 61 qui, unis aux précédents 2 et 3, les doublent, en ne laissant comme solitaire que 61, pour lequel on trouvera un compagnon au troisième cube de 3, où 61 est le seul facteur solitaire. Par conséquent, si avec les quatre cubes des nombres précités 5, 13, 41, 47, on combine celui du nombre 11 et le troisième cube ou la neuvième puissance du nombre 3, le cube formé par cette combinaison, étant augmenté de la somme de toutes ses parties aliquotes, fera un carré dont les facteurs premiers seront les mêmes que ceux des cubes composants augmentés de même; ces facteurs premiers seront donc : 2 seize fois, 3 quatre fois, 5, 7, 11, 13, 17, 29, 61 deux fois.

D'ailleurs si ce même cube, ainsi trouvé, est multiplié par le cube du nombre 7, le produit sera encore cube et, augmenté de ses parties aliquotes, il fera un carré qui aura de plus que le précédent les facteurs 2 quatre fois, et 5 deux fois.

D'ailleurs le cube ainsi composé ne laisse d'intact, parmi ceux du Tableau ci-dessus, que le cube 1 qui ne change rien, et le cube du nombre 2 qui, augmenté de ses parties aliquotes, fait 3×5, nombre non carré; en effet, le premier cube du nombre 3 se trouve compris dans le troisième et ne peut rentrer dans la combinaison; dès lors il est clair que le cube ainsi composé ne peut plus être combiné avec aucun de ceux du Tableau, en sorte que le produit ainsi formé, étant augmenté de ses parties aliquotes, fasse un carré.

En second lieu, on peut cependant compléter autrement le cube formé par la combinaison de ceux des nombres 5, 13, 41, 47, qui, comme j'ai dit, laissent comme solitaires les facteurs 2 et 3; mais il faut cette fois laisser de côté le cube du nombre 11 et dès lors le troisième cube de 3, qui doivent être, comme ci-dessus, pris ensemble ou écartés ensemble, à cause du facteur 61 qui ne se trouve pas ailleurs. Le cube du nombre 2 fournira les facteurs solitaires 3 et 5, et le premier cube du nombre 3 les facteurs solitaires 2 et 5; de la sorte, les facteurs solitaires précédents 2 et 3 trouveront des compagnons, et 5, rencontré de part et d'autre, sera doublé. Ainsi, en combinant avec les

cubes des nombres 5, 13, 41, 47 ceux de 2 et de 3, on aura un cube qui, augmenté de ses parties aliquotes, fera un carré dont les facteurs premiers, les mêmes que ceux des cubes composants augmentés de même, seront : 2 quatorze fois, 3 et 5 quatre fois, 7, 13, 17 et 29 deux fois.

Le même cube, multiplié par celui de 7, donnera encore un cube jouissant de la même propriété, et aux facteurs du carré déjà énumérés, il faudra ajouter 2 quatre fois et 5 deux fois.

D'ailleurs le cube ainsi composé ne laisse d'intact dans le Tableau que celui du nombre 11, à écarter, comme on l'a dit, à moins que l'on en prenne en même temps le troisième cube de 3, ce que l'on ne peut, puisque le premier cube de 3 est déjà entré dans la combinaison. Il est donc clair que le cube ainsi formé ne peut plus être combiné avec aucun de ceux du Tableau de manière à en donner un nouveau satisfaisant à la condition imposée.

Mais il est également manifeste que les facteurs solitaires 2 et 3 qui restent, comme j'ai dit, après la combinaison des cubes de 5, 13, 41, 47, ne peuvent trouver de compagnons que par le cube de 11 avec le troisième cube de 3, ou par le cube de 2 avec le premier cube de 3; car il n'en reste après ceux-là plus d'autres que les cubes de 1 et 7, dont ni l'un ni l'autre ne peuvent satisfaire. Ainsi il n'y a pas d'autres manières de compléter ce cube, en dehors de celles qui ont été indiquées.

15. En écartant d'ailleurs les cubes des nombres 5, 13, 41, 47 qui, comme on l'a montré, doivent être soit pris ensemble soit mis de côté ensemble, il est impossible de composer avec ceux qui restent le cube demandé. En effet, si l'on écarte, pour les raisons précitées, les cubes de 1 et de 7, il ne reste que ceux de 2 et de 11, avec le premier et le troisième cube de 3. Si l'on prend le cube de 11 et le troisième cube de 3, puisqu'on doit les prendre ou les écarter ensemble, à cause de 61 qui s'y trouve des deux côtés et n'est nulle part ailleurs, il restera comme solitaires 2 et 3, qui ne peuvent être doublés tous deux par le

cube de 2, tandis que le premier cube de 3 ne peut être admis, puisqu'on a déjà pris le troisième. Qu'on écarte au contraire le cube de 11 et le troisième cube de 3, les deux qui restent, celui de 2 et le premier de 3, ne peuvent évidemment, par leur combinaison réciproque, satisfaire à la condition imposée; les facteurs 2 et 3 resteraient en effet solitaires.

16. Ainsi, tout considéré, il est établi que, parmi les cubes du Tableau, il n'y en a pas de simples, sauf ceux de 1 et de 7, qui, ajoutés à la somme de leurs parties aliquotes, fassent des carrés. Il n'y en a pas non plus de composés de ces mêmes cubes, qui jouissent de ladite propriété, si ce n'est les quatre déjà indiqués, dont le premier est formé du produit des cubes des nombres 5, 13, 41, 47, 11.3, 3, 3; le second, des mêmes et du cube de 7; le troisième, des cubes de 5, 13, 41, 47, 2.3; le quatrième, des mêmes et du cube de 7.

Celui qui voudra davantage de cubes de ce genre et le croira utile pourra, de la même façon que nous avons fait pour les nombres premiers inférieurs à 100, examiner davantage de nombres premiers, ou du moins davantage de leurs puissances. Qu'il me suffise en tout cas d'avoir donné la véritable méthode de recherche, afin que Frenicle apprenne que, si j'ai négligé cette question plus tôt, ce n'est point par impuissance.

Ayant d'ailleurs effectué les calculs, je trouve que les quatre cubes, composés ci-dessus, sont identiquement les mêmes que les quatre donnés par M. Frenicle, et peut-être trouvés par le même procédé.

La méthode exposée pour la question du cube, qui, ajouté à ses parties aliquotes, fait un carré, peut, *mutatis mutandis*, s'appliquer entièrement à l'autre question du carré, qui, ajouté à ses parties aliquotes, fait un cube. On examinera, à cet effet, aussi loin que l'on voudra, les puissances quadratiques (2me, 4me, 6me, etc.) des nombres premiers pour voir quel nombre on obtient, pour chacune d'elles, en l'ajoutant à ses parties aliquotes, et comment ce nombre est composé en facteurs premiers; puis, on combinera ces puissances quadratiques

en sorte que les facteurs premiers qui leur correspondent puissent se grouper, non plus par 2, comme tout à l'heure, mais par 3.

Enfin la même clef, maniée avec intelligence, révélera d'autres mystères semblables sur les parties aliquotes; je les laisse à ceux qui se plaisent à s'exercer sur ce sujet.

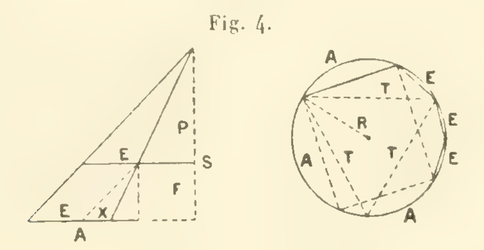
Quant à la question que j'ai proposée, d'ailleurs en passant, et non pas à M. Frenicle, mais à M. Fermat, à savoir de deux nombres carrés qui, ajoutés à leurs parties aliquotes, fassent le même nombre (par exemple 16 et 25), je dirai que, quand M. Frenicle s'informe de la possibilité, il s'informe de ce qui est demandé. Il m'est indifférent ou bien qu'il résolve le problème, ou qu'il le montre insoluble (les deux cas compteront également pour une solution légitime), ou encore qu'il le néglige entièrement; car je n'y attache pas grande importance et, qu'il le résolve ou non, il n'y gagnera, ni n'y perdra grande gloire. Cependant puisqu'il le demande, qu'il sache que la question que j'ai proposée est susceptible de solution et que je le sais d'une façon certaine.

Enfin, pour le théorème que j'avais proposé depuis longtemps et dont vous n'attendez plus, dites-vous, la démonstration d'ailleurs que de moi, je mettrai ici, d'après votre désir, et ce théorème et sa démonstration.

Théorème. — *Soit un tronc* (page 415, ligne pénultième) .... *le volume du tronc* (page 416, ligne 5).

Démonstration. — Soit X la différence des droites A et E (*fig.* 4),

Fig. 4.



c'est-à-dire $X = A - E$. Posons $\frac{X}{F} = \frac{A}{S} = \frac{E}{P}$; S sera la hauteur totale

de la pyramide (ou du cône), P celle de la partie retranchée du côté du sommet. Par suite, SA^2 sera le triple de la pyramide ou du cône, PE^2 le triple de la partie retranchée; enfin $SA^2 - PE^2$ sera le triple du tronc restant.

Mais on a $S = \frac{FA}{X}$, $P = \frac{FE}{X}$; donc le triple du tronc

$$SA^2 - PE^2 = \frac{FA^3 - FE^3}{X} = \frac{A^3 - E^3}{A - E} F.$$

Or $A^3 - E^3 = (A^2 + AE + E^2) \times (A - E)$; donc

$$\frac{A^3 - E^3}{A - E} = A^2 + AE + E^2,$$

et le triple du tronc sera $(A^2 + AE + E^2) \times F$.

Mais, si l'on forme le triangle comme il a été dit, soient T sa base et R le rayon du cercle circonscrit, on aura T^2 égal d'une part à

$$A^2 + AE + E^2,$$

de l'autre à $3R^2$, égalités qui seront démontrées tout à l'heure. Par conséquent le triple du tronc sera T^2F ou $3R^2F$; donc R^2F sera le volume du tronc. C. Q. F. D.

Quant à ce qui reste à prouver, à savoir que

$$A^2 + AE + E^2 = T^2 = 3R^2,$$

voici comment je procède :

Si le triangle est inscrit dans le cercle, comme on l'a dit, l'angle formé par les côtés A, E est un angle à la circonférence de 120°; il comprend donc un arc de 240°, et la droite T qui ferme le triangle est corde d'un arc de 240°, donc d'un de 120° (différence avec le cercle entier); c'est donc le côté du triangle équilatéral inscrit; donc $T^2 = 3R^2$.

Mais, d'autre part, on montrera que

$$A^2 + AE + E^2 = 3R^2.$$

Si la droite A est considérée comme sous-tendant l'arc simple, la sous-

tendante de l'arc triple sera $3A - \frac{A^3}{R^2}$. Si, au contraire, E est la soustendante de l'arc simple, celle de l'arc triple sera $3E - \frac{E^3}{R^2}$. Mais c'est une seule et une même corde, soit C, qui sous-tend, soit l'arc 3A, soit l'arc 3E. Puisqu'en effet A + E forme le tiers du cercle, 3A + 3E fera le cercle entier. Dès lors la corde, qui d'un côté sous-tend 3A, soustendra de l'autre 3E, différence entre le cercle entier et 3A. On aura donc

$$3A - \frac{A^3}{R^2} = C = 3E - \frac{E^3}{R^2};$$

d'où

$$3R^2A - A^3 = 3R^2E - E^3,$$

$$3R^2A - 3R^2E = A^3 - E^3,$$

$$3R^2 = \frac{A^3 - E^3}{A - E} = A^2 + AE + E^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut abréger comme suit, sans employer la droite T, dont il n'a été fait usage que pour plus de clarté.

Puisque $\frac{A - E}{F} = \frac{A}{\frac{FA}{A - E}} = \frac{E}{\frac{FE}{A - E}}$, on a, pour le triple du tronc de cône,

$$\frac{FA^3 - FE^3}{A - E} = \frac{A^3 - E^3}{A - E} \times F.$$

Mais, à cause de l'angle de 120°, la somme des arcs A + E fait le tiers du cercle; donc 3A + 3E fera le cercle entier, donc 3A et 3E auront la même sous-tendante, et, par suite,

$$3A - \frac{A^3}{R^2} = 3E - \frac{E^3}{R^2}.$$

Donc $3R^2A - A^3 = 3R^2E - E^3$ ou $3R^2A - 3R^2E = A^3 - E^3$, et

$$3R^2 = \frac{A^3 - E^3}{A - E}.$$

Donc le triple du tronc de cône sera $3R^2F$, et le tronc de cône R^2F.

C. Q. F. D.

Il me reste à vous demander pardon de ma prolixe importunité et à

vous supplier, si vous le voulez bien, de ne pas dédaigner de continuer votre amitié à celui que vous vous êtes gagné, et qui est,

Très illustre Seigneur,

Votre très humble et très dévoué serviteur,

JOHN WALLIS.

Oxford, 4/14 mars 1657/8.

Pour l'allusion de votre très noble Correspondant *à ma recherche malheureuse* de la quadrature du cercle, je ne saisis pas bien ce qu'il prétend. Voici la quadrature que j'ai donnée :

Le produit des carrés des nombres impairs, 3, 5, 7, 9, etc. à l'infini est au produit des mêmes carrés diminués chacun d'une unité, comme le carré du diamètre est à l'aire du cercle.

En quelque point d'ailleurs que l'on veuille arrêter cette multiplication de carrés, on tombera entre les limites suivantes : Si le produit des carrés est multiplié par la racine carrée de la somme de l'unité et de la partie aliquote de celle-ci, qui a pour dénominateur la racine du dernier carré, on a une quantité trop forte; si, au contraire, le dénominateur est la même racine augmentée d'une unité, on a une quantité trop faible. Ainsi

$\frac{9 \times 25 \times 49 \times 81 \times \sqrt{1\frac{1}{9}}}{8 \times 24 \times 48 \times 80}$ est plus grand que le rapport du carré au cercle,

$\frac{9 \times 25 \times 49 \times 81 \times \sqrt{1\frac{1}{10}}}{8 \times 24 \times 48 \times 80}$ est, au contraire, plus petit.

J'ajoute que ce rapport est également celui du rectangle des axes conjugués ou d'un parallélogramme quelconque circonscrit à l'aire de l'ellipse.

Si votre très noble Correspondant regarde cette quadrature comme fausse, qu'il la réfute, s'il en est capable. Qu'il montre, veux-je dire, que le rapport du cercle au carré du diamètre est plus grand ou plus petit que ce que j'ai assigné. Mais s'il n'a voulu faire qu'une insinuation moins grave, parce que cette quadrature ne lui plaît pas ou qu'il

la juge indigne de son estime; je veux lui rappeler ses paroles : « Il est facile de déprécier ce qu'il n'est pas possible d'atteindre », ou plutôt celles-ci : « Si vous savez quelque chose de mieux, donnez-nous-le de bon cœur. »

LETTRE XXIV.

Vicomte Brouncker a John Wallis.

Sir, je vous envoie ci-joint une copie (lettre XXVII) de ce que j'ai écrit à sir Kenelm Digby, après avoir lu attentivement les autres lettres, qui viennent de lui; je désirerais que ma réponse partît avec votre dernière, ou au moins la suivît, si vous avez déjà fait l'expédition. Je n'ai pas le temps de vous rien dire, si ce n'est, ce que je ne puis oublier, de vous assurer encore que je suis,

Sir, votre très fidèle ami et serviteur,

Brouncker.

13/23 mars 1657/8.

LETTRE XXV

(jointe ainsi que la suivante à celle qui précède).

Kenelm Digby a John Wallis.

J'espère que vous avez déjà reçu ma lettre que je vous envoyais le 6 de ce mois, et dans laquelle j'avais enfermé copie d'un écrit à moi adressé, que M. Frenicle avait rédigé à la hâte, immédiatement après avoir vu la lettre dont vous m'avez fait le plaisir de m'honorer le 21 novembre dernier, et qui est restée si longtemps en route. Cet écrit ne contenait que ses réflexions sur la première partie de votre lettre, le temps ne lui permettant pas d'en mettre davantage. Le lendemain matin, il quitta la ville pour quelques jours; mais, à son retour, il me demanda à étudier de nouveau votre lettre, et le matin suivant me la rapporta avec le papier ci-inclus, en réponse à la seconde partie. Il l'a rédigé comme s'il était écrit par une personne tierce, et il désirait me

voir cacher son nom; c'est pour qu'on ne puisse pas croire qu'il fasse vanité de posséder des connaissances extraordinaires dans une Science dont il prétend être très ignorant, n'y ayant jamais eu aucun maître et ne l'ayant même que peu étudiée, mais s'en étant seulement occupé pour se récréer et satisfaire à la propension de son génie. Mais moi qui fais profession de candeur et manières franches en toutes choses et pour toute personne, je ne voudrais pas que vous restiez à ignorer qui est votre antagoniste, du moment où je le connais. Or, quoiqu'il ne soit, à son idée, qu'un très mince mathématicien, aujourd'hui, pour la partie qui concerne les nombres, toute la France (même M. Roberval et M. Fermat, de même que M. Descartes quand il vivait) le reconnaît comme le maître, supérieur aux autres à une énorme distance. Et surtout, ce qu'ils font avec beaucoup de travail, nombre de circuits et d'opérations, il le fait immédiatement au vu de la question, sans opération, comme s'il avait une connaissance intuitive de ces choses, et tout son embarras est pour le mettre sur le papier. Cependant j'ai longtemps débattu en moi-même si je vous enverrais ou non ces deux derniers papiers; car, quoique les expressions y soient modestes et courtoises en comparaison de ce que les savants hommes de ce pays écrivent l'un contre l'autre (comme vous pouvez le voir dans les disputes entre Gassend et Descartes, Morin et Gassend, Descartes et Fermat, Fermat et Frenicle), je réfléchis qu'elles sont plus aigres qu'il n'est d'usage en Angleterre, et que celles que j'emploierais certainement, dans un cas semblable, pour une différence d'opinion. Mais ce qui a principalement fait pencher la balance pour me décider a été la considération que, si je ne vous faisais pas voir ce que ces personnes disent contre vous, et que par suite vous ne leur répliquiez pas, elles pourraient penser qu'elles triomphent de notre nation et de notre Université, ce que, j'en suis sûr, vous empêcherez bien, dès que vous saurez ce qu'on objecte contre vous. D'autre part, j'ai pensé qu'il rentre dans les égards que je vous dois et que je professe à votre endroit, que vous soyez informé de quoi que ce soit que j'apprends et qui vous concerne.

Il m'est dur d'arrêter ma plume quand je cause avec vous, tant j'ai de plaisir à garder, présente à ma pensée, une personne aussi éminente. Mais je ne dois pas tant m'aimer moi-même que j'abuse, pour ma satisfaction, de votre patience et de votre fatigue. Je ne veux donc pas vous incommoder plus longtemps aujourd'hui, si ce n'est pour prendre congé de vous en vous baisant les mains, et en restant

Votre très humble et très affectionné serviteur,

Kenelm Digby.

Paris, 20/10 février 1657/8.

M. Frenicle désire beaucoup savoir quelle solution vous donnez au problème que vous proposez vous-même; vous pourrez voir alors ce qu'il pense à ce sujet.

LETTRE XXVI.

Frenicle a Kenelm Digby.

J'aurais préféré, très illustre Seigneur, garder le silence sur ce qui reste encore, dans la Lettre du Clarissime Wallis, à discuter touchant les nombres, et ne pas avoir à m'arrêter à chaque détail; mais, puisque vous attendez de moi que je vous fasse connaître mon opinion sur ces questions, il ne serait pas juste d'éluder vos désirs.

Il s'agit maintenant d'un autre problème du Clarissime Fermat.

Tout d'abord Fermat (comme le dit la Lettre de Wallis) expose en ces termes un certain théorème :

Étant donné un nombre non carré quelconque, il y a une infinité de carrés déterminés tels qu'en ajoutant l'unité au produit de l'un d'eux par le nombre donné, on ait un carré.

Il donne comme exemple le nombre 3 dont le produit par le carré 1 ou 16, étant augmenté d'une unité, fait le carré 4 ou 49; il affirme qu'il y a une infinité d'autres carrés dont le produit par 3 satisfait à la même condition. Or, pour trouver ces carrés, Wallis donne une méthode légitime.

A la vérité, pour les carrés servant au nombre 3, il a mis un nombre pour un autre; mais cette erreur est excusable, car elle vient non de l'ignorance, mais d'une inadvertance; il a en effet multiplié 56×97 non par 2 suivant la règle, mais par 3. Il faut donc, au lieu de

$$3 \times 56 \times 97 = 16296, \qquad \text{lire} \qquad 2 \times 56 \times 97 = 10864 \quad (^1).$$

Mais, soit dit sans le fâcher, cette affirmation, qu'il y a une infinité de carrés dont le produit, par 3 ou un autre nombre non carré, donne ainsi un carré, c'est le théorème énoncé que Fermat dit avoir démontré et qu'il n'avance que pour l'exemple et le préambule; ce n'est point le problème qu'il demande de résoudre. Car ce qu'il s'agit de trouver, ce sont les carrés qui, multipliés par un nombre quelconque non carré, donnent, par l'addition de l'unité, des carrés, de même que les produits par 3 des carrés 1 et 16, après addition de l'unité, donnent des carrés. Il est d'ailleurs assez clair par là que les carrés demandés doivent être entiers.

Certainement Wallis pourrait s'excuser si Fermat n'avait proposé aucun exemple ou s'il avait indiqué des nombres fractionnaires aussi bien que des entiers. Mais l'exemple n'étant donné qu'en entiers, il était assez compréhensible que la question portait sur des entiers, ainsi que Fermat l'a plus tard expressément déclaré. Ne demandait-il pas des nombres tels que 3 et 16? Il est donc bien clair que Wallis cherche des équivoques pour éluder le problème, qu'il a choisi ce qui était le plus facile et s'est dérobé devant ce qui était le plus ardu.

Mais on demandait des nombres carrés et je ne vois rien dans la solution que des *species*, lettres ou caractères, dont plusieurs ne me sont pas familiers, et qui représentent les nombres et les carrés, sans que les carrés demandés soient aucunement exprimés; tous, au contraire, restent inconnus; je ne vois donc pas qu'on ait satisfait à la question qui demandait certains carrés déterminés. En effet, Fermat proposait, comme exemple pour les autres à chercher, de donner les

(1) *Voir* page 434, ligne 18, où je n'ai pas conservé dans la traduction l'indication du lapsus ultérieurement corrigé.

carrés dont le produit par les nombres 61, 109 ou 127, étant augmenté d'une unité, fait un carré. Et certainement, si tous les carrés quelconques étaient également faciles à trouver, comme cela arrive pour les fractionnaires, il n'eût pas choisi ces nombres-là plutôt que d'autres.

Maintenant, pour les entiers, que nous donne Wallis? En tout cas, aucun carré de ceux qui sont demandés, à savoir dont le produit par un nombre autre que 3, pris comme exemple par Fermat, étant augmenté de l'unité, fait un carré. Il reconnaît que la règle donne non pas les seuls carrés entiers, mais tous indistinctement, tant entiers que fractionnaires. Sans doute, s'il avait trouvé une méthode pour séparer les entiers des fractionnaires, il aurait résolu la question. Mais il y a une infinité de fractionnaires pour chaque entier, et les carrés entiers sont en très petit nombre par rapport aux fractionnaires; si donc il n'y a pas une méthode quelconque pour opérer la séparation et qu'il faille livrer au hasard une pareille recherche, c'est comme si l'on donnait à chercher une perle ou un diamant dans tout le sable de la mer, ou comme on dit communément, une aiguille dans une meule de foin. Si, au contraire, Wallis a une certaine méthode qui puisse servir à trouver les carrés pour les différents nombres, puisque dans l'opuscule latin de Frenicle ces carrés sont donnés pour chaque nombre non carré jusqu'à 150, qu'il poursuive jusqu'à 200, ou s'il n'a pas le loisir de pousser aussi loin, que le clarissime savant s'exerce seulement sur le suivant 151; je ne parle pas de 313 qui, peut-être, serait au-dessus de ses forces; autrement je ne serai jamais persuadé qu'il a obtenu la solution du problème, qu'il a en général tous les carrés pour chaque nombre ou du moins un carré pour un nombre quelconque; car je n'en demande qu'un soit pour 151, soit pour 313. Il dit qu'il démontre que sa méthode donne tous les carrés; mais il n'y a pas de meilleure démonstration que de fournir les nombres eux-mêmes, surtout quand on en demande aussi peu.

Ou bien qu'il fasse, par quelque méthode certaine, la déduction des carrés qui servent pour les nombres 61 et 109 et qui sont dans

les colonnes 2 et 3 du Tableau de l'opuscule précité de Frenicle; ou encore qu'il recherche les nombres de la colonne 4 dudit Tableau, nombres grâce auxquels il est très facile de construire les carrés; ceux-ci se trouvant dans le Tableau, il y a certainement beaucoup moins de difficultés pour ce que je lui propose ici.

Reste la dernière solution de Wallis, dans laquelle il donne, de nombreuses manières différentes, deux cubes dont la somme est égale à celle de deux autres cubes. Cette question doit être très facile, car vous savez qu'elle a été résolue de diverses façons aussi aisément; cependant, quoique Wallis ait donné de nombreux couples de cubes, il n'en a pas fourni d'autres que ceux qu'il a déduits, par une simple multiplication ou division, de ceux que vous lui avez communiqués comme venant de Frenicle. Pourvu que vous ayez un original de votre Lettre à Wallis qui renfermait ces cubes, vous reconnaîtrez aisément qu'on trouve, parmi eux, les cinq combinaisons suivantes sur lesquelles repose toute la série des cubes donnée par Wallis :

Racines des cubes.

1° $1 + 12 = 9 + 10$,

2° $2 + 16 = 9 + 15$,

3° $10 + 27 = 19 + 24$,

4° $2 + 34 = 15 + 33$,

5° $9 + 34 = 16 + 33$.

Les vingt-deux autres, en effet, qui suivent ci-après sont celles que Wallis dit différer de celles de Frenicle; or, à côté de chacune d'elles, a été indiqué le numéro de celle des combinaisons ci-dessus qui lui a donné naissance et le nombre par lequel, pour la construction de ses cubes, Wallis a multiplié ou divisé les cubes qu'il avait reçus de votre main; le mot *en* marque la multiplication, le mot *par* la division.

C. 3	+ C. 36	= C. 27	+ C. 30,	1° en 3,	C. $\frac{1}{2}$	+ C. 6	= C. $4\frac{1}{2}$	+ C. 5,	1° par 2,
1	+ 8	= $4\frac{1}{2}$	+ $7\frac{1}{2}$,	2° par 2,	6	+ 10	= $1\frac{1}{3}$	+ $10\frac{2}{3}$,	2° en $\frac{2}{3}$,
1	+ 17	= $7\frac{1}{2}$	+ $16\frac{1}{2}$,	4° par 2,	5	+ 11	= $\frac{2}{3}$	+ $11\frac{1}{3}$,	4° par 3,
$4\frac{1}{2}$	+ 17	= 8	+ $16\frac{1}{2}$,	5° par 2,	$\frac{2}{3}$	+ $5\frac{1}{3}$	= 3	+ 5,	2° par 3,
8	+ 64	= 36	+ 60,	2° en 4,	6	+ 48	= 27	+ 45,	2° en 3,
3	+ $11\frac{1}{3}$	= 11	+ $5\frac{1}{3}$,	5° par 3,	10	+ 80	= 45	+ 75,	2° en 5,
5	+ 40	= $22\frac{1}{2}$	+ $37\frac{1}{2}$,	2° en $2\frac{1}{2}$,	32	+ 66	= 18	+ 68,	5° en 2,
20	+ 54	= 38	+ 48,	3° en 2,	30	+ 66	= 4	+ 68,	4° en 2,
60	+ 132	= 8	+ 136,	4° en 4,	4	+ 48	= 36	+ 40,	1° en 4,
8	+ $6\frac{1}{3}$	= $3\frac{1}{3}$	+ 9,	3° par 3,	30	+ 81	= 57	+ 72,	3° en 3,
48	+ 99	= 27	+ 102,	5° en 3,	5	+ 60	= 45	+ 50,	1° en 5.

Vous n'avez donc pas à vous étonner s'il s'engage si facilement à fournir jusqu'à cent combinaisons pareilles dans l'espace d'une heure. Quoi de plus facile que de multiplier ou de diviser ainsi de petits nombres? Une seule combinaison de cubes en fournira très aisément plus de mille sans aucun embarras. Car, dans cette opération, il n'y a pas d'autre fatigue, il n'y a pas d'autre recherche subtile ou d'autre habileté que de multiplier les termes d'une combinaison donnée quelconque, soit par exemple la première 1, 12 = 9, 10, par chaque nombre 2, 3, 4, 5, successivement aussi loin qu'on voudra aller; ou bien, ce qui est encore plus facile, que de diviser par chaque nombre les racines des cubes, ainsi que l'indique le Tableau suivant, et cela à l'infini; sans qu'il y ait aucun besoin de multiplication ou de division, si l'on ne veut pas faire les réductions.

$$\frac{1}{2},\quad \frac{12}{2} = \frac{9}{2},\quad \frac{10}{2},$$

$$\frac{1}{3},\quad \frac{12}{3} = \frac{9}{3},\quad \frac{10}{3},$$

$$\frac{1}{4},\quad \frac{12}{4} = \frac{9}{4},\quad \frac{10}{4},$$

$$\frac{1}{5},\quad \frac{12}{5} = \frac{9}{5},\quad \frac{10}{5},$$

.., ..., ...

Il n'y avait donc pas besoin d'embrouiller de telle façon ces cinq combinaisons de cubes, à moins qu'il ne voulût déguiser davantage ses solutions factices et dérivées d'autres connues. Il eût mieux fait ou de garder absolument le silence ou de donner quelques combinaisons nouvelles et non multiples d'autres connues; ce qui était d'ailleurs très facile à trouver, comme les suivantes, données aussi par Frenicle et dans lesquelles les termes n'ont aucune commune mesure :

C. 17 +	C. 39 =	C. 26 +	C. 30,	C. 30 +	C. 67 =	C. 51 +	C. 58,
12 +	40 =	31 +	33,	42 +	69 =	56 +	61,
12 +	51 =	38 +	43,	17 +	76 =	38 +	73,
8 +	53 =	29 +	50,	5 +	76 =	48 +	69,
17 +	55 =	24 +	54,	15 +	80 =	54 +	71,
9 +	58 =	22 +	57,	51 +	82 =	64 +	75.
3 +	60 =	22 +	59,				

Il ne lui convient donc pas de se vanter d'avoir prouvé ses forces dans des choses aussi insignifiantes, qui mériteraient à peine quelque éloge à de petits enfants, ou du moins il n'a pas à les faire prendre pour un effort gigantesque.

Au reste, il me paraît avoir reculé devant la solution de ces problèmes où il n'y a aucune ambiguïté sur la nature des nombres entiers ou fractionnaires, comme : *Diviser un nombre cube donné en deux cubes rationels*, et *Diviser un nombre, somme de deux cubes, comme* 28, *en deux autres cubes rationels*, problèmes où il est assez clair qu'on ne peut toujours satisfaire à la question en nombres entiers, où il faut donc aussi employer les fractions.

Voilà, très noble Seigneur, ce qui m'est venu à l'esprit au sujet des solutions données par Wallis aux questions numériques de Fermat; voilà ce que j'en pense, mais que je n'aurais jamais entrepris d'exposer, si je n'avais pas voulu obéir à vos ordres, auxquels vous me trouverez toujours absolument préparé. Je vous salue.

LETTRE XXVII.

Vicomte Brouncker a Kenelm Digby.

Sir, il y a environ quinze jours ou trois semaines que j'ai reçu la lettre du 6 février, dont vous vous êtes plu à m'honorer, et pour laquelle je vous remercie très humblement. Et hier j'ai eu votre lettre du 20/10 février 1658/7 au Dr Wallis, dont, avec la liberté que vous me donnez, j'ai pris connaissance en même temps que de celle de M. Frenicle qu'elle renferme. J'ai appris de la sorte que vous n'aviez pas encore reçu la dernière lettre du Dr Wallis, écrite, je crois, très peu de temps après la mienne, qui a eu la bonne fortune d'arriver entre vos mains; cependant à l'absence de M. White, le Dr Farrar s'était chargé de vous faire sûrement parvenir cette lettre du Dr Wallis.

Autrement je suis assuré que M. Frenicle aurait omis au moins la plus grande partie de ce qu'il lui a plu de dire dans ses deux écrits; car cette lettre vous présente une méthode bien aisée, claire et certaine pour la solution en entiers du problème en question; car, quoique M. Frenicle se plaise à dire : « Puisque dans l'opuscule latin de Frenicle ces carrés sont donnés pour chaque nombre non carré jusqu'à 150, qu'il poursuive jusqu'à 200, ou, s'il n'a pas le loisir de pousser aussi loin, que le clarissime savant s'exerce seulement sur le suivant 151; je ne parle pas de 313, qui peut-être serait au-dessus de ses forces; autrement, etc. », dans l'espace d'une heure ou deux au plus ce matin, en employant la méthode exposée dans cette Lettre, j'ai trouvé que

$$313 \times \overline{7170685}^2 - 1 = \overline{126862368}^2,$$

et ensuite que

$$313 \times \overline{(2 \times 7170685 \times 126862368)}^2,$$

c'est-à-dire

$$313 \times \overline{1819380158564160}^2 + 1 = \overline{32188120829134849}^2,$$

ce que je crois pouvoir me contenter de vous écrire, afin que M. Fre-

nicle puisse savoir par là qu'il ne manque rien pour la parfaite solution de ce problème. Il ne me reste maintenant, noble Sir, qu'à vous assurer que mon père et ma mère ne peuvent pas, qu'aucun autre ne peut qlus vous honorer et vous estimer, ou être plus fier de votre amitié que ne le fait celui qui est,

Sir, votre très humble et très fidèle serviteur,

BROUNCKER.

13/23 mars 1657/8.

LETTRE XXVIII.

JOHN WALLIS A KENELM DIGBY.

Très illustre Seigneur, j'avais déjà répondu à la Lettre en date du 6 février, dont vous m'avez honoré, et en même temps à celle de Frenicle qui s'y trouvait renfermée, avant de recevoir les suivantes du 20/10 février, qui m'arrivent à cette heure. Je reconnais en même temps et à mon grand regret que, lorsque vous avez envoyé ces dernières, vous n'aviez pas encore reçu celle que je vous avais adressée en date du 26 décembre. Si M. Frenicle l'avait vue, il n'aurait certainement pas écrit, sinon sa première lettre, au moins sa dernière, ou en tout cas la plus grande partie de celle-ci.

En ce qui regarde le problème de M. Fermat, sur les carrés en nombre infini, dont le produit par un non-carré est inférieur d'une unité à un carré, et quant au théorème préliminaire, nous avons et démontré le théorème et résolu le problème; tous les deux étaient proposés, du moins à nous; je ne sais pas s'ils l'ont été de même à Frenicle, mais il n'a pas à me reprocher d'avoir traité ce théorème hors de propos. En tout cas, nous avons résolu le tout, non seulement en fractions, mais aussi en entiers. Une fois, en effet, que Fermat a eu précisé sa question, en la bornant aux entiers, nous avons enseigné à séparer ceux-ci des nombres fractionnaires, et nous avons fait tout ce que réclame aujourd'hui Frenicle; ce qu'il ne niera plus, une fois qu'il aura vu cette lettre du 26 décembre. Nous n'avons pas donné

seulement les règles, ce qui pourtant eût suffi, mais nous en avons aussi montré l'application, non pas à la vérité sur les nombres 61, 109, 127, qui avaient été, ce semble, proposés à Frenicle, mais bien sur d'autres qui ne sont en rien plus faciles, 109, 149, 433, que Fermat nous avait proposés. Lord vicomte Brouncker vient également d'appliquer ces règles au nombre 313, que Frenicle nous a proposé comme insurmontable. On le fera avec autant de facilité pour 151 et pour tout autre. Frenicle ne doutera plus, quand il aura reçu la lettre ci-dessus mentionnée, que nous ne soyons parfaitement maîtres de toute difficulté là-dessus.

Quand il avance que, pour fournir diverses combinaisons de cubes, par couples dont les sommes fussent égales, je me suis borné à multiplier ou à diviser par un même nombre quelques autres combinaisons de ce genre, il dit une chose qui est parfaitement vraie, mais il n'a pas à me la reprocher, puisque lui-même m'a précédé dans cette voie. Voici, en effet, les nombres qui m'étaient communiqués comme venant de lui.

(1) $$1729 = 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3,$$

(2) $$4104 = 9^3 + 15^3 = 2^3 + 16^3,$$

(3) $$13832 = 18^3 + 20^3 = 2^3 + 24^3,$$

(4) $$32832 = 18^3 + 30^3 = 4^3 + 32^3,$$

. . . .

Il est clair que les nombres des combinaisons 3 et 4 ne sont autre chose que des équimultiples de ceux des combinaisons 1 et 2. Si Frenicle n'ignore pas que la chose est facile, il ne voudra pas, je l'espère, prétendre que je ne pouvais le savoir. Si l'on connaît de fait une seule combinaison de ce genre, déduite de l'inspection de la Table des cubes, ou choisie parmi celles que Frenicle a indiquées, ou enfin obtenue de quelque autre manière, il est certain que l'on pourra immédiatement en fournir une infinité. Que l'on ait, en effet, par exemple,

$$a^3 + b^3 = c^3 + d^3,$$

on aura aussi

$$a^3e^3 + b^3e^3 = c^3e^3 + d^3e^3,$$

quel que soit le cube e^3, entier ou fractionnaire. De même, si un cube quelconque peut être partagé en deux autres, un cube donné arbitraire pourra l'être également; car si, par exemple,

$$b^3 = c^3 + d^3,$$

on aura

$$b^3e^3 = c^3e^3 + d^3e^3.$$

J'ajoute qu'il en est de même pour la question que j'ai proposée. Ainsi, par exemple, 16 et 25, ajoutés chacun à ses parties aliquotes, donnent des sommes égales; il en sera dès lors de même de $16e^2$ et de $25e^2$, quel que soit e^2, pourvu que, d'une part, e^2 et 16, de l'autre, e^2 et 25, soient des nombres premiers entre eux; chose que, j'en suis persuadé, M. Frenicle sait parfaitement.

Quant à la faute de calcul qu'il signale, je la reconnais; je l'avais déjà remarquée depuis longtemps et corrigée sur ma minute; si elle ne l'a pas été sur la lettre même, il n'y a là qu'un lapsus dû à la trop grande précipitation de ma plume, et n'importe qui peut le corriger d'après le contexte. S'il en trouve d'autres pareils, j'espère qu'il les excusera de même, à charge de revanche. Car il a commis une semblable erreur, si je ne me trompe, page 4 de son *Inquisitio*. Pour le second cube, il met 653359 au lieu de 655359 pour le compte des parties aliquotes. Or là le lecteur n'est pas averti par le sens de la phrase, et l'erreur ne peut être remarquée que par quelqu'un qui sache calculer les parties aliquotes d'un grand nombre et reprenne l'opération dès le début.

Enfin, pour le problème de Fermat, du nombre cube qui, ajouté à la somme de ses parties aliquotes, fait un carré, je l'ai débrouillé dans ma dernière lettre en date du 4 mars; votre très noble Correspondant n'a donc plus à insister sur ce sujet. Pour que d'ailleurs il ne me reproche pas encore de donner seulement les méthodes, et non des nombres qui, au moins, soient différents des siens, j'ai mis ci-dessous

six cubes tels que, ajoutés chacun avec leurs parties aliquotes, ils donnent des carrés :

Racines des cubes.	Racines des carrés.
$2\times3\times5\times13\times17\times31\times41\times191$	$2^{12}\times3^{3}\times5^{2}\times7\times13\times17\times29^{2}\times37$
$2\times3\times5\times7\times13\times17\times31\times41\times191$	$2^{14}\times3^{3}\times5^{3}\times7\times13\times17\times29^{2}\times37$
$3^{3}\times5\times11\times13\times17\times31\times41\times191$	$2^{13}\times3^{3}\times5\times7\times11\times13\times17\times29^{2}\times37\times61$
$3^{3}\times5\times7\times11\times13\times17\times31\times41\times191$	$2^{15}\times3^{3}\times5^{2}\times7\times11\times13\times17\times29^{2}\times37\times61$
$17\times31\times47\times191$	$2^{10}\times3^{2}\times5\times13\times17\times29\times37$
$7\times17\times31\times47\times191$	$2^{12}\times3^{2}\times5^{2}\times13\times17\times29\times37$

J'ajoute que le second et le quatrième de ces cubes satisfont à la question des deux cubes posée par Frenicle, au bas de la page 3 de son *Inquisitio*.

Ce que je pense des recherches de ce genre sur les nombres, je l'ai déjà dit, et je ne répète pas à quel point c'est malgré moi que je m'y laisse entraîner. C'est là, il est vrai, une excuse que je ne devais pas invoquer quand il s'agissait de satisfaire aux sollicitations pressantes de deux clarissimes savants, et, avant tout, d'exécuter vos ordres. Mais cependant, si je puis le dire sans les blesser, je ne vois pas ce qui pourrait mieux profiter réellement à la Science que l'exposé méthodique qu'ils pourraient faire au monde savant de ce qu'ils regardent comme leur appartenant en propre, plutôt que de proposer à d'autres, ainsi qu'ils l'ont fait, de trouver à nouveau ce qu'ils pensent avoir inventé; ils ne retireraient pas moins de gloire d'une façon que de l'autre. Je vous salue, très noble Seigneur, et je vous prie de continuer à accorder vos faveurs à

Votre très humble et très obéissant serviteur,

JOHN WALLIS.

Oxford, 15/25 mars 1657/8.

Sir, je vous demande la permission d'ajouter un mot. Nous avons pensé à publier toute cette Correspondance que nous venons d'avoir en France, si toutefois vous donnez votre approbation à cette idée et

si vous la croyez bonne (l'avance prise sur nous par M. Frenicle nous fait juger la chose nécessaire); toutefois, il peut convenir d'omettre dans vos lettres un ou deux passages, où vous établissez une comparaison entre ... et ..., et dont je ne sais pas si vous ne regretteriez pas la publication. Si vous voulez bien m'honorer de vos ordres, j'aurai soin de m'y conformer exactement.

LETTRE XXIX.

Wallis a Vicomte Brouncker.

Il y a quatre jours, très illustre Seigneur, que je vous ai envoyé une réponse à la seconde lettre de M. Frenicle; j'ai écrit cette réponse à la hâte après dîner le jour même où j'ai reçu la lettre, le courrier devant partir dès le lendemain matin; je n'ai donc eu le temps de vous rien dire à ce sujet. A quel point M. Frenicle épluche, rabaisse, raille et méprise tout ce qui vient de nous, vous n'avez pas besoin qu'on vous le fasse remarquer, et qu'il le fasse d'ailleurs sans motif, vous le savez très bien. Faut-il l'attribuer au caractère de l'homme ou à celui de sa nation, je ne le rechercherai pas; je pense même qu'il est préférable de ne pas faire attention à ce qui regarde ses procédés; car aux yeux des hommes sérieux, au moins en Mathématiques, tout cela n'a aucune signification, et tout cela s'évanouira, de son propre aveu, dès qu'il aura vu nos lettres précédentes, si du moins vous avez transmis celle que je vous ai adressée le 20 janvier, et qui développe amplement l'appendice de celle du 17 décembre.

Vous vous souvenez, je pense, de la chaleur qu'il a mise, dans sa première lettre, à repousser notre réponse aux deux premières questions de Fermat; il soutenait qu'en indiquant l'*unité*, je ne donnais ni un *carré* ni un *cube*. Vous pouvez donc voir combien il est peu d'accord avec lui-même, quand dans sa seconde lettre, comme s'il avait oublié sa cavillation, il donne à son tour l'unité comme un cube, puis comme un carré, une et deux fois.

Vous n'ignorez pas non plus avec quelle confiance il se persuade

que nous n'avons pu, que nous ne pouvons encore résoudre *à son sens* ni ces deux questions de Fermat, ni même la troisième; comment il nous insulte en vérité, triomphant de nous et s'en jouant comme d'enfants.

Mais vous savez aussi combien vaine est cette confiance, puisque nous avons satisfait, même à son sens, à toutes ces questions. Pour ma part, j'attendrai en silence qu'il sonne sa retraite, quand il aura reconnu qu'il a sonné la marche triomphale avant la victoire. Cependant vous pourrez ajouter à ma dernière lettre, si vous ne l'avez pas encore expédiée, ces deux nombres qu'il demande, dans le cas où votre lettre antérieure se serait perdue par quelque hasard :

$$313 \times \overline{1819380158564160}^2 + 1 = \overline{32188120829134849}^2,$$

$$151 \times \overline{140634693}^2 + 1 = \overline{1728148040}^2.$$

Mais vous pouvez voir que les soupçons du clarissime savant ne se rapportent pas seulement aux questions de Fermat, mais aussi aux nôtres. Il désire absolument savoir ce que j'ose affirmer sur le problème que j'ai proposé en passant, *des deux carrés qui, étant ajoutés chacun avec ses parties aliquotes, font la même somme;* il nous croit peut-être assez peu dégrossis pour ne pas comprendre nos propres questions. Il ne fait pas seulement cette réclamation dans sa première lettre, mais il y revient par l'intermédiaire du très noble Digby. Vous voyez ce que j'ai dit là-dessus, quoique je pense qu'il est à la charge de celui qui résout le problème, de déterminer si la question est susceptible ou non de l'être; mais comme il m'interrogeait là-dessus, j'ai répondu qu'elle est soluble; j'ajouterai même, s'il le veut, qu'elle est soluble à son sens. De plus j'ai montré que non seulement 16 et 25, nombres que j'avais donnés, satisfont à la question, mais qu'il en est de même des équimultiples de ces nombres par un carré quelconque premier avec chacun d'eux, comme, par exemple, 16×9 et 25×9, ou encore 16×49 et 25×49, etc.

Il répondra peut-être que cette solution n'est pas légitime et ne

convient pas à un homme de science. Mais pourquoi cela? Parce qu'elle est facile et qu'elle revient simplement à multiplier par 2, 3 ou quelqu'autre nombre, etc. Mais un problème n'en est pas moins résolu, pour être facilement résolu. Il dit qu'étant donné le triangle rectangle 3, 4, 5 (c'est-à-dire un triangle dont les côtés soient respectivement proportionels aux nombres 3, 4, 5), si l'on en demandait un autre pareil (entendant dont les côtés fussent exprimables en nombres rationels), il ne suffirait pas de fournir le multiple 6, 8, 10 : peut-être bien, car alors ce ne serait pas un triangle d'espèce différente, mais bien identique, puisque si les côtés sont respectivement proportionels aux nombres 3, 4, 5, ils le sont également à 6, 8, 10, etc. : cependant si, étant donnés les trois nombres 3, 4, 5, dans lesquels le carré de l'un est égal à la somme des deux autres, on en demandait d'autres pareils, on répondrait très bien et tout à fait en mathématicien, que les doubles, les triples, les quadruples et les autres équimultiples quelconques de ces nombres ont la même propriété; car on ne peut nier que ce ne soient là d'*autres nombres*. Et celui qui ne voudrait pas de cette réponse devrait l'exclure par une condition expresse, ou autrement on le regarderait comme ayant proposé sa question d'une façon imparfaite et peu exactement; car les problèmes mathématiques sont de droit strict, comme le sait bien le clarissime savant. Il est certain qu'au contraire celui qui saisit la possibilité d'une réponse aisée ne doit pas être accusé de l'avoir fait; il faudrait plutôt le traiter de peu clairvoyant, s'il ne le faisait pas. Et en vérité, si le clarissime savant ne reconnaît pas la vérité de ce que je dis, je ne puis que m'étonner de sa subtilité. Quant à moi, s'il avait ainsi répondu à mon problème, comme je n'avais pas exclu cette réponse, je serais si loin de ne pas la considérer comme satisfaisante, qu'au contraire j'attribuerais à une simple inadvertance qu'il ne la fît pas. C'est absolument comme si, à qui demanderait un nombre divisible par 2 et par 3, il donnait 126, 132, en négligeant 6 et 12.

Mais si vous me demandiez vous-même s'il n'y a pas encore d'autres carrés, en dehors de 16, 25 et leurs équimultiples, qui jouissent de la

même propriété, je vous répondrais ouvertement, très illustre Seigneur, et même si vous jugez bon de ne pas le tenir plus longtemps dans l'incertitude, je ne refuse nullement que vous informiez Frenicle qu'il y en a encore d'autres et en très grand nombre, en sorte que je ne suis nullement tenu de les donner. Mais, pour ne pas paraître dire cela sans preuve, j'ajoute que les carrés des nombres $8 \times 3 \times 37$ et $2 \times 19 \times 29$, ajoutés chacun à ses parties aliquotes, font la même somme; ce qui sera de même également vrai pour leurs multiples par un carré quelconque premier avec chacun d'eux.

Racines des carrés.	Somme des carrés et de leurs parties.
$8 \times 3 \times 37$,	$127 \times 13 \times 3 \times 7 \times 67$,
$2 \times 19 \times 29$,	$7 \times 3 \times 127 \times 13 \times 67$.

De même

$3 \times 4 \times 11 \times 19 \times 37$,	$13 \times 31 \times 7 \times 19 \times 3 \times 127 \times 3 \times 7 \times 67$,
$7 \times 8 \times 29 \times 67$,	$3 \times 19 \times 127 \times 13 \times 67 \times 3 \times 7 \times 7 \times 31$.

Si Frenicle se plaint encore que ces carrés ne soient pas deux à deux premiers entre eux, je ne vois pas ce que cela peut faire pour la question dont il s'agit, en tant qu'ils ne sont pas équimultiples de 16 et 25, et ce sont, je crois, les seuls qu'il prétendait exclure; mais en voici deux autres, premiers entre eux :

$(2 \times 3 \times 5 \times 37)^2$,	$7 \times 13 \times 31 \times 3 \times 7 \times 67$,
$(29 \times 67)^2$,	$13 \times 67 \times 3 \times 7 \times 7 \times 31$.

Deux autres encore, premiers de même entre eux :

$(3 \times 5 \times 11 \times 19 \times 37)^2$,	$13 \times 31 \times 7 \times 19 \times 3 \times 127 \times 3 \times 7 \times 67$,
$(7 \times 8 \times 29 \times 67)^2$,	$3 \times 19 \times 127 \times 13 \times 67 \times 3 \times 7 \times 7 \times 31$.

Si, en dehors de ceux-là et de leurs multiples (comme je l'ai dit), on en désire encore d'autres, on peut les chercher à peu près par la même méthode (*mutatis mutandis*) que celle que j'ai employée pour rechercher un cube qui, ajouté à ses parties aliquotes, fît un carré. Si jamais ceci tombe sous les yeux de Frenicle, il donnera, je crois, son

assentiment et à l'avenir, ses jugements seront plus réservés; il ne pensera plus que ce qui lui appartient soit tellement à lui que d'autres ne puissent y parvenir; c'est ainsi que, si je ne me trompe, Fermat a déjà reconnu ce qui en est.

Quant à ce qui regarde ces deux très nobles savants, Fermat et Frenicle, et les relations que nous avons jusqu'ici eues avec eux, relations dans lesquelles leur première attente a sans doute été trompée, ils me paraissent, autant que j'en puis juger par leurs lettres, d'un caractère opposé. Pardonnez-moi, si je vous exprime librement ma pensée, confiant dans votre indulgence accoutumée. Je crois Frenicle plus adonné à l'Arithmétique, recherchant les questions particulières (qui ne se ramènent que très difficilement ou même ne peuvent se ramener à une équation universelle, embrassant tous les différents cas), et spécialement celles qui concernent les parties aliquotes; aussi a-t-il laissé sans y toucher tout ce que nous avons fait en Géométrie. Fermat au contraire n'est pas moins habitué aux questions géométriques; il recherche des règles générales ou des théorèmes universels; et peut-être reconnaîtrait-il plus volontiers le mérite d'un adversaire. Peut-être l'un a davantage la gravité des Espagnols, dont il est voisin, l'autre la vivacité française. Je reconnais volontiers la pénétration de leur esprit et leur haute valeur; cependant (quoi qu'on puisse penser de moi), je ne crois pas qu'ils aient à dédaigner notre nation, si ce n'est en ce que nous serions moins fanfarons.

Vous voyez, très insigne Seigneur, avec quelle liberté j'en use avec vous, grâce à votre bonté qui me le permet. Mais il ne faut pas que cette liberté semble dégénérer en une trop grande licence, et je cesserai de vous importuner plus longtemps, quand j'aurai fait profession d'être,

Très illustre Seigneur,

Votre très humble, très obéissant
et très respectueux

John Wallis.

Oxford, 19/29 mars 1657 S.

LETTRE XXX.

VICOMTE BROUNCKER A JOHN WALLIS.

Sir, les papiers que je vous adresse ci-joint m'ont été envoyés, depuis un jour, par le Dr Scarbrough. J'imagine, à les voir, que M. Frenicle a chez lui une grande Table de nombres (carrés, cubes, etc.) avec la décomposition en facteurs premiers de la somme de chacun d'eux et de ses parties aliquotes; ce qui lui rend aisées de pareilles solutions, presque à la simple inspection, en suivant d'ailleurs la méthode que vous avez dernièrement indiquée pour résoudre ces problèmes et qui est universellement applicable à tous ceux de même nature. Mes hommages à votre femme, et soyez bien assuré que je suis,

Sir, votre très fidèle ami et
humble serviteur,

BROUNCKER.

6/16 avril 1658.

LETTRE XXXI.

FRENICLE A KENELM DIGBY.

Voici, comme vous me l'avez demandé, très honoré Chevalier, quelques solutions du problème du clarissime savant Wallis; il n'y a pas là toutes celles qui se sont présentées à moi, car elles sont si nombreuses que je ne serais pas parvenu à les écrire. Pour plus de brièveté, j'avais jugé à propos de réduire le calcul à peu de nombres qui devaient me les fournir; mais de ce peu de nombres j'ai vu sortir tant de solutions si variées que j'ai été obligé d'y mettre une borne, car les premières en faisaient naître toujours de nouvelles, indéfiniment diversifiées; de la sorte, je n'ai pu, en aussi peu de temps, les ranger dans l'ordre que je m'étais proposé, ce que je ferai, avec l'aide de Dieu, au premier jour.

Voici quel était le problème : *Trouver deux carrés, tels que chacun*

d'eux, ajouté avec toutes ses parties aliquotes, fasse une même somme. Comme exemple étaient donnés les carrés 16 et 25, dont chacun, ajouté à ses parties aliquotes, fait 31. On en demande d'autres semblables.

Ainsi on ne demande qu'un couple d'autres carrés, ce qui ne présente évidemment aucune difficulté, si, pour ce problème, on admet les carrés multiples. Or Wallis n'aurait pas, pour lui, le droit de les refuser, puisque pour un certain problème de M. Fermat, relatif à un nombre, somme de deux cubes, à décomposer en deux autres cubes (comme 1729, somme des deux cubes 1 et 1728, peut être décomposé en deux autres cubes 729 et 1000); puisque, dis-je, pour la solution de ce problème très facile, il s'est contenté de fournir des multiples de nombres communiqués.

Voici donc une règle qui permettra de résoudre facilement le problème de M. Wallis. Qu'on multiplie les carrés 16 et 25 par un autre carré quelconque impair et non divisible par 5; on aura deux nouveaux carrés satisfaisant à la question. Ainsi les carrés des nombres 12 et 15, 28 et 35, 36 et 45, 44 et 55, 52 et 65, etc., forment des solutions. Qu'on ajoute, en effet, à ses parties aliquotes chacun des carrés 144 et 225, on a pour somme 403. Les carrés 784 et 1225 font, de même, 1767. Les carrés 1296 et 2025 feront, toujours chacun avec les parties aliquotes, la somme 3751; et ainsi des autres. Mais cette solution est indigne d'un mathématicien, et la question, entendue dans ce sens, est telle qu'elle n'aurait pas dû être proposée. Il faut donc croire que, dans son problème, M. Wallis a eu une autre intention, et qu'il s'attend à une autre solution, sans pouvoir consentir à celle-ci.

Supposons donc le problème proposé comme suit :

Trouver deux carrés premiers entre eux, tels que chacun d'eux, ajouté avec ses parties aliquotes, fasse une même somme.

Voici maintenant les côtés de carrés satisfaisant à la question.

Si, en effet, on ajoute à ses parties le carré du nombre 326, on a pour somme 187 131; de même, le carré du nombre 407, ajouté à ses

parties, donne la même somme 187 131. Après les six premiers couples, cette somme est donnée par ses facteurs.

[N. B. — *Il a paru désirable, pour la commodité du lecteur, de résoudre en leurs facteurs les nombres composés donnés par Frenicle, et, en même temps, de faire disparaître quelques fautes; on pourra ainsi, plus aisément, se rendre compte de tout le procédé et en examiner l'application.*]

Côtés des carrés.	Somme.	Côtés des carrés.	Somme.
326 (= 2.163) 407 (= 11.37)	187131 $(= 3.7^2.19.67)$	146 311 (= 11.47.283) 147 823 (= 13.83.137)	24 126 447 513 (= 3.7.19.37.61.73.367)
627 (= 3.11.19) 749 (= 7.107)	658 749 (= 3.7.13.19.127)	361 232 $(= 2^4.107.211)$ 497 173 (= 19.137.191)	3, 31, 37, 49 $(=7^2)$, 73, 127, 169 $(=13^2)$
1510 (= 2.5.151) 1809 $(= 3^3.67)$	4 980 801 $(= 3.7^2.31.1093)$	111 408 $(= 2^4.3.11.211)$ 183 169 (= 7.137.191)	3, 19, 31, 37, 49 $(=7^2)$, 73, 169 $(=13^2)$
13 066 (= 2.47.139) 14 001 (= 3.13.359)	307 464 339 (= 3.7.13.37.61.499)	343 952 $(= 2^4.7.37.83)$ 507 419 (= 11.163.283)	9 $(=3^2)$, 49 $(=7^2)$, 67, 73, 361 $(=19^2)$, 367
10 686 (= 2.3.13.137) 17 351 (= 47.373)	314 858 271 $(= 3.7^2.13.37.61.73)$	724 152 $(= 2^3.3.11.13.211)$ 1 193 941 (= 7.19.47.191)	7, 9 $(=3^2)$, 19, 31, 37, 61, 127, 169 $(=13^2)$
....	....	....	....

[*suivaient ici 27 autres paires de carrés.*]

On peut trouver davantage de couples de carrés, mais il vaut mieux passer à autre chose; car on peut obtenir la même somme en ajoutant à leurs parties, non seulement des carrés pris deux à deux, mais aussi des carrés pris trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, six à six, etc. et d'ailleurs premiers entre eux. J'appelle *premiers entre eux* des carrés pris trois à trois, quatre à quatre, etc., quand aucun nombre

ne peut les diviser tous. Ainsi les carrés 9, 16, 225, 324 seront dits premiers entre eux, parce qu'il n'y a aucune mesure commune aux quatre, quoiqu'il y en ait trois qui aient 9 comme commune mesure.

Assemblages de trois carrés.

Côtes des carrés.	Somme.
245 828 (= $2^2.11.37.151$)	133 151 753 133 (= $3^2.7^3.19.31.67.1093$)
294 867 (= $3^3.67.163$)	
307 285 (= $5.11.37.151$)	

Cotés des carrés.	Somme.
589 734 (= $2.3^3.67.163$)	34 486 304 061 447 [nombre inexact, auquel il faut substituer
614 570 (= $2.5.11.37.151$)	
736 263 (= $3^3.11.37.67$)	932 062 271 931 (= $3^2.7^4.19.31.67.1093$)]

[*suivaient* 26 *autres groupes de* 3 *carrés.*]

Il me reste encore bien d'autres assemblages de trois carrés satisfaisant à la question et que j'ai bien trouvés, mais que le défaut de temps ne m'a pas permis de ranger de façon, très noble Seigneur, à vous les présenter; de même, pour les assemblages de quatre, cinq, six, etc., que vous recevrez, quand ils seront prêts, avec ceux de trois précités; cependant, pour vous donner au moins un ou deux exemples de ce que je vous promets, je mettrai ceux-ci en attendant les autres.

Assemblages de quatre carrés.

Côtes des carrés.	
($2^2.7.107$ =) 2996 [1]	Somme : 20 421 219 = $3.7.13.19.31.127$
($2^2.3.11.19$ =) 2508	[*suivaient trois autres assemblages par quatre.*]
($3.5.11.19$ =) 3135	
($5.7.107$ =) 3745	

Assemblages par cinq.

139 954 381 710 (= $2.3.5.11.13.19.83.137.151$)
165 476 277 890 (= $2.5.7.11.47.107.151.283$)
167 186 334 770 (= $2.5.7.13.83.107.137.151$)
198 242 772 651 (= $3^3.7.11.47.67.107.283$)
200 291 443 443 (= $3^3.7.13.67.83.107.137$)

Somme ...... $13.27.31.37.61.73.127.361.367.1093.2401$

(1) Frenicle avait donné, par faute de copie, 2296.

Assemblages par six.

79 588 991 130 $(= 2.3.5.11.19.29.47.67.139)$
82 718 076 012 $(= 2^2.3.11.13.19.37.191.359)$
95 075 206 310 $(= 2.5.7.29.47.67.107.139)$
98 813 140 244 $(= 2^2.7.13.37.107.191.359)$
103 397 595 015 $(= 3.5.11.13.19.37.191.359)$
123 516 425 305 $(= 5.7.13.37.107.191.359)$

Somme....... $19.27.37.61.67.127.499.961.2197.2401$

Voici d'autres assemblages de carrés par deux, trois, etc.

[*suivaient ici de nombreux assemblages de carrés envoyés plus tard, à savoir : par deux,* 6; *par trois,* 52; *par quatre,* 20; *par cinq,* 3; *par six,* 5; *puis, par deux,* 5; *par trois,* 5; *par quatre,* 7; *par cinq,* 3; *par six,* 6; *par sept,* 4; *par huit,* 1; *par neuf,* 1; *puis, par cinq,* 1; *par six,* 3; *par sept,* 2; *par huit,* 2; *par neuf,* 3; *par dix,* 2; *par onze,* 1; *par douze,* 2; *par treize,* 2; *par quatorze,* 1; *par quinze,* 1; *par dix-neuf,* 1. *J'ai cru sans intérêt de les reproduire tous, pour ne pas remplir plusieurs feuilles de nombres; cependant, j'en ai relevé le compte, pour ne pas paraître vouloir faire tort à l'auteur.*]

[*Il s'est d'ailleurs, dans la Lettre XLIII, excusé sur la hâte de son travail de nombreuses fautes de calcul ou de plume, qui se sont glissées dans ses chiffres; cette excuse est d'autant plus valable qu'une partie de ces fautes peut être du fait du copiste. Remarquons toutefois que Frenicle s'est écarté de la règle qu'il nous avait proposée, à savoir que les carrés fussent premiers entre eux. Cela n'a pas lieu pour les siens; quand, par exemple, il propose un groupe de six carrés, il regarde comme suffisant qu'aucun même nombre ne divise tous les six, tandis qu'il n'y aura pas un seul couple de deux carrés premiers entre eux (ainsi qu'on le reconnaîtra immédiatement et comme lui-même l'avoue); c'est de la sorte qu'il a pu donner autant de groupes. En ce qui me concerne, dans mes solutions de la Lettre XXIX, pour composer les racines des carrés, je n'ai employé que les nombres premiers inférieurs à* 100, *jugeant inutile d'aller plus loin; et, dans ces limites, il n'y a pas d'autres combinaisons que celles que j'ai données. Toutes celles que Frenicle a données, ainsi que je l'ai vérifié,*

comprennent au moins un facteur premier supérieur à 100 *et pouvant aller jusqu'à près de* 500 (*comme si pour des nombres inférieurs la combinaison était impossible*). *C'est ainsi qu'il a pu fournir autant de solutions.* |

LETTRE XXXII.

JOHN WALLIS A VICOMTE BROUNCKER.

Vous avez eu la bonté de m'envoyer et j'ai reçu la semaine dernière, très illustre Seigneur, les solutions données par Frenicle au problème que j'avais jadis proposé sur les deux carrés qui font la même somme par l'addition avec leurs parties aliquotes. Je vois par là que le très noble savant a non seulement résolu cette question, mais qu'il y a pris beaucoup plus d'intérêt que je n'avais fait moi-même.

Sa première solution est la même que ma première; car un carré *impair non divisible par* 5 est exactement la même chose qu'un carré *qui soit à la fois premier avec* 16 *et avec* 25.

Quant aux autres solutions, je crois qu'elles ont absolument la même origine que les miennes, qu'elles ont été trouvées par une méthode tout à fait semblable ou du moins à peine meilleure.

Si ces solutions sont si nombreuses, il ne faut guère s'en étonner, du moment où il a jugé l'affaire digne de ses peines. Car si je ne me trompe, et comme vous le pensez aussi, il doit avoir à sa disposition une Table suffisamment étendue donnant jusqu'à peut-être 500 ou même au delà les carrés, cubes (peut-être même d'autres puissances) des nombres premiers, avec la décomposition en facteurs de la somme de chacun et de ses parties aliquotes; de la sorte il est facile, de la manière que j'ai indiquée, d'obtenir un certain nombre de solutions. Qu'après en avoir trouvé suffisamment, une personne aussi sagace puisse, en les combinant, transformant et mêlant ensemble de diverses façons, en déduire beaucoup d'autres, on ne peut en douter, dès que l'on sait de combien de manières on peut transposer sept ou huit lettres ou changer les rangs d'autant de cloches. Quoi qu'il en soit, je

suis convaincu que la découverte de ce mystère, qui nous appartient, et d'où, avec ces problèmes, en découlent une infinité d'autres, ne sera pas moins agréable aux mathématiciens que ne le serait, sans l'indication de la méthode, l'énoncé de mille nombres de la sorte.

Au reste, je n'ai jamais pensé que Frenicle ne résoudrait pas cette question que j'avais proposée d'ailleurs à un autre que lui. Puisqu'il avait dès longtemps résolu celles de Fermat, il n'était pas douteux qu'il ne réussit aussi facilement sur la mienne, qui dépendait du même principe.

En tout cas, j'aurais préféré qu'il se fût au moins épargné la peine de former en nombres les racines des carrés par la multiplication successive des facteurs qu'il a évidemment trouvés tout d'abord; car il aurait été d'autant plus facile d'examiner, si on l'eût voulu, les nombres qu'il a donnés, ce qui ne peut maintenant se faire qu'en détruisant son travail; mais je ne m'embarrasserai pas de cet examen, qui n'est pas si important. Peut-être a-t-il craint que, s'il avait exposé la chose aussi simplement, j'en eusse conclu sa méthode qu'il croyait que j'ignorais.

D'autre part il lui a plu de changer la question que j'avais proposée, en introduisant la condition que les carrés à donner soient premiers entre eux. Il a voulu ainsi éviter qu'on eût la grande facilité de donner les multiples de 16 et 25, qui satisfont à la question, par un carré quelconque premier avec l'un et l'autre. Je ne regrette pas absolument cette condition, mais j'ai deux motifs pour ne pas la regarder comme tout à fait nécessaire. En premier lieu, la limitation dont il s'agit exclut plus de carrés qu'il ne faut, car il est clair que, même étant connus 16 et 25 comme satisfaisant à la question, il y a beaucoup d'autres carrés, même non premiers entre eux, dont la recherche n'est en rien facilitée par cette connaissance ou même par celle d'autres carrés premiers entre eux. Ainsi je le fais juge s'il est en rien plus facile de trouver $8 \times 3 \times 37$ et $2 \times 19 \times 29$ ou bien $3 \times 4 \times 11 \times 19 \times 37$ et $7 \times 8 \times 29 \times 67$ que j'ai donnés, quoiqu'ils ne soient pas premiers entre eux, que s'ils l'étaient. En second lieu,

quoique la chose soit facile pour Frenicle (en tant qu'il sait qu'un nombre formé de deux ou plusieurs nombres premiers entre eux, si on l'ajoute à ses parties aliquotes, donne une somme égale au produit de ces nombres premiers entre eux, augmentés chacun de ses parties aliquotes; ce qui est le principal mystère dans les questions de ce genre), celui qui ignore ce principe n'aura pas plus de facilité pour reconnaître, comme propres à la question, les équimultiples des nombres donnés plutôt que d'autres carrés premiers entre eux; au contraire, celui qui connaît le principe n'aura pas beaucoup plus de facilité pour trouver la méthode de recherche applicable aux autres carrés premiers entre eux.

Enfin il donne non seulement des assemblages par deux, mais par trois, quatre, cinq, etc. Mais le très noble savant sait très bien que, à part la peine du calcul, il n'y a là rien de nouveau par rapport à la question que j'ai proposée; les assemblages de trois, quatre, etc., voire même de cent, se trouvent en effet par la même méthode absolument que ceux de deux; et même, dans le petit nombre de ceux que j'ai indiqués, il trouvera trois carrés remplissant la condition dont il s'agit; savoir ceux de $3 \times 4 \times 11 \times 19 \times 37$, de $3 \times 5 \times 11 \times 19 \times 37$ et de $7 \times 8 \times 29 \times 67$, puisque chacun d'eux, ajouté à ses parties aliquotes, donne comme somme

$$3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 13 \times 19 \times 31 \times 67 \times 127.$$

Il n'y aurait non plus rien de nouveau si ce que j'ai proposé pour les carrés l'eût été pour les cubes, bicarrés, etc.; si ce que j'ai proposé pour l'égalité des sommes l'eût été pour leur relation dans un rapport donné (possible). Dans des cas de ce genre, le calcul peut être plus long avant que le but soit atteint, mais les solutions dépendent toujours du même principe, et sont à chercher toujours par le même procédé; ce que sait parfaitement notre si sagace Correspondant. Cela peut au reste s'appliquer aux autres questions de ce genre en nombre infini.

Il me reste encore à vous dire que je viens précisément de recevoir

de Hollande une lettre que m'a écrite M. Schooten et que je crois devoir communiquer à V. S. Après l'avoir lue, je suis absolument dans la croyance que la méthode dont s'est servie M. Frenicle pour la solution de la troisième question de Fermat (celle du carré dont le produit par un nombre donné non carré soit inférieur d'une unité à un carré) ne vaut pas celles qui ont été données d'ici, au moins la seconde. Je vois en effet qu'il a hésité sur le donné non carré 109, ce qui est clair même d'après son traité imprimé, où il dit que le carré qui se rapporte à ce nombre lui a été communiqué par M. Fermat; je vois aussi que cette méthode montrée, semble-t-il, à M. Huygens, lui a paru tellement pénible qu'il a reculé devant l'application; la nôtre au contraire est si commode qu'en très peu de temps elle peut fournir des nombres très considérables. Mais de fait je n'ai pas encore vu cette méthode de Frenicle, qu'il a jugé à propos de taire dans son Traité imprimé, et je n'en puis parler que par conjectures; je ne veux donc faire aucune affirmation téméraire. Quant à la lettre de Schooten, s'il plaît à V. S. qu'elle soit jointe aux nôtres lors de l'impression de celles-ci (ce qui me paraît intéressant et ce qu'il désire lui-même), je vous prie de me le faire savoir et m'empresserai d'accomplir, autant que possible, votre vœu, comme,

Très illustre Seigneur,

Votre très obéissant et très respectueux

John Wallis.

Oxford, 13/23 avril 1658.

LETTRE XXXIII.

François Schooten a J. Wallis.

Clarissime savant, l'exemplaire de la première partie de vos Œuvres mathématiques que vous m'avez destiné, en même temps qu'un autre pour Huygens, m'a été parfaitement remis par M. Thrommje; je vous en fais mes meilleurs remercîments, tandis que j'ai le chagrin de voir que mes *Exercitationes* ne vous ont pas été remises, quoique, au

moment où elles ont paru, j'en aie donné un exemplaire à l'imprimeur, qui devait l'envoyer à Londres avec d'autres et le faire de là parvenir à Oxford à votre adresse et en mon nom. Je suis très heureux d'apprendre qu'elles ne vous ont pas déplu, et que vous avez également apprécié ce que le très noble Huygens a ajouté à la fin sur les raisonnements dans le jeu de dés. Votre jugement à cet égard nous est, plus que mille autres, un clair garant que nous n'avons ni l'un ni l'autre mal employé nos efforts en essayant soit de rétablir soit de pousser plus avant les Mathématiques. Mais surtout je suis charmé du mutuel accord qu'on peut immédiatement remarquer entre vos écrits et les miens, comme en autres choses sur ce que nous avons dit l'un et l'autre des progressions et où l'on dirait que nous nous étions communiqué nos pensées à l'avance.

Vous me parlez des questions de Fermat proposées l'année dernière à tous les mathématiciens de l'Europe. Voici ce qui m'est arrivé à ce sujet. Ce fut le 26 janvier de l'année passée que le très illustre M. Guillaume Boreel, député auprès du Roi de France Très Chrétien par les Provinces-Unies, envoya de Paris aux professeurs de Mathématiques de l'Académie de Leyde une lettre qui renfermait deux questions numériques avec ce titre [1] :

« Deux problèmes mathématiques proposés, comme s'ils étaient insolubles, aux mathématiciens de France, d'Angleterre, de Hollande et du reste de l'Europe, envoyés le 3 janvier 1657 par M. de Fermat, Conseiller du Roi au Parlement de Toulouse, à M. Claude Martin de Laurendière, Docteur Médecin, et reçus par celui-ci le 21 janvier. »

« PREMIER PROBLÈME. — *Trouver un cube* (*voir* page 311, lignes 21 à 25) .... *propriété.* »

« SECOND PROBLÈME. — *On demande* (*voir* page 311, lignes 26 à 27) .... *un cube.* »

Cette lettre fut reçue par M. Golius le 7 février, la veille du jour où

(1) *Voir* la Pièce 79 de la *Correspondance de Fermat*, T. II, p. 332.

il devait déposer les fonctions de Recteur Magnifique; il l'ouvrit en ma présence seulement le 11 du même mois. J'y fis alors la réponse suivante et aussitôt après l'avoir communiquée à M. Golius, je l'adressai le 17 février audit M. Borcel à Paris, avec une lettre de transmission et deux problèmes sur le même sujet que je proposais en retour à M. Fermat ([1]).

« Réponse aux questions proposées aux mathématiciens de toute l'Europe par M. de Fermat, Conseiller du Roi au Parlement de Toulouse. »

« Pour résoudre la première question, où il s'agit de trouver un nombre cube dont la somme avec les parties aliquotes fasse un carré, je cherche à partir de l'unité 4, 7, 10, 13 ou davantage de nombres en proportion continue (en augmentant successivement de 3 leur nombre), tels que leur somme fasse un carré; le dernier des termes proportionels sera le cube demandé. Quant au second terme proportionel, je prends successivement les différents nombres premiers, en commençant par les plus faibles. »

« Puisque les proportionels

$$1.2.4.8,\quad 1.3.9.27,\quad 1.5.25.125$$

donnent comme somme les nombres 15, 40, 156, qui ne sont pas carrés, ayant pris pour seconds termes de ces séries les nombres premiers 2, 3, 5, je prends maintenant pour second terme le nombre premier 7 et j'ai les proportionels : 1.7.49.343, dont la somme est 400, carré de côté 20. Je trouve ainsi que 343 est de tous le plus petit cube qui satisfasse à la question; c'est d'ailleurs celui qui a été donné par M. de Fermat. Prenant ensuite toujours quatre proportionels différents, et employant successivement tous les nombres premiers de 2 à 97, je n'ai rencontré aucun autre carré que celui déjà indiqué; et j'ai reculé dès lors devant la poursuite de ces calculs, *ne pouvant*

([1]) La Lettre qui suit se trouve également publiée (en latin) dans le Tome II des *Œuvres complètes de Christiaan Huygens* (n° 377 de la Correspondance).

d'ailleurs reconnaître une voie plus abrégée pour parvenir sûrement au but (¹). »

» Si l'on prend de même sept proportionels

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.,
1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.,
etc.;

les sommes 127, 1093, etc. ne sont pas carrées; mais je n'ai pas eu le courage d'entreprendre de plus longues recherches sur 7 proportionels et la fatigue des calculs m'a de même empêché de les tenter sur 10, 13, 16 ou plus de proportionels. Mais je n'en ose pas moins juger que, quoique les cubes en question doivent être en nombre infini, à ce que je pense du moins, personne ne peut en trouver facilement au delà d'un certain nombre, comme 5 ou 6, eu égard à la grande distance qui les sépare. »

« M. de Fermat reconnaîtra d'ailleurs que le moyen de trouver ainsi ces nombres est infaillible, dès qu'il saura que, pour déterminer les proportionels précités, je me sers des expressions analytiques a^3, a^6, a^9, a^{12}, etc., ou s'il s'agit de nombres ayant 15, 27, 39, 48, 51, 63, 69 ou 75 etc. parties aliquotes, je me sers, en outre des notations précédentes, de celles-ci : a^3b^3, a^6b^3, a^9b^3, a^6b^6, $a^{12}b^3$, $a^3b^3c^3$ ou $a^{15}b^3$, a^9b^6 ou $a^{18}b^3$, etc., comme pouvant être utiles pour cette affaire, c'est-à-dire pour représenter les nombres cubes à trouver. Mais, comme ces expressions indiquent, pour trouver les nombres cherchés, des calculs encore plus fastidieux, je ne crois guère que cette voie puisse être heureusement tentée. Mais je n'ajouterai rien, car, en dehors des moyens indiqués, il n'en existe pas pour trouver certainement ces nombres, à moins que M. de Fermat n'ait peut-être imaginé, pour établir les égalités, quelques abrégés qui pourraient diminuer singulièrement l'embarras de cet examen; il ferait certes, en les communiquant, une chose qui me serait très agréable. »

(¹) Les mots en italique sont indiqués comme à supprimer.

« De même pour résoudre la seconde question, où on demande un carré tel que sa somme avec ses parties aliquotes fasse un cube, je cherche à partir de l'unité 3, 5, 7, 9, 11, 13, etc. ou davantage (en augmentant toujours par 2) de nombres en proportion continue, tels que leur somme fasse un cube, et, pour second terme, j'essaye un nombre premier quelconque, comme il est indiqué par

$$1.a.a^2.1.a.a^2.a^3.a^4.1.a.a^2.a^3.a^4.a^5.a^6.\text{ etc. »}$$

Si, en effet, cette somme est un cube, le dernier proportionel sera le carré cherché. Ainsi je me sers de a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}, etc. pour trouver les nombres ayant 2, 4, 6, 8, 10 parties aliquotes, ou bien encore de a^2b^2 pour ceux qui en ont 8, de a^4b^2 pour 14 parties, a^6b^2 pour 20, a^4b^4 pour 24, $a^2b^2c^2$ ou a^8b^2 pour 26 parties, etc. Mais, comme ces dernières expressions correspondent à des modes de recherches de plus en plus difficiles pour ces carrés, j'ai peine à croire qu'elles puissent servir heureusement pour parvenir au but proposé. »

» En montrant l'existence de tous ces modes, par lesquels il est évident que l'on peut certainement obtenir les nombres cherchés, pourvu qu'on ne recule pas devant le travail d'examiner successivement, comme j'ai dit ci-dessus, tous les nombres premiers en commençant par les plus petits, j'espère avoir satisfait pleinement au désir du clarissime Fermat. »

« Écrit à Leyde, le 17 février 1657, par moi, François van Schooten, professeur de Mathématiques à l'Académie de Leyde. »

Suivent (1) deux problèmes du même genre, proposés en retour à M. de Fermat :

« Premier problème. — *Trouver deux cubes dont la somme fasse un cube ou, s'il ne peut les obtenir, montrer que le problème est impossible.* »

« Deuxième problème. — *Montrer si l'on peut, ou non, trouver d'autres nombres parfaits que ceux que fournit la méthode d'Euclide* (IX, prop. dern.), *c'est-à-dire la progression suivant la raison double.* »

(1) Pièce 378 de la *Correspondance de Huygens*.

Voilà ce que j'ai répondu alors, et les questions que j'ai proposées à mon tour.

En traitant ces questions, je m'étais seulement proposé d'indiquer à leur auteur la façon dont elles devaient être résolues. Il sera facile à votre perspicacité de reconnaître que j'atteignais ce but, puisqu'on ne peut donner aucun nombre qui ne soit pas soumis à quelqu'une des conditions précitées (comme on peut le déduire de mes *Exercitationes*, section 3), ou ne puisse être trouvé par les modes indiqués. Quant aux nombres eux-mêmes, ils ne me paraissaient pas avoir tant de valeur que la méthode pour les trouver certainement ne dût suffire à M. de Fermat. C'est aussi ce que j'avais surtout en vue pour les deux problèmes ajoutés par moi, en sorte que, si les nombres que je demandais ne se rencontraient pas aisément, il suffît de montrer l'impossibilité du premier problème, et de prouver que le second ne peut être résolu par un moyen différent de celui d'Euclide. Mais à tout cela, rien que je sache ne m'a été répondu par M. Fermat, ou du moins aucune réponse ne m'est parvenue; je n'ai pas cru cependant devoir aucunement le presser à ce sujet, afin de ne pas sembler prétendre à une grande gloire pour la solution d'un problème qui n'a évidemment aucun usage, ni aucune utilité. Ainsi je ne sais même pas si M. de Fermat a reçu ou non ma réponse, ni quel jugement il a porté sur elle dans le cas où il l'aurait reçue.

J'avoue d'ailleurs qu'à cette époque il ne m'est venu à l'esprit aucun des abrégés qui auraient pu, comme je le croyais, servir à diminuer considérablement le travail; c'est pour cela que je disais à Fermat, qui, sans aucun doute, devait posséder ces abrégés avant tout autre, que, s'il en connaissait de généraux touchant cette matière, il ferait une chose très digne de reconnaissance s'il voulait bien nous les communiquer.

Après avoir ainsi résolu les questions de Fermat, j'ai cru devoir les communiquer au clarissime M. Hudde et lui proposer de les résoudre. Voici ce qu'il me répondit, le 23 février, d'Utrecht où il était alors :

« Quant aux questions proposées par M. Fermat et à la solution que

» vous en avez donnée, j'avoue que les problèmes ne me déplaisent » pas, mais qu'il n'en est pas de même de la raison par laquelle vous » vous efforcez de me persuader que je dois, moi aussi, m'efforcer » d'en chercher la solution ; à mon avis, ce qui est le plus nécessaire » et utile doit passer avant ce qui l'est moins ; si donc j'ai encore » quelque loisir à consacrer à la Science, j'ai la confiance de pouvoir » le dépenser sur des questions, non seulement beaucoup plus utiles, » mais aussi beaucoup plus générales et plus intéressantes, et qui » semblent promettre une gloire plus brillante au savant qui les étu- » diera. Aussi je n'ai pu prendre sur moi de m'appliquer à la solution » de ces problèmes; cependant, pour l'amour de vous seul, je me suis » résolu, au détriment de tous mes autres travaux, à leur consacrer la » journée d'hier pour vous faire part de ce que je parviendrais à dé- » couvrir, pour l'abrègement du travail, et cela dans le cas où vous » n'auriez pas encore envoyé votre réponse à Paris.

» Voici la règle que j'ai choisie entre beaucoup et que j'emploierais » pour la solution de la première question, où il s'agit de trouver un » nombre cube, tel qu'ajouté à toutes ses parties aliquotes, il fasse un » carré. Qu'on prenne un carré (en commençant par les plus petits), » tel que son double, moins l'unité, soit un nombre premier; que de » ce dernier nombre on retranche 1, et qu'on multiplie le reste par le » carré que l'on a pris, ou bien, ce qui revient au même, par la plus » grande moitié de ce nombre premier. Si, en ajoutant 1 au produit, » on a un carré, le nombre premier précité sera le côté du cube » cherché.

» Par exemple :

Racine	Carré.	Double carré moins 1. — Nombre premier.	Nombre premier moins l'unité	par	le carré ou la plus grande moitié du nombre premier	donne	qui plus 1	donne
2	4	7	6		4	24		25, carré; donc 7 est le côté du cube demandé.
3	9	17	16		9	144		
4	16	31	30		16	480		
5	25	»	»		»	»		
6	36	71	70		36	2520		
7	49	97	96		49	4704		
8	64	127	126		64	8064		
9	81	»	»		»	»		
10	100	199	198		100	19800		
11	121	241	240		121	29040		
12	144	»	»		»	»		
13	169	337	336		169	56784		ne donnent pas de carré.
14	196	»	»		»	»		
15	225	449	448		225	100800		
16	256	»	»		»	»		
17	289	577	576		289	166464		
18	324	647	646		324	209304		
19	361	»	»		»	»		
20	400	»	»		»	»		
21	441	881	880		441	388080		
22	484	967	966		484	467544		
23	529	»	»		»	»		

» Les places vides dans ce Tableau sont celles qui ne correspondent » pas à des nombres premiers, comme le demande la règle; mais, ce » qui peut-être excitera votre étonnement, tous les nombres correspondant à ces places sont divisibles soit par 7, soit par 17. En tous » cas, si j'ai bien calculé, il est certain par là qu'au-dessous du » nombre cube de 1150, soit 1 520 875 000, il n'y a qu'un seul cube, » 343, qui satisfasse à la question, en ne comptant toutefois que ceux » qui ont trois parties aliquotes, c'est-à-dire ceux auxquels la règle » est appropriée.

» En effet, le premier nombre que nous trouverions ensuite est su- » périeur à 1150, tandis que le côté 7 du cube 343, trouvé par le pre-

» mier carré, est précisément celui du cube donné par l'auteur comme » satisfaisant au problème.

» Maintenant, quand je pèse vos paroles : *Prenant ensuite, etc.* » (p. 556/7) ... *sûrement au but*, je n'ai aucun doute que le procédé » que j'ai indiqué ne soit plus facile pour atteindre le résultat proposé, » puisque je suis arrivé à 1151 en une heure et demie environ; et, si » j'avais eu sous la main votre Catalogue des nombres premiers, je me » serais épargné à peu près la moitié du travail. Aussi il vous sera » facile, si vous le jugez intéressant, de poursuivre la recherche pour » des nombres encore plus grands.

» Le calcul suivant indique comment j'ai trouvé cette règle :

» Soit a^3 le nombre cube à trouver, a étant un certain nombre pre- » mier.

» Les parties aliquotes de ce cube sont 1, a, a^2, dont la somme » avec a^3 fait $1 + a + a^2 + a^3$, qui doit être égale à un carré.

» Posons donc

$$1 + a + a^2 + a^3 = [(1 + a)b]^2;$$

» divisant, de part et d'autre, par $1 + a$:

$$1 + a^2 = (1 + a)b^2;$$

» d'où $\frac{1 + a^2}{1 + a} = b^2$ ou $a - 1 + \frac{2}{a + 1} = b^2$.

» Mais, puisque a doit être un nombre premier, $\frac{2}{a+1}$ pourra être » divisé par 2 (haut et bas). D'ailleurs cette fraction, ajoutée à l'en- » tier $a - 1$, ne pourra, comme il le faut, donner un carré, si son dé- » nominateur $\frac{a}{2} + \frac{1}{2}$ n'est pas lui-même un carré. On tire de là une » grande simplification, puisque tout d'abord il suffit de faire que » $\frac{a}{2} + \frac{1}{2}$ soit carré, c'est-à-dire que $a + 1 = 2\square$ ou $a = 2\square - 1$. C'est » de là que j'en viens à dire dans ma règle : *Qu'on prenne un carré* » *tel que son double moins l'unité soit un nombre premier*, et que je passe » celui qui n'a pas cette propriété, comme ne pouvant servir pour le » but proposé. Cet artifice permet de diminuer singulièrement le tra-

» vail, non seulement pour a^3, mais encore pour les autres expres-
» sions. »

» Voilà, mon très cher ami, à quoi mon temps s'est dépensé, en » sorte que, pour la solution de l'autre problème, je n'ai rien qui vaille » la peine de vous être communiqué, non plus que pour les autres » modes de chercher les cubes, soit par a^6, a^9, a^{12}, etc., soit par $a^3 b^3$, » dans les cas où les parties aliquotes ne forment pas une progression, » comme dans les précédents. »

Quand j'ai reçu cette Lettre, j'avais déjà envoyé la mienne à Paris; mais j'apprenais qu'entre 1 et 1 520 875 000 on ne peut trouver aucun cube, sauf celui déjà connu 343, en se servant de la voie la plus facile, celle de a^3; les autres voies par a^6, a^9, etc. ou $a^3 b^3$, $a^6 b^3$, etc., devant être regardées comme plus difficiles, nous avons pensé, moi et M. Golius, qui s'était également proposé de résoudre ces problèmes, devoir nous abstenir de recherches numériques ultérieures, jugeant que nous pouvions mieux employer de bonnes heures aux Mathématiques.

Peu de temps après, à savoir le 9 mars, j'ai reçu de la Haye une lettre du très noble Huygens, laquelle en renfermait une autre à moi adressée de Paris par M. Mylon, jurisconsulte, et en même temps une page redemandée depuis par Huygens, qui m'écrivait là-dessus (¹) :

« Voici une lettre pour vous de notre ami Mylon, et aussi une page » dont il a voulu que je prisse également connaissance; je vous » prierai, en raison des questions de M. de Fermat, de me la ren- » voyer à votre commodité. »

Voici ce que contenait cette page (²) :

« M. de Fermat a proposé à tous les arithméticiens par M. Digby,

» 1. Trouver un cube (*voir* page 311, lignes 21 à 25) .... la même » propriété.

(¹) *Voir* Correspondance de Huygens, n° 375.
(²) *Voir* Correspondance de Huygens, n° 374.

» 2. On demande aussi (*voir* page 311, lignes 26 à 27) .... fasse » un cube.

» M. de Frenicle a résolu ces questions et M. Martin, qui en a les » solutions, les fait imprimer, à ce qu'on m'a dit.

» Depuis (¹) peu M. de Fermat a écrit ceci à M. de Frenicle.

[Suit la pièce LXXX de la *Correspondance de Fermat*, Tome II, page 333.]

» A quoi M. de Frenicle a envoyé l'ordre qu'il tient pour résoudre » ces questions, dont le calcul est extrêmement long. »

En répondant là-dessus à Huygens et à Mylon, je priai M. Mylon de présenter à M. Frenicle mes très respectueuses salutations et en même temps j'envoyai la page 426 de mes *Exercitationes*, page que je venais d'avoir imprimée et où l'on peut voir combien je lui portais d'égards, à ce point que, pour ces questions auxquelles mes autres études ne m'avaient pas permis de consacrer assez de temps, je témoignais que je lui concédais volontiers la palme. Mylon répondit le 12 avril (²), et le 21 du même mois (³), Huygens m'envoya de la Haye cette réponse, où, entre autres choses, il disait :

« J'envoie à M. de Zuylechem les pensées de M. Frenicle touchant » les propositions numériques de M. de Fermat et vos solutions, et le » prie de vous en faire part. »

Voici quelles étaient ces pensées de M. Frenicle (⁴) :

« M. Frenicle trouve que c'est plus tôt fait d'examiner tous les » cubes de suite pour voir ceux qui satisfont (qui est la question » proposée par M. de Fermat) que de se servir de la méthode de » M. Schooten. Néanmoins, pour s'en servir, il donne ce théorème :

» Il n'y a aucune puissance dont la racine soit un nombre premier

(¹) Correspondance de Huygens, n° 371.

(²) *Voir* Correspondance de Huygens, n° 382.

(³) *Voir* Correspondance de Huygens, n° 386.

(⁴) Correspondance de Huygens, n° 383.

» et l'exposant un nombre impairement pair, qui puisse avoir un » quarré pour la somme de ses parties.

» Donc M. Schooten doit exclure ces nombres de sa méthode. Il en » peut encore exclure beaucoup d'autres, savoir ceux où les propor- » tionelles sont en multitude impaire, car leur somme ne sera point » un quarré et n'a pas besoin d'être examinée, si le nombre de la pro- » portion n'est pareil à 79, 199 et autres dont il se trouve fort peu, » se trouvant plusieurs milliers de nombres où il n'y en a que cinq » ou six.

» Davantage le second nombre de la proportion continuelle doit » être un de cette progression [1]

1. 7. 41. 239. 1393. 8119. 47321,
a. *b*. *c*. *d*,

» et entre ceux-là il n'y aura que ceux qui auront ces deux pro- » priétés :

» La première, que ce soit un nombre premier;

[1] En cette progression

$$6 \text{ fois } a - 1 = b,$$
$$6b - a = c,$$
$$6c - b = d,$$
etc.

Les nombres de la précédente progression se trouvent encore autrement par la seule addition, comme en celle qui suit, en laquelle il n'y aura que ceux de la colonne h qui sont vis-à-vis des impairs de la colonne g qui soient utiles.

g.	h.
1	1
2	3
5	7
12	17
29	41
70	99
169	239
408	577
985	1393
2378	3363
5741	8119

La construction de cette Table est aisée par addition, car

1 + 1 font 2 en g
2 + 1 font 3 en h
3 + 2 font 5 en g
5 + 2 font 7 en h
7 + 5 font 12 en g
12 + 5 font 17 en h
etc.

(*Note de Frenicle.*)

» La seconde, qu'il soit moindre de l'unité qu'un double quarré.

» Or, par les lettres finales et autres propriétés des doubles quarrés, » on peut voir aisément qu'il n'y en a aucun qui puisse satisfaire, » outre 7, si le cube n'a plus de 60 lettres. Il se trouve par ces » deux propriétés qu'il n'y a que deux nombres à examiner s'ils » sont doubles quarrés pour aller jusqu'à la racine de ce cube de » 60 lettres. Et cet examen est d'ajouter 1 et prendre la racine » quarrée de la moitié, car les autres ou sont composés ou leurs » finales montrent qu'ils ne sont pas doubles quarrés moins 1.

» M. Frenicle propose ce problème :

» *Trouver un nombre triangulaire, dont le sextuple plus* 1 *soit nombre* » *cube.*

» J'écris de l'autre part ce que j'ai pu tirer sur-le-champ de M. de » Frenicle, touchant les propositions numériques de M. de Fermat; » je vous supplie d'en faire part à M. Schooten, etc.

» Voici la solution de M. de Frenicle pour les nombres suivants :

Pour 13 c'est le quarré de.........	649	Pour 33 c'est le quarré de......	<23>
» 19 » »	170	» 37 » »	73
» 17 » »	33	» 41 » »	2049
» 21 » »	55	» 43 » »	3482
» 23 » »	24	» 47 » »	48
» 29 » quarréquarré de...	99	» 53 » »	66249
» 31 » quarré de.........	1520	» 59 » »	530

» Pour 61, c'est le quarré de 1766319049, lequel quarré, étant » diminué de 1, donne le quarré de 226153980. Or le quarré qui » satisfait à 61 a 19 (¹) lettres, quoiqu'il n'étoit besoin, pour le » trouver par la méthode de M. Frenicle, que de 5418, 11418, 23718 » et 29718.

» Pour 109, il n'y en a point au-dessous de 25 lettres.

» Pour 127, c'est le quarré de 4730624. »

Là-dessus, Huygens ajouta ce qui suit :

« Je vous laisse à examiner ce que Mylon m'a écrit des pensées

(¹) Lisez 17.

» de M. Frenicle sur la question proposée par M. Fermat. Il paraît » donner, pour la recherche des cubes dont il s'agit, certains abrégés » importants, plus peut-être que vous n'aviez cru qu'on pût les » trouver, mais il conviendrait de rechercher sur quelles raisons il » s'appuie. Quant à l'autre question, proposée par Fermat, trouver » un quarré dont le produit par un nombre donné, étant augmenté » de l'unité, etc., je l'avais résolue par une certaine règle indiquée » pour cela. J'estime que c'est la même dont Frenicle s'est servi pour » trouver les nombres que Mylon m'a envoyés, mais le travail était » immense et tel que je n'aurais pas voulu l'entreprendre. »

Quelque temps après, savoir le 18 mai, Mylon m'écrivait la lettre suivante ([1]) :

« Monsieur, j'ai fait voir à M. de Frenicle votre petit papier imprimé » dont il vous remercie. Un de ses amis veut ici faire imprimer le défi » de M. de Fermat et la solution du dit Sr de Frenicle. Il y prétend » joindre la vôtre avec les abrégés, exclusions et théorèmes de son » ami. J'ai prié qu'on ne le fît pas sans savoir votre volonté. Prenez » donc la peine de me mander, par la voie de M. de Zuylechem (puis- » qu'il a cette bonté), si vous trouverez bon d'être nommé ou non, ou » si vous ne désirez pas que votre solution soit imprimée. Je tâcherai » de faire suivre en cela votre intention, étant, etc. »

Au-dessous se trouvait ce qui suit ([2]) :

« M. de Frenicle vous envoie ces théorèmes sur votre dernière ques- » tion :

« 1. Pour les nombres pairs parfaits, il n'y en a aucun que ceux » qui se trouvent par la méthode donnée par Euclide.

» 2. Pour les impairs, s'il y en a aucun, il doit être multiple d'un » quarré par un nombre premier, pairement pair plus 1.

([1]) *Comparez* Correspondance de Huygens, n° 388.

([2]) *Comparez* Correspondance de Huygens, n° 389.

» Théorème. — Il n'y a aucun quarré qui, multiplié par 19, surpasse » de l'unité un quarré multiplié par 7. »

Je répondis par la lettre suivante (¹) :

« Monsieur, puisque vous avez eu la bonté de me mander qu'un des » amis de M. Frenicle veut faire imprimer le défi de M. de Fermat et » la solution dudit Sr de Frenicle, et qu'il prétend d'y joindre aussi » la mienne avec ses abrégés, exclusions et théorèmes que M. de Fre- » nicle a inventés pour la raccourcir, je n'ai pas voulu manquer de » vous en remercier et de vous écrire que tout ce qu'on fera me sera » agréable, soit qu'on l'imprime ou non. Car, n'ayant employé guère » de temps pour la chercher et remarquant qu'il eût fallu faire grande » opération pour trouver les nombres requis, je me suis contenté d'y » enseigner seulement les chemins par lesquels je voyois clairement » que les mêmes nombres, s'il y en avoit plusieurs tels, se dussent » trouver infailliblement, en cas qu'on voulût prendre la peine d'exa- » miner généralement de suite tous les nombres qui y pourroient » aucunement servir, sans penser particulièrement quels nombres en » fussent exempts, de même comme a fait M. de Frenicle; de sorte » que ma méthode n'étant que analytique, c'est-à-dire expliquant » comment on peut par le moyen de l'Algèbre découvrir les chemins » par lesquels ces nombres peuvent être cherchés, je serois d'avis » que, si on la veut faire imprimer, l'on y ajoutât ces mots :

» *Moyen analytique de chercher ces nombres, trouvé par François de* » *Schooten*, ou bien

» *Suit le mode de recherche de ces nombres par l'Algèbre, comme l'a* » *trouvé Fr. de Schooten.*

» Ce qui la feroit plus recommandable, seroit d'y ajouter de plus » les abrégés, exclusions et théorèmes de M. de Frenicle, afin que » cela ne semble pas être trouvé pour rien, mais y serve pour embel- » lissement et plus grande perfection de cette matière. Je vous en

(¹) Cette Lettre de Schooten est en français, sauf les mots imprimés en italique.

» laisse tout le pouvoir. Dans ma solution, je voudrois bien que ces
» mots en fussent effacés :

» *ne pouvant d'ailleurs reconnaître une voie plus abrégée pour par-*
» *venir sûrement au but,*

» et au lieu de ces mots

» *à moins que M. de Fermat n'ait peut-être imaginé pour établir les*
» *égalités quelques abrégés*, etc.

» j'aimerois plutôt ceux-ci :

» *à moins que M. de Fermat n'ait peut-être imaginé pour établir les éga-*
» *lités quelques abrégés généraux (qui en tout cas ne se sont pas pre-*
» *sentés à mon esprit).*

» En finissant, je demeure, etc. »

De Leyde, ce 29 de mai 1657.

Les choses en étaient là quand enfin parut à la lumière le Traité intitulé : *Solution de deux problèmes, etc.*, et qui est, je pense, le même que celui dont vous m'avez parlé dans votre Lettre; le susdit ambassadeur prit soin de nous en faire expédier deux exemplaires, le 26 octobre, l'un pour moi, l'autre pour Huygens. Dès que je l'eus vu, je ne pus que m'étonner de l'orgueil de l'auteur, qui, dans son avant-propos, adressé à M. Digby, ne rougit pas de s'exalter en ces termes :

Très illustre Seigneur, voici que Paris donne cette solution de problèmes que ni vos Anglais, ni les Belges n'ont aucunement pu trouver; la Gaule celtique est fière d'enlever la palme à la Narbonnaise, etc.

et autres semblables plus loin; comme si ce fût une affaire d'État que de connaître ces nombres et que chacun dût attacher tant d'importance à cette solution qu'il ne sût où employer plus utilement son temps. A voir le titre même, je n'ai pu ne pas ressentir une certaine indignation en voyant l'auteur de ce Traité y amener une certaine *Inquisition* sur ma solution; car je n'avais jamais attendu de France aucune *Inquisition;* et je croyais même l'auteur trop sensé pour faire ou laisser faire, sur une chose aussi indifférente et de si faible impor-

tance, rien de pareil contre quelqu'un qui ne lui avait, que je sache, fait aucune offense; qui, au contraire, avait témoigné des plus grands égards pour lui.

Peu après que ce Traité fut parvenu dans mes mains, je reçus de la Haye une lettre de l'illustre Huygens, à qui, comme je l'ai dit plus haut, un autre exemplaire avait été envoyé de Paris. Dans cette lettre, il me disait entre autres choses (1) :

« Les problèmes de Frenicle vous ont été, je n'en doute pas, en-
» voyés par l'auteur. En les voyant, je ne puis que m'étonner de la
» diversité des goûts des humains. »

Mais, quant à ce qu'y affirme l'auteur, que la plupart des mathématiciens tant d'Angleterre que de Hollande s'occupent de la solution de ces problèmes, en ce qui concerne les Hollandais, je ne connais guère personne qui ait jugé intéressant de les aborder; au contraire, les plus exercés, à qui je les avais proposés, n'ont semblé y reconnaître aucun usage ni aucun profit, et personne ne s'est trouvé parmi eux qui ait estimé assez la gloire à en retirer pour vouloir prendre la peine de rechercher la solution.

Vous me demandez, très honorable Monsieur, à quel point on s'est franchement comporté avec moi dans cette affaire; je crois que ce qui précède suffit pour vous le faire connaître. J'ai cru devoir vous tout exposer, avec plus de longueurs peut-être que n'en réclamait le sujet, surtout parce que j'ai compris à votre lettre que vous aviez l'intention de faire imprimer tant vos solutions que les lettres que vous avez reçues à cette occasion. J'estime que la mienne, ou au moins une partie, rentrera dans votre plan et dans votre narration. Si donc vous croyez devoir en imprimer quelque chose, vous ne le ferez certainement pas contre mon gré.

J'ai cru devoir communiquer à Huygens ce que vous avez remarqué sur la lune de Saturne et sur l'aspect de cette planète; il y pourra

(1) Le 23 novembre 1657 (Correspondance de Huygens, n° 431).

reconnaître votre soigneuse et excellente application sur cette matière, de laquelle il est lui-même, je crois, attentivement occupé pour le moment. Mais, pour ne pas vous retenir trop longtemps, je mets fin à cette lettre, en vous souhaitant tout bonheur et toute prospérité. Adieu,

Votre très affectueux et très respectueux,

FR. DE SCHOOTEN.

Leyde, le 18 mars 1658.
St. grég.

Je suis heureux que vos remarques sur le texte de Pappus, d'après les manuscrits grecs, correspondent exactement à mes conjectures. Si je les avais connues plus tôt, j'aurais pris soin de faire imprimer en même temps ce véritable sens de Pappus, ce qu'il faut maintenant réserver pour la prochaine édition, s'il y a lieu d'en donner une. Cependant je vous remercie à cette occasion et vous recommande de tout cœur au Dieu qui peut tout donner. Encore une fois adieu.

LETTRE XXXIV

(à laquelle étaient jointes les quatre suivantes).

VICOMTE BROUNCKER A SIR JOHN WALLIS.

Sir, étant pressé, je ne puis que vous adresser les lettres ci-jointes comme elles me sont arrivées, et vous dire qu'ayant résolu, dans le propre sens qu'il lui donne, cette proposition qu'il semblait estimer la plus difficile, je ne me regarde pas comme obligé en aucune façon d'essayer la solution de ces autres qu'il envoie, comme présumant que la précédente aurait dépassé mes forces. Autrement, je ne les regarde pas comme si difficiles, et je crois que si j'en avais le désir et le loisir, il pourrait aussi là-dessus recevoir pleine satisfaction de,

Sir, votre fidèle et humble serviteur,

BROUNCKER.

1/11 mai 1658.

Quant à ce qu'il dit concernant vous-même, je ne pense pas que cela mérite la moindre réplique. Le lecteur sera sans doute pleinement satisfait par ce que vous avez déjà dit.

LETTRE XXXV.

Kenelm Digby a vicomte Brouncker.

Mylord, j'ai reçu il y a deux jours la lettre que votre Seigneurie a bien voulu m'écrire le 13 mars, et, en même temps, deux autres du docteur Wallis à moi, et une du même à votre Seigneurie. Je vous fais mes très humbles et très sincères remercîments pour la vôtre, que j'ai reçue avec un excès d'allégresse, de joie et de respect; en premier lieu, pour votre excessive civilité et bienveillance à mon égard; ensuite, pour votre noble et savante réponse à la requête de M. Frenicle. Maintenant, ni lui, ni M. Fermat n'auront plus à chicaner ni votre Seigneurie, ni le docteur Wallis; j'écris, à ce dernier, longuement (eu égard à la difficulté que j'éprouve maintenant pour écrire beaucoup), et je prends la liberté de vous demander de bien vouloir lui faire remettre ma lettre, que je laisse ouverte, pour que vous puissiez y jeter les yeux à votre fantaisie.

Mais surtout, Mylord, je vous félicite de tout cœur pour l'heureuse étoile qui a présidé à votre naissance, et qui, dans une qualité et un rang si élevés, vous a gratifié aussi d'une part si excellente d'intelligence que vous pouvez être justement envié par les plus éminents de ceux qui font leur tâche de l'étude et de la Science. Ma lettre ci-jointe pourra faire connaître à votre Seigneurie avec quel retard j'ai reçu la dernière lettre du docteur Wallis. Si vous voyez le Dr F., je vous prie de lui reprocher la précaution hors de propos qui lui a fait garder si longtemps cette lettre. Si je n'étais pas tout à fait épuisé (tant je suis débile maintenant) par ma lettre au Dr Wallis, votre Seigneurie ne serait pas si facilement délivrée à cette fois de l'embarras que je lui cause; mais la raison que je viens de dire m'empêche de poursuivre

plus longtemps, si ce n'est pour baiser humblement votre main et me dire,

Mylord, votre très humble et très obéissant serviteur,

Kenelm Digby.

Paris, 4 mai 1658.

LETTRE XXXVI

(jointe à la précédente).

Kenelm Digby a John Wallis.

Très digne et très honoré Monsieur, la lettre que vous m'avez fait la faveur de m'écrire le 26 décembre ne m'est parvenue que tout dernièrement, en même temps qu'une autre écrite, vers la même époque, par vous à mylord Brouncker; celui-ci semble les avoir remises au Dr F. pour me les envoyer, par ce motif que M. White n'était pas alors à Londres. Le docteur (comme toujours quand on se met à négliger) garda la lettre par devers lui jusqu'à ce que, plusieurs mois après, ayant été informé de la chose, je lui écrivis, le priant d'aller trouver Mylord et s'accuser devant lui de son oubli, pour me disculper moi-même, et en même temps de m'envoyer immédiatement la lettre.

Il me la fit, en effet, parvenir par le premier courrier, en me disant qu'il avait été voir Mylord pour me décharger de tout blâme de négligence ou de manque de respect. Je vous déclare, ainsi que je le fais à tout autre, quand l'occasion s'en présente, que j'admire singulièrement le grand fonds qui vous fournit (comme il ressort de votre réponse immédiate) une si étonnante abondance de matière que, dans l'espace d'une nuit, vous écrivez plus que n'aurait fait un autre en un mois entier. On admire justement saint Jérôme, pour avoir achevé en une nuit le Traité qu'il nous a laissé contre Jovinien; mais vos réponses numériques étaient sur tel sujet, demandaient telle méthode pour le traiter, qu'un effort beaucoup plus prolongé eût dû être attendu. On peut comparer cela à un fil qui est couramment et aisément tiré du lin qui le donne tout prêt; ce fil glisse et se tord par le facile travail de la simple rotation du rouet. Mais chaque trait de votre

plume demandait, dans cette occasion, une nouvelle taille de pierre en forme dans le bloc brut, pour assembler la voûte que vous bâtissiez; assemblage qui, pour la moindre partie, réclamait l'exactitude la plus stricte et la plus parfaite dans le tout et dans le détail. Là-dessus l'admiration est justement acquise à l'aisance avec laquelle vous avez accompli ce travail d'Hercule, en vous jouant vraiment. Quand je le considère sous ce rapport, je suis en vérité troublé d'avoir quelque peu contribué à vous en charger (quoique je n'aie été qu'un instrument passif); mais à le voir sous une autre lumière, à reconnaître ce qui en est en vérité, je veux dire combien peu il vous a coûté, quel progrès il a réalisé et quel honneur en rejaillira sur notre nation, j'avoue alors que je suis heureux de l'opposition qu'on vous a faite; non que j'approuve l'aigreur qui, parfois, accompagne les disputes, et spécialement en Mathématiques (où l'on ne doit considérer que la démonstration, les parties ne devant s'occuper que du seul sujet en question). Mais le genre et le style de ce pays leur fournit une excuse; on y est d'ordinaire dans les discussions très aigre ou plutôt méchant (à mon sens), de part et d'autre, et si vous n'aviez pas été un étranger, et, de fait, quelqu'un pour qui ils ont une grande estime, ils auraient encore été moins sans gêne à votre égard, car, à leur compte, tout ce qu'ils disent dans ce goût n'est qu'une ronde et habituelle familiarité, loin de toute injure ou offense. M. Fermat m'a envoyé, il y a quelque temps, une lettre où il revient sur quelques points de vos envois antérieurs; il s'en rapportait à ma discrétion pour vous communiquer ce qu'il écrivait.

Aussi longtemps qu'il m'a laissé le choix, je ne vous en ai point envoyé copie; mais maintenant, par le dernier courrier, il me demande de le faire; je vous adresse donc une transcription de cet écrit. Certainement vous avez la satisfaction d'avoir affaire en même temps aux deux plus grands hommes de France (de l'aveu de tous les plus éminents), et je ne doute pas que vos dernières lettres des 4 et 15 mars (que j'ai reçues précisément ce matin, en même temps qu'une de vous du même temps à Mylord Brouncker) ne vous assurent de leur part et de

celle de tout le monde une pleine et entière déférence. Quoique, depuis que j'ai reçu ces lettres, je n'aie eu que le temps de les parcourir rapidement, tandis que de tels morceaux ont besoin d'être examinés sérieusement et à loisir (spécialement pour un joueur aussi faible que moi dans ces parties), je vois assez la lumière qui y éclate pour la saluer comme un Soleil, non pas à son lever, mais à son midi en culmination, au plus haut point du zénith. J'ai la confiance que ces derniers écrits ne susciteront plus de chicanes contre eux; je vais tout aussitôt m'empresser de les envoyer à M. Fermat et à M. Frenicle, et je vous transmettrai de même immédiatement ce qu'ils m'en diront.

Votre précédente lettre, celle qui est restée si longtemps dans les mains du Docteur F., a été envoyée par le dernier courrier à M. Frenicle, qui est dans cette ville, mais que mon indisposition ne me permet pas d'aller voir moi-même. Il m'a répondu un mot par mon homme, me disant qu'il écrirait à cette occasion quelque chose que j'aurais aujourd'hui avant le départ de la poste pour Londres. Je vais garder mon paquet ouvert jusqu'au dernier moment, qui n'est pas bien éloigné, et si quelque papier me vient de M. Frenicle, je le comprendrai dans l'envoi.

Je vous fais donc mes très humbles et sincères remerciments pour la belle démonstration que vous avez bien voulu m'envoyer. En vérité, elle m'a infiniment plu et je suis sûr qu'elle plaira de même à tous ceux qui la verront. Je vous aurais demandé la permission de la rendre *publici juris* en la faisant imprimer, mais le post-scriptum de votre lettre du 15 mars me fait connaître que vous avez l'intention de publier ce qui s'est passé entre vous et ces Messieurs, par mon entremise; si vous le faites, j'espère et désire très vivement que cette excellente production de votre seul cerveau trouve là une place, qui sera certes plus belle et honorable si elle est accompagnée de plusieurs sœurs du même père et assistée d'un cortège venant des familles des deux plus riches seigneurs de cette nation en ce genre de trésors, que si elle se présentait toute seule sans compagnie ni entourage. Quant à ce que vous avez bien voulu me demander très civilement et très obligeam-

ment mon avis à l'occasion de la publication de ces lettres, je ne puis que vous remercier très humblement de votre égard par moi. Si j'avais imaginé qu'elles devaient survivre à leur lecture par vous, moi qui les écrivais, comme si j'avais été à converser avec vous de vive voix, j'y aurais certes marqué avec plus de soin et d'attention le respect que je professe pour vous.

Si ma santé et ma force me le permettaient, je vous entretiendrais de diverses particularités que je suis obligé de remettre à une autre fois, quoiqu'en vérité vous puissiez raisonnablement trouver cette lettre assez longue et fastidieuse pour avoir plutôt besoin de pardon et d'excuse; mais j'ai tant de plaisir à vous entretenir qu'il me coûte beaucoup d'en finir. Comme je viens seulement de me relever d'une maladie qui m'a retenu près d'un mois dans mon lit, je ne suis pas capable d'écrire plus longtemps; c'est d'ailleurs la première fois depuis que je suis levé, que j'emploie ma plume pour une affaire de quelque importance. En envoyant hier votre lettre à M. Fermat, j'ai été obligé d'employer la main de mes secrétaires. Je vous souhaite tout bonheur et, prenant respectueusement congé de vous, je demeure,

Digne Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

Kenelm Digby.

Paris, 4 mai 1658.

LETTRE XXXVII

(renfermée, avec la suivante, dans la précédente).

Fermat a Kenelm Digby.

Toulouse, 7 avril 1658.

(*Voir* la *Correspondance de Fermat*, n° 91, Tome II, page 374.)

LETTRE XXVIII.

Frenicle a Kenelm Digby.

Je m'étais proposé, très illustre et très honoré Seigneur, de ne plus rien écrire à propos de ces disputes qui me sont fastidieuses et auxquelles je répugne grandement; cependant, cette fois encore, j'ai cru devoir vous adresser quelques remarques pour vous faire comprendre que le clarissime Wallis, dont je connaissais déjà la science, me fournit surtout un sujet d'étonnement, quand je vois qu'un homme aussi pénétrant a pu s'oublier assez lui-même pour donner des solutions telles que celles qu'on lit dans sa lettre du 21 novembre et qu'il soutient encore comme légitimes. Il n'a pas d'ailleurs à me reprocher de ne pas avoir d'estime pour lui ou pour ses œuvres; il en est tout autrement; mais si j'ai eu de lui une opinion autre que celle qu'il méritait, qu'il s'en accuse lui-même; car c'est bien lui qui avait été la cause de cette fausse appréciation, en présentant comme choses sérieuses de vraies plaisanteries, s'il m'est permis de le dire. Sans doute il n'avait pas voulu appliquer sérieusement son esprit sur ces matières; car, à voir ses dernières solutions et sa dernière lettre, je le reconnais comme très habile et très perspicace, quoique trop attaché à défendre les opinions qu'il a une fois émises; il ne réfléchit pas combien il est habituel aux hommes de se tromper et combien il est honnête et louable de reconnaître son erreur et de s'abstenir d'un entêtement hors de saison.

Qu'il n'estime pas non plus que j'aie prétendu triompher de lui ou lui faire quelque insulte; mais ma réponse à sa lettre était bien en rapport avec celle-ci; aussi suis-je prêt à lui donner satisfaction pour tout ce que renferment les deux épîtres dont il se plaint et à montrer qu'elles ne contiennent rien qui ne s'appuie sur des raisons qu'il faille admettre, rien qui ne réponde justement à sa lettre précitée du 21 novembre. Il n'a pas à m'objecter que j'ai dû avoir une fausse opinion de

lui, puisque je n'ai pu le juger autrement que par ses œuvres : « A leurs fruits vous les connaîtrez ». Et il n'y a pas de mathématicien qui ne juge que, du moment où je ne gardais pas un silence absolu, j'aie fait preuve à son égard de plus de courtoisie qu'il n'était en droit de s'y attendre. Et en vérité, si dans ces réponses il y a quelque chicane, elle a eu au moins cette utilité qu'elle a pu faire connaître en partie ce qu'il vaut vraiment, soit à moi, soit aux autres qui ont vu sa dernière lettre, car ç'a été pour lui un aiguillon qui l'a forcé à examiner plus attentivement les questions et à s'en rendre maître. Il est clair en effet désormais qu'il possède la troisième de Fermat et la sienne; quant aux deux premières de Fermat, il reste un doute jusqu'à ce qu'il ait fourni, en dehors de l'unité, un autre cube et un autre carré qui, ajoutés à leurs parties, fassent l'un un carré, l'autre un cube, ou jusqu'à ce qu'au moins il résolve le problème posé pages 3 et 4 de l'*Inquisition* de Frenicle sur la solution de Schooten et trouve en nombres les trois cubes et le carré exprimés analytiquement.

Le clarissime Wallis doit aussi faire attention à ne pas prendre le silence de Fermat comme la reconnaissance qu'il a eu satisfaction et qu'il admet de pareilles solutions; car il en est tout autrement. Ce silence vient de ce que Fermat le voit seulement attaché à ces solutions non acceptables et qu'il préfère le laisser dans cette fausse estime et dans la vaine joie qu'elles lui donnent plutôt que d'essayer en vain de le détourner d'elles.

Enfin, dans la dernière lettre du clarissime Wallis du 19 mars, il y a un point où il ne me paraît pas agir franchement, quand il soutient que de mes deux épîtres précitées la seconde contredit la première, puisque, dit-il, la seconde reçoit l'unité comme cube et comme carré, la première la rejette. La première en effet ne refuse nullement à l'unité le caractère de cube ou de carré qui lui est communément attribué; mais, comme l'unité n'a pas de parties, on nie qu'elle puisse être présentée comme le cube ou le carré cherché, qui doit être ajouté à ses parties, qui doit donc en avoir. Si donc dans la première on dit que Wallis, en donnant l'unité, n'a pas donné un cube, il est plus

clair que le jour qu'il faut entendre, non pas que l'unité n'est pas un cube absolument parlant, mais bien qu'elle n'est pas un cube satisfaisant à la question.

En ce qui concerne ces solutions, qui sont tellement faciles qu'il suffise pour les trouver de multiplier par 2 ou 3 un nombre donné, je ne sais si, dans votre Angleterre, on a coutume de les admettre; mais ici on ne le ferait pas, et s'il est vrai que le problème est imparfaitement proposé quand on peut y satisfaire de la sorte, contre la pensée de l'auteur, cependant nous ne croyons pas qu'il faille astreindre les mathématiciens à faire leurs propositions avec une précaution absolue, surtout quand elles viennent de savants comme l'est hors de doute le très docte Fermat et quand elles sont énoncées seulement à la hâte et pour faire plaisir; c'est à celui qui donne la solution à la fournir juste et digne d'elle-même. Si quelqu'un proposait au contraire un pareil problème, ayant en vue une solution aussi simple, on prendrait cela pour une injure; car le proposant paraîtrait tenir son correspondant pour tout à fait inhabile, à sembler regarder comme suffisant de lui proposer ce qu'on ne devrait pas même demander à un enfant.

Voilà, très illustre Seigneur, ce que j'ai cru devoir vous faire remarquer; vous saurez par là ce que je pense maintenant du clarissime Wallis, comme vous savez que c'est malgré moi, sur votre invitation et forcé par vous (car pour moi vos désirs sont des ordres), que j'ai porté un jugement sur sa lettre, et que je serai d'ailleurs et toujours votre très attaché et tout dévoué. Adieu.

LETTRE XXXIX.

John Wallis a Kenelm Digby.

La lettre que vous m'avez envoyée, très noble Seigneur, en date de Paris 4 mai, style nouveau, a été reçu par nous le 3 mai de notre style; autant j'ai été heureux de cette rapidité, autant j'ai regretté le retard qu'a au contraire subi la lettre que je vous ai adressée. D'autre part,

quelque plaisir que devait nécessairement me faire la vôtre, surtout en me témoignant la bienveillance que vous m'accordez et l'honneur que vous me faites, je ne puis vous dissimuler que sur un ou deux points je n'aie été fâché, et surtout en apprenant le mauvais état de votre santé. Qui sait ce que vous valez pour le progrès des Sciences doit nécessairement s'inquiéter vivement de votre santé, car il n'ignore pas ce qui en dépend. Mais la divine Providence sera à remercier de vous avoir conservé sain et sauf pour l'avantage des Belles-Lettres dont vous serez encore l'honneur et l'ornement. Je regrette encore, en lisant les éloges que vous me prodiguez et que je dois à votre bonté, non à mon mérite, d'être incapable non seulement de m'en rendre digne, mais même de vous en remercier comme je le devrais. Car la facilité de votre style, la vivacité de votre esprit dans le rôle de la bienveillance sont de telle nature que je ferais preuve de toute imprudence en voulant lutter là-dessus avec vous, en essayant d'égaler mes expressions aux bontés dont vous me comblez. J'avoue donc à quel point je suis impuissant et je me prosterne vaincu, n'ayant rien à répondre pour témoigner la gratitude de mon cœur humblement dévoué; croyez bien qu'elle est au-dessus de tout ce que je peux dire, accordez à mon aveu la grâce qu'il implore et daignez me continuer la faveur que vous m'avez jusqu'ici accordée. Je vais rapidement achever ce qui me reste à dire.

Pour la lettre de M. Frenicle, incluse dans la vôtre, je me plais à en reconnaître l'amabilité, mais je n'ai guère à y répondre si ce n'est pour le remercier de l'opinion qu'il a désormais conçue et qu'il professe sur mon compte. J'admets avec joie l'excuse ou la défense qu'il présente pour ses lettres antérieures. Je ne disputerai pas pour le voir encore juger d'entêtement hors de saison ce que j'ai regardé comme une juste défense de moi-même; ni pour le voir douter encore si je puis répondre aux deux premières questions de Fermat; quand il aura pesé mes lettres des 4 et 15 mars, ce doute s'effacera. Enfin je n'examinerai plus si dans ses lettres précédentes il a, oui ou non, nié que l'unité fût un carré ou un cube. Tout cela ne vaut pas la peine de contredire ce

très noble Seigneur. Enfin notre question (de carrés qui, ajoutés à la somme de leurs parties aliquotes, fassent une même somme), que nous avions jadis proposée en passant à Fermat, je vois, par une lettre récemment reçue, que Frenicle l'a résolue et qu'il y a même attaché beaucoup plus d'importance que je ne l'aurais fait. Mais on devait bien attendre qu'il la résolût très facilement, puisque la solution dépend tout à fait des mêmes principes que celle des questions de Fermat qu'il avait déjà trouvée.

Je ne pense pas non plus devoir longuement répondre à la lettre de M. Fermat. Deux points suffisent. D'une part, il dit que j'aurais avancé, ou au moins que je n'aurais pas douté que mylord vicomte Brouncker ne puisse résoudre, pourvu qu'il veuille s'y essayer, ce problème du cube donné à partager en deux cubes rationels. Maintenant il affirme que la proposition est impossible, et je me serais donc avancé à la légère et bien téméraírement. Je répondrai à votre clarissime Correspondant qu'il ne cite pas exactement ce que j'ai avancé; car il passe sous silence ce que j'avais ajouté : *du moins en tant que la nature de la chose peut le permettre*. Si j'avais précisément fait cette addition, c'est que je soupçonnais déjà de prime-abord que la chose était impossible; mais, ne l'ayant pas examinée, je n'avais rien à affirmer. Je ne parlais donc de solution que suivant ce que permettait la nature de la question, c'est-à-dire l'exécution si la chose est possible, sinon, la reconnaissance de l'impossibilité. Au reste, je ne me trompais pas dans mes conjectures, puisque, bientôt après, le très honoré Lord me faisait entendre ce que dit maintenant Fermat. La lettre qu'il m'écrivit particulièrement porte, en effet :

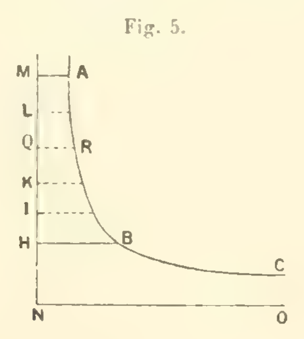
« Sir, cette nuit passée j'ai reçu votre .... Votre opinion concer-
» nant M. Fermat est effectivement la même que la mienne, spéciale-
» ment au sujet de son dernier papier.... Ses déterminations négatives
» sont, à mon avis, sa plus grande gloire, et c'est là où il se regarde
» lui-même comme singulier. Autrement il ne proposerait certaine-
» ment pas une chose impossible comme : *Partager un nombre cube*
» *donné en deux cubes rationels,* ce qui ne se peut. Cette question ne

» doit pas être confondue avec l'autre, déjà résolue au moins de plu-
» sieurs manières, par M. Frenicle, comme vous savez....

Le second point concerne ce que M. Fermat dit des hyperboles; il pense que je n'ai pas foi à ses assertions sur le centre de gravité dans les hyperboles infinies. C'est tout le contraire; je n'avais aucun soupçon que votre très noble Correspondant n'eût pleinement dit la vérité en affirmant qu'il avait approfondi ce sujet depuis de longues années, au moins dans les hyperboles entières et peut-être aussi dans les semi-hyperboles, quoiqu'il n'en eût pas encore parlé. Je ne doute pas davantage qu'il ne puisse résoudre la question ci-dessous qu'il propose; je crois amplement qu'il a nombre d'excellents théorèmes, soit sur les hyperboles, soit sur les autres matières élevées de la Géométrie, soit même en Arithmétique, et il en a déjà donné assez de spécimens.

Voici la question qu'il propose : Étant donnée la vraie hyperbole ABC (*fig.* 5), ayant pour asymptotes NM, NO, à l'une de celles-ci, soit

Fig. 5.



NO, on mène des parallèles MA, HB. On propose de couper la figure AMHB (limitée par la ligne hyperbolique et les trois droites AM, MH, HB) au moyen d'une droite QR parallèle à HB et MA, en sorte que le segment RQHB soit au reste AMQR en raison donnée.

Voici ma solution : Si la raison est énonçable en vrais nombres entiers, soit comme de 3 à 2 ou de a à e; entre les droites NH, HM, on cherchera autant de moyennes proportionelles (du moins celle qui sera utile de ces moyennes) qu'il y a d'unités dans la somme des deux nombres moins 1 (par exemple, $4 = 3 + 2 - 1$ ou $a + e - 1$); soit de

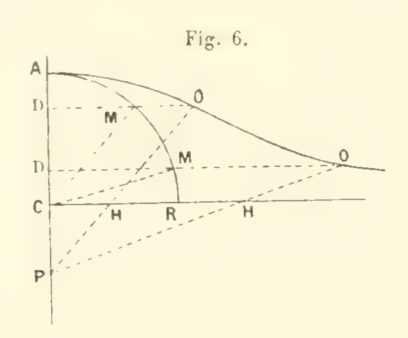
ces moyennes NQ la 3me (ou celle dénommée par a) à partir de NH, ou la 2me (ou celle dénommée par e) à partir de NM. Je dis que la droite QR, menée parallèlement par Q à HB ou à MA, résout le problème. Si, au contraire, la raison n'est pas énonçable, on pourra obtenir une approximation au moyen des logarithmes, mais non pas une solution rigoureusement géométrique.

Quant au reste, ou j'en ai déjà suffisamment parlé auparavant, ou bien on peut le passer sous silence. Je n'ai, en effet, pas le loisir et je ne crois pas intéressant de descendre aux minuties de détail.

Cependant, pour donner un retour à votre très noble Correspondant, je désire lui proposer une question qui ressemble à la sienne ci-dessus et qui n'est peut-être pas moins élégante.

Étant donnée la conchoïde AO (*fig.* 6), dont A est le sommet, P le pôle, CRH la règle (coupant à angle droit AP au point C), on décrit de C comme centre le quart de cercle AR du côté OH.

Fig. 6.



On propose de décrire une figure de même genre que la figure conchoïde indéfinie OARH (entre la droite RH indéfinie, la conchoïde AO indéfinie et le quart de cercle AR), telle que cette nouvelle figure $\omega\alpha\rho\eta$ soit en raison donnée avec la proposée.

Ou, s'il préfère un énoncé sous forme de théorème, pour ne pas sembler proposer des énigmes, je dirai :

Le rapport de la figure conchoïde indéfinie OARH à une autre quelconque $\omega\alpha\rho\eta$ du même genre est composé des rapports CA à $\varkappa\alpha$ et CP à $\varkappa\pi$ (les lettres α, $\varkappa$, π, ρ, η, ω dénotant dans une figure les mêmes

points que dans l'autre A, C, P, R, H, O), quelle que soit d'ailleurs la variation du rapport des droites AC, CP.

Je lui communiquerai, s'il le désire, soit la recherche, soit la démonstration.

Il me reste encore à vous dire, très illustre Seigneur, que je comprends par votre lettre que les deux personnages avec lesquels nous avons eu affaire sont très considérables. Il se peut donc bien qu'un étranger comme moi, n'étant pas suffisamment au courant des choses et des dignités de ce pays, les ait traités un peu plus familièrement qu'il ne convenait à leur dignité, que j'aie agi d'ailleurs pour mon compte ou pour celui du très honoré Vicomte. Si j'ai fait quelque faute de ce genre, ç'a été contre mon gré et j'espère que vos très nobles Correspondants, qui ont daigné d'eux-mêmes descendre avec moi dans l'arène, ne s'en prendront pas à quelqu'un plus habitué à la poussière des écoles qu'à celle des Cours. Que cette excuse me serve aussi à votre endroit, si j'ai pu me rendre coupable envers vous, car en tout je voudrais avoir observé les lois de la convenance, en tant que je suis,

Très illustre Seigneur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

John Wallis.

Oxford, 5/15 mai 1658.

LETTRE XL.

John Wallis a Vicomte Brouncker.

Très illustre Lord,

J'entends que vous avez reçu, en sûreté, ma dernière lettre à envoyer à Paris. Quant aux démonstrations que vous me demandez, les voici :

La solution du problème de Fermat (de l'espace hyperbolique à partager dans un rapport donné) se démontre comme suit (*fig.* 5, p. 582) :

Si l'on prend sur l'asymptote les droites NH, NI, NK, NQ, NL, NM

en proportion géométrique, que des points H, I, K, Q, L, M on mène des droites parallèles à l'autre asymptote, l'espace hyperbolique ABHM est divisé en cinq parties égales, comme l'a démontré Grégoire de Saint-Vincent, Livre X, je crois. Par suite, si l'on a d'un côté deux parties, de l'autre trois, il est clair que QR divise dans le rapport 2 à 3. C. Q. F. D.

Quant à mon problème ou théorème de la figure en conque, en voici une brève explication (*fig.* 6, page 583).

Soit la conchoïde AOO, dont P est le pôle, A le sommet, CHH la règle; CAR le quart de cercle, DM une ordonnée quelconque du quart de cercle, DO, de la conchoïde; et le reste construit comme dans la figure. Posons, pour plus de facilité dans le calcul,

$$\text{HO} = \text{CA} = \text{CR} = \text{CM} = r, \qquad \text{CP} = p, \qquad \text{CD} = c \qquad \text{et} \qquad \text{PD} = p + c = l,$$

par conséquent

$$\overline{\text{PD}}^2 = l^2.$$

A cause des parallèles et des triangles semblables, on a

$$\frac{\text{CD}}{\text{HO}} = \frac{c}{r} = \frac{\text{PC}}{\text{PH}} = \frac{p}{\frac{pr}{c}} = \frac{\text{PD}}{\text{PO}} = \frac{l}{\frac{lr}{c}},$$

d'où

$$\overline{\text{PO}}^2 = \frac{l^2 r^2}{c^2}.$$

D'ailleurs, par Euclide, I, 47,

$$\overline{\text{CM}}^2 - \overline{\text{CD}}^2 = \overline{\text{DM}}^2 = r^2 - c^2$$

et

$$\overline{\text{DO}}^2 = \overline{\text{PO}}^2 - \overline{\text{PD}}^2 = \frac{l^2 r^2}{c^2} - l^2 = \frac{l^2 r^2 - l^2 c^2}{c^2} = \frac{r^2 - c^2}{c^2} l^2.$$

Par conséquent,

$$\text{DO} = \frac{l}{c}\sqrt{r^2 - c^2} = \frac{c + p}{c}\sqrt{r^2 - c^2} = \sqrt{r^2 - c^2} + \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{c} p.$$

Mais

$$\text{DO} = \text{DM} + \text{MO}, \qquad \text{DM} = \sqrt{r^2 - c^2}, \qquad \text{donc} \qquad \text{MO} = \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{c} p.$$

Cela posé, si dans des conchoïdes différentes AO, Aω, la quantité CA reste toujours la même et que, par suite, r et c ne changent pas, tandis que PC ou p devient π, on aura toujours

$$\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{M}\omega} = \frac{\frac{\sqrt{r^2-c^2}}{c}\,p}{\frac{\sqrt{r^2-c^2}}{c}\,\pi} = \frac{p}{\pi}.$$

Par suite, la somme de toutes les MO à celle des Mω, c'est-à-dire, en raison de la hauteur commune de part et d'autre, la figure RMAO sera à la figure RMAω comme p à π.

Si maintenant PC ou p reste, au contraire, sans changement, tandis que CA, donc CD changent, soit r en ρ et c en $\varkappa$, on aura

$$\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{M}\omega} = \frac{\frac{\sqrt{r^2-c^2}}{c}\,p}{\frac{\sqrt{\rho^2-\varkappa^2}}{\varkappa}\,p} = \frac{\frac{\sqrt{r^2-c^2}}{c}}{\frac{\sqrt{\rho^2-\varkappa^2}}{\varkappa}} = \frac{r}{\rho}.$$

En effet, la somme des $\sqrt{r^2-c^2}$ est à celle des $\sqrt{\rho^2-\varkappa^2}$, c'est-à-dire le quart de cercle est au quart de cercle, comme r^2 à ρ^2, ou en raison doublée des rayons. De même, on a toujours $\frac{c}{\varkappa} = \frac{r}{\rho}$. Par suite, la somme des $\frac{\sqrt{r^2-c^2}}{c}$ est à celle des $\frac{\sqrt{\rho^2-\varkappa^2}}{\varkappa}$, comme $\frac{r^2}{r}$ à $\frac{\rho^2}{\rho}$, c'est-à-dire comme r à ρ.

Si enfin il y a changement tant dans la quantité PC que dans la quantité CA, soit de p en π et de r en ρ, la somme des MO ou $\frac{\sqrt{r^2-c^2}}{c}\,p$ sera à celles des $\mu\omega$ ou $\frac{\sqrt{\rho^2-\varkappa^2}}{\varkappa}\pi$, c'est-à-dire la figure RMAO sera à la figure $\rho\mu\alpha\omega$ en raison composée de p à π et de r à ρ, c'est-à-dire dans le rapport $\frac{pr}{\pi\rho}$ ou du rectangle PCA au rectangle $\pi\varkappa\alpha$. C. Q. F. D.

Cela connu, il sera facile soit de partager dans un rapport donné la figure en conque RMAO, soit de construire une autre figure qui soit avec elle dans un rapport donné.

Enfin, vous me demandez la solution d'un troisième problème qui ne concerne pas les lettres de Fermat, et qu'un de mes amis, au commencement de février dernier, me donna par écrit un soir que je le rencontrai par hasard. J'ai récemment appris du même ami qu'elle a été imprimée sous le titre :

« Les professeurs de Mathématiques les plus en renom et les autres » célèbres mathématiciens d'Angleterre sont instamment priés par » Jean de Montfert de vouloir bien résoudre ce problème. »

» On donne, en nombres, dans une ellipse : les diamètres extrêmes, » la distance du centre à un point de l'axe transverse, et l'angle avec » l'axe d'une ligne qui le coupe en ce point. Trouver en nombres les » segments de cette ligne prolongée, s'il est besoin, et compris entre » l'axe transverse et l'ellipse.

» Étant données (*fig.* 7)

$$\begin{aligned} AC &= 1{,}00000, \\ aC &= 0{,}76604, \\ CB &= 0{,}50000, \\ CBD &= 70^\circ, \end{aligned}$$

» on demande BD et BF. »

Je crus que cette question était de mon ami, car il n'avait donné aucune indication contraire, et je ne lui demandai pas de qui elle était. Je la résolus le lendemain matin un peu plus généralement, à peu près sous la forme qui suit, car je ne m'en souviens pas exactement. Je ne m'en suis plus occupé, la chose ne me paraissant offrir ni grande difficulté, ni grande importance; au reste, à ce que j'apprends, elle a reçu de divers diverses solutions, que, du reste, je n'avais pas encore vues.

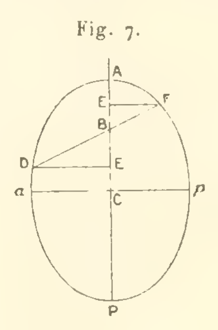
On donne dans une ellipse les diamètres extrêmes (ou bien deux diamètres conjugués quelconques avec l'angle de leur inclinaison) AP, *ap*. L'un d'eux, soit AP, est rencontré en un point donné B (soit en dedans de l'ellipse, soit en dehors sur le diamètre prolongé) par une droite DF qui coupe l'ellipse aux points D et F. Trouver les droites BD, BF.

Des points D, F, au diamètre AP, menez les ordonnées DE, FE. Posons, pour la commodité du calcul,

$$AP = 2d, \qquad ap = 2\delta, \qquad DE \text{ ou } FE = a, \qquad BC = b, \qquad CE = c.$$

Par conséquent, $BE = |c - b|$, différence entre BC et CE. Nous supposons, en effet, que FE et DE tombent au-dessus de la droite *ap*, en sorte que si DE tombe au-dessous de *a*C*p*, il faut réputer CE comme une quantité négative, ou bien, ce qui revient au même, on aura $BE = c \mp b$, ce qui ne troublera pas le calcul.

Fig. 7.



Dans les triangles DBE, FBE, on donne encore les angles (l'angle en B étant donné et l'angle en E droit ou au moins donné), donc on donne le rapport des côtés, qui est celui des sinus des angles opposés; soit donc $\frac{BE}{DE(\text{ou } FE)} = \frac{n}{m}$. Comme $BE = |c - b|$ et DE (ou FE) $= a$,

$$\frac{n}{m} = \frac{|c-b|}{a}, \qquad a = \frac{|c-b|}{n} m, \qquad a^2 = \frac{c^2 + b^2 - 2cb}{n^2} m^2.$$

Or, dans une ellipse, l'ordonnée DF ou FE est, ou bien moyenne proportionelle entre les segments AE, EP du diamètre (si $aC = AC$), ou est, à cette moyenne proportionelle, dans le rapport *a*C à AC. Donc, les carrés étant proportionels aux carrés,

$$\frac{AC(=d)}{aC(=\delta)} = \frac{\sqrt{AE.EP}}{DE(\text{ou } FE = a)} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{\delta^2} = \frac{AE \times EP}{a^2}.$$

Mais

$$AE \times EP = (\tfrac{1}{2}AP - CE) \times (\tfrac{1}{2}AP + CE) = (d - c) \times (d + c) = d^2 - c^2.$$

Donc

$$\frac{d^2}{\delta^2} = \frac{d^2 - c^2}{a^2}, \qquad a^2 = \frac{d^2 - c^2}{d^2}\delta^2.$$

Puis donc que

$$\frac{d^2 - c^2}{d^2}\delta^2 = a^2 = \frac{c^2 + b^2 - 2cb}{n^2}m^2,$$

on aura

$$d^2\delta^2 n^2 - c^2\delta^2 n^2 = c^2 d^2 m^2 + b^2 d^2 m^2 - 2cbd^2 m^2,$$

et

$$m^2 b^2 d^2 - n^2 d^2 \delta^2 = 2m^2 bd^2 c - m^2 d^2 c^2 - n^2\delta^2 c^2,$$

et

$$\frac{m^2 b^2 d^2 - n^2 d^2\delta^2}{m^2 d^2 + n^2\delta^2} = \frac{2m^2 bd^2}{m^2 d^2 + n^2\delta^2}c - c^2.$$

Résolvant l'équation :

$$\frac{m^2 bd^2 \pm nd\delta\sqrt{m^2 d^2 + n^2\delta^2 - m^2 b^2}}{m^2 d^2 + n^2\delta^2} = c = \text{CE}.$$

Il faut remarquer que des quantités ainsi désignées avec ambiguïté par les signes $\pm$, la plus grande, correspondant au signe $+$, est la distance CE du point E le plus éloigné du centre; la plus petite, correspondant au signe $-$, est la distance CE du point E le plus proche, lequel est d'ailleurs situé au-dessus du centre vers B (comme le suppose la figure), si la quantité est positive, c'est-à-dire si

$$m^2 bd^2 > nd\delta\sqrt{m^2 d^2 + n^2\delta^2 - m^2 b^2}.$$

Il sera, au contraire, au-dessous du centre, si l'inégalité est renversée, et, par suite, la quantité négative, ou enfin si, par suite de l'égalité entre ces deux termes, ils se détruisent réciproquement, E sera au centre. Il peut même arriver, si B est pris en dehors de l'ellipse, que

$$m^2 b^2 > m^2 d^2 + n^2\delta^2;$$

auquel cas l'équation est impossible, preuve qu'alors la droite rencontrant sous l'angle donné le diamètre prolongé au point donné B, est tout entière en dehors de l'ellipse, et que les points D et F n'existent pas. S'il y avait égalité, que $m^2 b^2$ se détruisît avec $m^2 d^2 + n^2\delta^2$, la droite ainsi menée toucherait l'ellipse sans la couper, et les points D,

F coïncideraient. Tout cela est assez clair, pour qui connaît bien la nature des équations, et n'a pas besoin d'être plus longuement expliqué.

Ayant désormais les points B donné, E trouvé, on aura BE côté du triangle DBE ou FBE et, par suite, connaissant aussi tous les angles, comme on l'a dit, le côté BD ou BF; on aura, en effet,

$$\frac{\sin D\,(\text{ou } F)}{\sin E} = \frac{BE}{BD\,(\text{ou } BF)}.$$

C. Q. D. F.

Voilà, très noble Lord, ce que, pour obéir à vos ordres, devait vous présenter

Le fidèle exécuteur de vos volontés,

JOHN WALLIS.

11/21 mai 1658.

LETTRE XLI.

KENELM DIGBY A M. TH. WHITE.

Très honoré Monsieur, je vous remercie humblement de votre lettre du 1er avril, et je vous assure que j'ai été très charmé de ce que vous m'avez envoyé de la part de mylord Brouncker et du docteur Wallis. Ils se sont maintenant montrés effectivement tous deux de très grands personnages. J'ai rencontré quelques-uns des plus capables mathématiciens, depuis que j'ai reçu leurs lettres; je les leur ai montrées et ils ont maintenant pour eux la plus grande vénération. En fait, c'est M. Frenicle qui a été l'occasion de ces visites, car il parlait si hautement de ces lettres qu'il a donné le désir de les voir; car, quoiqu'il ne veuille rien abandonner de ce qu'il a écrit pour les discuter, maintenant il divulgue à tout le monde l'estime qu'il en fait, ce que je tiens pour la marque d'un noble esprit. Je laisse ouvert mon paquet pour le docteur Wallis; vous pourrez le lire et le donner ainsi à mylord Brouncker, que je prie, une fois qu'il en aura vu le contenu, de le sceller et de l'expédier au Docteur.

J'ai écrit par la dernière poste à sa Seigneurie; aussi ne veux-je pas le déranger encore par une lettre spéciale pour lui; mais je vous prie de lui présenter mes humbles respects. En vérité, ces dernières lettres de sa Seigneurie et du Docteur ont amené un grand changement dans les opinions sur leur compte. On les regarde maintenant comme les plus grands mathématiciens du temps, et laissez-moi vous le dire en particulier, je demandais à M. Frenicle, combien il était estimé dans la balance contre l'un ou l'autre; il répondit aussitôt qu'il ne pesait pas devant eux, qu'il n'était qu'un mauvais écolier en présence des plus grands maîtres du temps. Je ne veux pas vous retenir plus longtemps, mais je reste

Votre très humble et très affectionné serviteur,

Kenelm Digby.

Paris, 8 mai 1658.

LETTRE XLII.

Kenelm Digby a John Wallis.

Très honoré Monsieur, quoique je vous aie ennuyé d'une longue lettre (la quatrième de ce mois) par le dernier courrier, je ne puis encore m'empêcher de vous en adresser une nouvelle aussi tôt; c'est un effet de l'excessif contentement que m'ont procuré les vôtres des 4 et 15 mars; je suis encore obligé de vous le témoigner en un ou deux mots. En vérité, depuis bien longtemps, rien ne m'a fait autant de plaisir que ces lettres, tant ce que vous avez envoyé en même temps à mylord Brouncker, que ce que sa Seigneurie m'a également écrit, avec tant de science, de profondes et subtiles spéculations. Vous venez de faire paraître ici nos mathématiciens comme des Samsons, qui peuvent aisément rompre et mettre en pièces toutes les cordes et tous les pièges des Philistins qui vous assaillaient chaudement. Et les plus grands hommes d'ici sont maintenant forcés d'avouer que l'Angleterre ne le cède à aucune nation du monde en ces nobles spéculations. M. Frenicle dit maintenant bien haut et bien fort combien il révère

vos profondes connaissances; il se plaint seulement que vous l'ayez si longtemps laissé s'enfoncer dans son erreur, en badinant si longuement avec lui comme s'il eût été un joueur trop faible pour vous, avant d'en venir avec lui à votre meilleur jeu et à l'emploi de vos forces.

Il m'a promis de m'envoyer aujourd'hui une lettre pour exprimer ces sentiments dans ce sens. Aussi vais-je garder mon paquet ouvert jusqu'à la dernière heure, si sa lettre n'arrive pas avant, afin que vous puissiez l'avoir par ce courrier. Car je crois qu'il ne vous déplaira pas de voir un aussi grand personnage en cette matière reconnaître la vérité comme il devait le faire et s'y soumettre franchement. J'ai aussi envoyé vos lettres à M. Fermat, et, si je reçois son sentiment sur elles, je vous le communiquerai.

Je baise vos mains et reste, digne Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

Kenelm Digby.

Paris, 8 mai 1658.

LETTRE XLIII.

Frenicle a Kenelm Digby.

J'ai lu les dernières lettres du clarissime Wallis, en date des 4 et 15 mars, que vous m'avez communiquées, très illustre et très honoré Chevalier. Elles m'ont clairement fait connaître maintenant combien Wallis a fait de progrès dans les Sciences mathématiques; mais mon esprit demeure en suspens quand je me demande ce qui a induit un homme aussi savant à vouloir être aussi longtemps méconnu par nous. Quel motif pouvait-il avoir, quand c'est de son devoir et de sa profession de faire connaître la Science? Je l'avoue, j'y ai été quelque peu trompé; mais, si j'ai commis quelque faute, elle doit lui être imputée, non à moi. Tel il se montrait, tel il devait être jugé, et pourtant ce jugement défavorable, je ne le portais pas de mon plein gré, mais à regret. Aussi, tant qu'il y avait lieu de blâmer, je n'aurais pas voulu

que le blâme parût venir de moi, j'aurais désiré que mon nom fût caché et que ce que je disais parût un avis plutôt qu'un reproche; je ne voulais pas sembler m'être attaqué, même avec quelque raison, à une personne aussi illustre. Mais puisqu'il faut passer à l'approbation, ce n'est plus en secret et à contre-cœur, mais ouvertement et avec joie, que je paraîtrai, sous mon nom, à la face de tout le public savant. J'avais jugé Wallis endormi, j'ai plaisir à l'apprécier éveillé. J'avais déjà vu un Hercule, mais jouant avec des jeunes filles; aujourd'hui je le contemple triomphant des hydres et des monstres; d'abord poursuivant de frivoles et puérils amusements, il accomplit maintenant des labeurs effrayants et gigantesques. C'est au reste le clarissime Schooten que visaient spécialement les problèmes sur les cubes à ajouter à leurs parties; mais il a été prévenu par la sagacité de l'illustre savant, par la puissance de cet Atlas auquel convenait bien une pareille preuve de sa force, qui doit se consacrer à de tels exercices et non pas à des minuties.

Que la Hollande cède donc à l'Angleterre, Leyde à Oxford; si les Gaules Narbonnaise et Celtique pourraient disputer la palme au Kent et à l'Oxford de la Bretagne, si elles pourraient lutter à forces égales, ou même peut-être supérieures, ce n'est pas à moi à le décider; je laisse à d'autres à le juger. Jusqu'à présent le combat n'a pas été égal et les chances n'étaient pas les mêmes.

Je prie votre clarissime Correspondant de m'excuser si j'ai écrit à son sujet plus librement que je n'aurais dû. Vous savez ce qui m'y a poussé, vous savez que je ne voulais lancer contre lui aucune injure, aucune invective, que je ne voulais rien ternir de sa réputation; j'ai tenu cachées les lettres dont il se plaint, j'ai refusé de les montrer même à mes amis qui les demandaient; j'aurais désiré, s'il eût été possible, que Wallis seul les lût. Vous savez que je n'ai agi que pour le stimuler, afin de pouvoir éprouver son mérite, et certes il l'eût mieux fait paraître, s'il eût donné les solutions des cubes avant d'avoir reçu l'opuscule latin que je vous ai dédié, très noble Seigneur, s'il n'eût eu par suite aucun secours. Car il ne manque pas de gens qui

auront des soupçons et qui peuvent dire que le clarissime Wallis s'est fatigué à la recherche de ces solutions, mais que son labeur n'ayant pas réussi, pour produire au moins quelque chose, il a donné comme solution l'unité au lieu des nombres cube et carré qui auraient résolu réellement les questions; il a été facile, ajoutent-ils, à un homme, d'ailleurs sagace, de marcher par un chemin déjà frayé, par une voie battue et aplanie; lorsqu'il a pu voir les parties cubiques des cubes donnés et considérer les parties de la somme des mêmes cubes décomposés, il lui a été aisé de fabriquer sa méthode. Si je répète ces imaginations, ce n'est pas que je veuille rien ôter ni dérober à la gloire due à Wallis, mais tout cela ne paraît pas absolument dépourvu de raison et on conjecture que mon opuscule ne lui a pas été sans utilité pour trouver sa méthode. Mais pour mes lettres, ce qui y a semblé méchant et dur pour Wallis a tourné à son avantage; car si mes piqûres ne l'eussent aiguillonné, si j'avais approuvé sa solution, peut-être, content de celle-ci, n'aurait-il pas été plus loin. Que votre clarissime Correspondant ne continue donc pas à m'en vouloir, comme si mes attaques ne lui avaient pas été vraiment utiles, ainsi qu'à tous les savants avec lui; qu'il avoue au contraire que j'ai bien mérité de lui et des autres, en dissipant par la bourrasque de mes chicanes les nuages qui couvraient encore à nos yeux la brillante lumière que possède Oxford et celle, non moins éclatante, qui resplendit sur Londres. Que le clarissime Wallis ne croie pas davantage que je porte envie à la gloire de quelqu'un, ni que moi, qui vénère le mérite où qu'il soit, méprise quelque nation, la vôtre surtout; car j'ai visité autrefois votre Angleterre et j'ai toujours eu pour elle un penchant particulier. J'ai même eu grande joie de reconnaître enfin l'erreur que je partageais avec quelques autres, si j'ai été tant soit peu fâché que votre clarissime Correspondant ait voulu nous cacher si longtemps ses forces. Qu'il ne pense pas enfin que je prise tant ce que je fais; au contraire, j'en fais d'ordinaire bien peu d'estime, ce qui peut amener que je m'étonne si d'autres, qui s'occupent des mêmes questions, n'y parviennent pas, et que j'aie honte de les voir

parfois s'égarer bien loin. Mais assez là-dessus; venons à ce qui regarde la Science.

Je regrette que votre clarissime Correspondant nous présente encore l'unité comme une solution légitime et ne veuille pas faire attention que, comme je l'ai souvent répété, si l'unité n'a pas de parties, elle ne peut leur être ajoutée. L'unité, dit-il, est un cube qui, ajouté à ses parties aliquotes, c'est-à-dire à rien, redonne 1, qui est carré. Je réponds : Si l'unité peut être ajoutée à ses parties, celles-ci sont quelque chose; si elles ne sont rien, comment y aurait-il des parties? Je m'étonne comment un savant aussi perspicace s'en tient à une contradiction aussi évidente, surtout quand il s'agit de nombres, non pas d'irrationels; s'il se refuse à admettre ce que je dis, qu'il reste en paix, je n'insisterai pas davantage. Laissons donc une vaine dispute sans importance et venons à la défense de ce que me reproche votre clarissime Correspondant. J'ai à montrer brièvement comment j'ai pu regarder l'unité comme cube et comme carré, même comme un nombre, mais comment en cela je n'ai pas exercé une tyrannie à l'égard de Wallis en lui refusant le droit d'en faire autant. Que l'unité soit universellement regardée comme un cube et comme un carré, je n'ai pas à le nier, mais il ne s'agit pas de cela, que je n'ai jamais contredit; mais qu'on la prenne pour un nombre, cela n'est pas accordé, et l'on conteste notamment qu'elle puisse recevoir l'appellation de nombre, alors qu'elle est solitaire, quoique, pour plus de brièveté, quand elle se trouve avec un ou plusieurs nombres, il soit préférable de dire nombres au pluriel et non, par circonlocution, tels nombres avec l'unité.

J'arrive désormais à ce qui regarde les parties aliquotes. Dans ce que j'ai avancé à ce propos, je voulais seulement indiquer que pour les nombres fractionnaires il n'y a pas proprement de parties aliquotes en nombre déterminé, qu'elles devraient être considérées comme en nombre infini ou indéfini et que par suite on n'a pas à les admettre. Si donc j'ai énuméré $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$ dans les parties aliquotes du nombre $\frac{343}{64}$,

je l'ai fait parce qu'elles ont avec leur entier une relation par nombre de même qualité que le nombre entier lui-même, puisque de part et d'autre on a un nombre joint à des fractions; j'ai donc pensé qu'elles ne devaient pas être écartées. Pour m'expliquer plus clairement, le nombre $\frac{343}{64} = 5\frac{23}{64}$; c'est donc le nombre 5 avec la fraction $\frac{23}{64}$; les relatifs des parties $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$ sont d'autre part $\frac{343}{2}$, $\frac{343}{4}$, $\frac{343}{8}$, ou bien $171\frac{1}{2}$, $85\frac{3}{4}$, $42\frac{7}{8}$, c'est-à-dire des nombres entiers avec des fractions ou de même nature que le nombre entier auquel se rapportent ces parties. Ces nombres doivent donc être admis comme parties à aussi bon droit que ceux donnés par le très noble, très savant, et très honoré par moi lord Vicomte Brouncker, ornement de la ville de Londres. Ces derniers ont en effet des relatifs qui diffèrent de leur nombre, savoir 343, 49, 7, nombres entiers alors que le proposé est entier avec une fraction. Si donc chacune des parties assignées par moi n'est pas vraiment une partie, mais fait plusieurs parties, le nombre aussi auquel elles se rapportent n'est pas une, mais plusieurs parties. D'un autre côté, je reconnais dans chaque nombre entier une propriété qui fait défaut aux parties aliquotes données par l'illustrissime Vicomte, c'est que chaque partie aliquote d'un nombre composé quelconque a comme relatif une autre des parties du même nombre ou du moins elle-même (si le nombre est carré), sauf toutefois l'unité qui a pour relatif non une partie, mais le nombre total. Or dans les parties indiquées dont il est question, la première $\frac{1}{64}$ correspond au nombre 343, la suivante $\frac{7}{64}$ au nombre 49, la dernière enfin au nombre 7. Ces relatifs, qui devraient être des parties du nombre, se trouvent plus grands que lui.

Je rends grâces au clarissime Wallis de m'avoir averti d'une faute due à la négligence du typographe; peut-être sans lui ne l'aurais-je jamais remarquée; vous savez au reste que ce lapsus ne m'est pas imputable et que dans l'original vous pouvez lire le nombre exact et tel que le clarissime Wallis l'a corrigé. Cependant je dois craindre d'avoir laissé échapper des fautes du même genre dans les solutions

de la question du très savant Wallis, car je les ai données à la hâte, au fur et à mesure que je les trouvais, et sans les revoir; je demande donc qu'on veuille bien m'excuser s'il y a lieu; je substituerai les nombres véritables à ceux qui seraient fautifs.

Puisque enfin le clarissime Wallis a trouvé comme moi, quoique un peu aidé pour les deux premiers, cinq cubes donnant un carré, je lui en envoie un sixième, le plus éloigné de tous, et qui est noté analytiquement page 4 de l'opuscule latin précité; j'y ajoute un second carré. Mais comme il est peut-être occupé à de graves spéculations, pour ne pas le retenir longtemps à leur examen, je les donnerai en parties avec les parties des sommes relatives à chaque cube ou carré partiel.

Racines des cubes partiels.	Parties des sommes des cubes partiels et de leurs parties.										
32	»	3	5	»	»	17	»	»	»	»	257
241	4	»	»	$\overline{11}^2$	»	»	»	»	113	»	257
467	8	9	5	»	13	»	»	»	113	193	»
243	32	»	5	»	»	17	»	41	»	193	»
73	4	»	5	»	13	»	37	41	»	»	»
31	64	»	»	»	13	»	37	»	»	»	»
5	4	3	»	»	13	»	»	»	»	»	»
7	16	»	25	»	»	»	»	»	»	»	»

Racines des carrés partiels.	Parties des sommes des carrés partiels et de leurs parties.						
499	3	7	»	»	»	»	$\overline{109}^2$
263	»	49	13	»	»	»	109
191	»	7	$\overline{13}^2$	»	31	»	»
4	»	»	»	»	31	»	»
5	»	»	»	»	31	»	»
67	3	19	»	»	31	»	»
439	3	»	»	»	$\overline{31}^2$	67	»
37	3	7	»	»	»	67	»
163	3	7	»	19	»	67	»
11	»	7	»	19	»	»	»
7	3	»	»	19	»	»	»

Mais quelque plaisir que je prenne à abuser de votre patience, pour vous occuper si longtemps à cet entretien, très illustre Seigneur, pour

qui j'ai autant de respect que d'affection, je n'oserais certes pas le faire si je n'avais pas tant de confiance en votre bienveillance pour,

Très excellent Chevalier,

Votre très dévoué et très obéissant

B. Frenicle de Bessy.

LETTRE XLIV.

John Wallis a Kenelm Digby.

Je vous rends très humbles grâces, illustrissime Seigneur, pour votre lettre du 8 mai, que j'ai reçue avec celle de Frenicle y incluse. Si je ne puis revendiquer comme m'étant dues les louanges dont vous m'accablez (car qui peut les mériter pour la solution de quelques problèmes d'Arithmétique ou de Géométrie?), je ne puis estimer peu de chose de recevoir de vous de tels éloges spontanés. Qu'ils viennent d'une appréciation dont chez de telles personnes le poids est toujours considérable, qu'ils ne soient dus qu'à l'affection, on doit également priser soit l'estime, soit l'amour des grands hommes, et si je puis du moins être assuré de l'une ou de l'autre, je dois le reconnaître avec gratitude. En tout cas je suis heureux, illustrissime Chevalier, d'avoir heureusement répondu, soit à vos désirs, soit aux questions de vos clarissimes Correspondants, et s'il reste encore quelque point où ils ne croient pas avoir encore entière satisfaction, comme j'ai résolu leurs principales propositions, et donné les méthodes de solution (que d'ailleurs le temps me manque), je ne crois pas que le reste vaille la peine de nous embarrasser d'escarmouches sans fin. Je ne doute pas en effet qu'ils ne pensent bien, au vu de nos solutions, que nous pouvons également résoudre le reste, pourvu que nous ayons le désir et le loisir de nous en occuper; et je ne crois pas non plus que vos très nobles Correspondants exigent que nous le fassions. Car ils ont négligé toutes nos questions, sauf celle des deux carrés qui,

ajoutés à leurs parties aliquotes, fassent la même somme, point sur lequel j'ai eu ample satisfaction; ils ne doivent donc pas se fâcher si je ne réponds pas à quelques-unes de leurs demandes.

Cependant, pour ne pas paraître tergiverser, voici ce que je dirai à la hâte sur les deux questions qui restent dans la dernière lettre de Fermat.

En premier lieu, il demande deux cubes rationels faisant la même somme que les deux donnés 1 et 8. Je réponds que les cubes du nombre positif $\frac{20}{7}$ et du négatif $\frac{17}{7}$ donnent la même somme que 1 et 8, car

$$\frac{8000}{343} - \frac{4913}{343} = \frac{3087}{343} = 9.$$

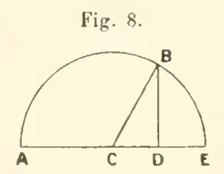
Le même moyen qui m'a donné un cube positif et un négatif ou, ce qui revient au même, la différence de deux positifs égale à la somme des deux cubes donnés, ce même moyen fournira aussi deux positifs; mais le couple ci-dessus s'est présenté d'abord. Certes, votre très savant Correspondant ne peut estimer plus difficile de trouver deux cubes rationels qui fassent une somme donnée (possible) que deux qui fassent une différence donnée (possible), quoique le calcul puisse être plus long soit d'une façon soit de l'autre. Au reste, dans le cas proposé, il ne s'agit que de trouver deux cubes dont la somme fasse neuf fois un cube; en prenant une Table de cubes et en employant des abrégés qui se présentent d'eux-mêmes à un homme exercé, et analogues à ceux que nous avons déjà mis en œuvre pour le troisième problème de Fermat, il n'y a pas une grande difficulté pour qui veut entreprendre le calcul, car ces cubes, divisés par le troisième, donneront pour somme le nombre $9 = 8 + 1$. Telle est la méthode à employer pour toute somme ou différence possible de cubes à chercher.

En second lieu, il propose de démontrer ce théorème : *Il n'y a en nombres aucun triangle rectangle dont l'aire soit un nombre carré.* Voici comment je le prouve :

Dans la figure ci-contre (*fig.* 8), dont le tracé est immédiat, les côtés

du triangle rectangle BCD ne peuvent être énonçables en nombres, si AD et DE ne sont pas entre eux comme des nombres plans semblables (autrement leur produit ne sera pas un nombre carré, et la racine BD

Fig. 8.



ne sera pas énonçable) ou comme des nombres carrés. Soient les nombres $2a^2$, $2e^2$. Dès lors CB, CD, BD seront proportionels à a^2+e^2, a^2-e^2, $2ae$, et CD, $\frac{1}{2}$BD le seront à a^2-e^2, ae. Dès lors, comme la différence de deux carrés et leur moyen proportionel ne peuvent être des plans semblables, leur produit ou l'aire du triangle ne peut être un carré. C. Q. F. D.

Au reste, je n'ai rien appris du sentiment de Fermat sur nombre de nos lettres, car pour toutes celles qui ont suivi la date du 5 novembre, le silence est complet.

Quant à votre dernière lettre et à celle de Frenicle, je n'ai qu'à vous remercier pour mettre enfin un terme à ces discussions et aussi à l'ennui qu'elles vous ont occasionné hors toute mesure et dont je demande pardon pour,

Très illustre Chevalier,

Votre très humble, très obéissant
et dévoué serviteur,

JOHN WALLIS.

Oxford, 20/30 juin 1658.

APPENDICE AUX LETTRES PRÉCÉDENTES [1].

LETTRE XLV (47).

JOHN WALLIS A VICOMTE BROUNCKER.

Très illustre Lord, les lettres qui précèdent étaient déjà imprimées et commençaient à être distribuées quand j'ai reçu aujourd'hui, par votre intermédiaire, une lettre de l'illustrissime chevalier Digby, datée du 19 juin, qui en renfermait une autre de M. de Fermat. Celle du 25 mai dont il parle doit être perdue avec ce qu'elle pouvait renfermer, ou du moins rien ne m'est parvenu. Mais pour celles que je viens de recevoir, en raison de plusieurs propositions de Fermat, élégantes et dignes de lui, je les ai aussitôt envoyées à l'imprimerie, pour les joindre comme appendice aux autres, au moins dans les exemplaires qui ne sont pas encore parus. Ainsi le public pourra connaître des spécimens d'un tel génie, bien dignes d'un homme aussi supérieur, et ce sera une raison pour forcer cet illustre savant de mettre au jour ce qu'il garde jusqu'à présent pour lui. Il est bien établi que dans ces matières il est au premier rang, qu'il s'est particulièrement occupé de questions sur les nombres généralement négligées jusqu'à présent, qu'il a fait aussi en Géométrie des recherches d'une admirable subtilité; on ne peut donc permettre qu'il garde pour lui et les siens tout ce trésor qui serait d'un si grand prix pour l'univers savant. Je suis sûr que là-dessus votre Seigneurie est entièrement de mon avis, comme elle le sera pour les remercîments à lui faire en raison de l'affabilité qu'il nous témoigne et de l'éloge dont il nous honore, éloge que nous avons plaisir à lui retourner. Mais il faut ou ne pas répondre à sa

(1) Dans la seconde édition du *Commercium*, la distinction comme appendice a été supprimée, et les lettres suivantes sont imprimées dans l'ordre XLVI, XLVII, XLV; leur nouveau numérotage est indiqué entre parenthèses et en chiffres modernes.

lettre ou différer de le faire, puisque nous avons eu à peine le temps de la lire avant de l'envoyer à l'imprimerie, pour suivre le reste déjà terminé. D'ailleurs ce qu'il a déjà fait lui-même, il n'est pas nécessaire que nous le fassions à notre tour; là où il peut être arrêté, si notre aide pouvait lui être utile, nous ne la refuserons pas. Après vous avoir écrit à la hâte, il me reste à me dire,

Très illustre Lord,

Votre très respectueux et très obéissant

JOHN WALLIS.

Oxford, 3/13 juillet 1658.

LETTRE XLVI (45).

KENELM DIGBY A JOHN WALLIS.

Noble Sir, j'ai dernièrement reçu de M. Fermat le papier ci-inclus avec prière de lui de l'envoyer à Mylord Brouncker et à vous-même. J'espère que vous aurez reçu mes lettres des 8 et 25 mai. Mais le principal objet de celle-ci sera de prendre congé de vous pour plusieurs mois; car je vais entreprendre un long voyage qui me prendra au moins tout cet été. Si je retourne à Paris, je vous en informerai en vous présentant mes humbles respects. En même temps je cesse de vous importuner et je reste,

Noble Sir,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

que vous honorez grandement,

KENELM DIGBY.

Paris, 19 juin 1658.

LETTRE XLVII (46)

(jointe à la précédente).

FERMAT A KENELM DIGBY.

(*Voir* la *Correspondance de Fermat*, n° 96, Tome II, page 402; Tome III, page 314.)

RÉPLIQUE ANONYME AU COMMERCIUM.

[A la suite de l'exemplaire V913 du *Commercium Epistolicum* de Wallis à la Bibliothèque Nationale, et dans l'un des manuscrits de Boulliau (Bibl. Nat. franç. n° 13040) se trouve un imprimé anonyme de trois pages sur une demi-feuille petit in-4°. Cette pièce, qui constitue une réplique au *Commercium*, étant très rare ([1]), j'en reproduis ci-après le texte latin, suivi de la traduction. Quant à l'auteur, si la question est posée entre Frenicle et Fermat, il ne peut guère, ce semble, y avoir de doute, quoique Libri ait hésité un moment (*voir* Tome I, Avertissement, pages XXIII, lignes 9 à 12), et que, dans ses *Recherches sur les manuscrits de Fermat,* M. Ch. Henry se soit, contre Libri, prononcé en faveur de la seconde hypothèse. J'estime, en effet, que Fermat doit être absolument écarté, si l'on considère le fait même de l'impression, le ton de la réplique, enfin certaines particularités de l'orthographe; tout, au contraire, nous indique Frenicle, si ce n'est qu'en tous cas l'auteur aura voulu déguiser sa personnalité. C'est, en effet, Frenicle lui-même qui est désigné dans la pièce sous l'initiale « F. », tandis que Fermat est indiqué par l'expression « amicus noster ». On ne peut donc exclure absolument la possibilité que l'imprimé anonyme soit dû à un troisième mathématicien français, plus ou moins lié également avec Digby (par exemple, Carcavi, Mylon ou Martin de Laurendière); mais il aurait alors été au moins inspiré par Frenicle; la pièce doit donc valoir comme de ce dernier.]

ILLUSTRISSIMO ET CLARISSIMO VIRO D. K. D ([2]).

Commercii Epistolici tandem data nobis tuo beneficio est copia, in qua primum illud inquirendum venit an in commercium publicum cadere debuerint epistolæ privatæ, non solum non consentientibus, sed ne suspicantibus illud quidem aut scientibus earum authoribus : hac enim in re aliquam saltem juri gentium vim factam nemo merito inficias eat. Sed nil forsan expedit quæstionibus mathematicis ethicas

([1]) La réédition, donnée par M. Ch. Henry dans ses *Recherches* (pages 178 à 180), a été faite, en réalité, sur une copie d'Arbogast, et présente par suite quelques inexactitudes.

([2]) D(omino) K(enelm) D(igby).

immisceri : detur itaque venia illustrissimæ et doctissimæ nationi, quæ gloriam suam intra septa nimis angusta noluit continere. Vicit nempe amor patriæ, cujus famam extendere enixe semper et cupiunt et laborant boni cives. Sed an ipsi satis hac in parte ab illis consultum sit, videntur aliquantulum ambigere nostrates et ad illud poetæ, tentabundi licet ac dubitabundi, quadamtenus respicere.

Quondam etiam victis redit in præcordia virtus,
Victoresque cadunt Danai (1)....

An autem instaurare ipsis prælium liceat aut, aliqua saltem ratione, victoriæ a se dedecus amoliri, tuum (Vir clarissime), postquam hæc paucissima legeris, erit judicium.

Quæ hactenus viris vestratibus proposita sunt, in duas commode species dividi possunt : vel enim in problemata specialia, vel in theoremata aut problemata universalia et generalia. Ad priorem speciem spectant problemata de partibus aliquotis, et speciales quæstionis de quadratis unitate diminutis casus. Horum legitimam solutionem ab ipsis accepimus : attamen præcesserat libellus Domini F. (2), cujus ope cum facillimum fuerit numeros ab ipso exhibitos ἀναλύειν (3), et constructionis formam et processum inde nullo negotio elicere, ἐπέχουσι (4) nonnulli et, ad removendum, si quis supersit, scrupulum, demonstrationes theorematum generalium, quæ est secunda propositarum quæstionum species, et in qua nullum aut specimen aut auxilium à nostris habuerunt, ab ipsis merito exposcunt : qua in parte quid aut tentaverint aut produxerint vestrates, en accipe :

Theorema præcipuum hoc erat : Dato quovis numero non quadrato in integris, dantur infiniti quadrati in integris, qui in datum numerum ducti, adscita unitate, conficiunt quadratum. Verba autem *in integris* hic addimus; licet enim, ex iis quæ in scripto amici nostri (5)

(1) Virgile, *Énéide*, II, 367-8.
(2) La *Solutio duorum problematum etc.* qui est perdue.
(3) ἀναλύσειν I.
(4) ἐπέχοι I.
(5) Pièce 81 de la *Correspondance de Fermat*; traduction ci-avant p. 312.

præcesserant, luce clarius sit de integris tantum ibi quæstionem esse, tollere tamen omnino ambigua non gravamur. Hujus theorematis demonstrationem facilem sibi author Commercii asserit paginis 82 et 83; imo hanc ibi contineri diserte innuit; sed analystæ nostri ne vestigium quidem demonstrationis illic agnoscunt.

Secundum theorema negativum hoc erat : Nullus numerus cubus in duos cubos rationales dividi potest. Hujus cum demonstrationem non dederit F. in libello à se anno 1657 edito (¹), — licet in eo quæstionem proposuerit huic consimilem his verbis : Invenire 2 vel 3 vel 4 etc. hexagona (²) centralia quorum latus unitate tantum differat, et eorum summa sit æqualis cubo. Quæstio enim illa ad problema nostrum (³) reduci potest, in quo datum cubum in duos cubos rationales dividendum proposuimus, modo unitas, ut vult ipse F. ex hexagoni (⁴) definitione, inter hæc hexagona (⁵) non computetur; — debuerant vestrates huic statim demonstrationi incumbere. Sed nescio qua ratione factum sit ut neglexerint omnino ea in quibus nostrates ipsis non præiverant.

Tertium theorema generale, quod sub forma problematis concipi potest, hoc erat : Datus quivis numerus de (⁶) duobus cubis compositus in duos alios cubos est divisibilis; — vel, si problema universale proponendum mavis : — Datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos rationales dividere; quæ divisio per nos potest infinities variari. Huic autem propositioni non tantum canon nullus generalis datus est, quem tamen inquirebamus, sed in speciali problematis in numero 9 propositione, loco summæ quæ profondæ et abstrusæ est disquisitionis, data est differentia tantum; in quo casu nullam aut Vieta aut Bachetus in Diophantum agnoverant difficultatem,

(¹) La *Solutio* précédemment mentionnée.

(²) Exagona I.

(³) Le problème avait été proposé par Fermat (Lettre LXXXIII, traduction ci-avant p. 313), mais *nostrum* doit s'entendre : « de notre compatriote ».

(⁴) Exagoni I.

(⁵) Exagona I.

(⁶) *Sic* I.

cum problema nostrum ne attingerint (1) quidem, imo illud difficillimum videantur judicasse (2).

Quartum problema negativum hoc erat : Nullum in numeris est triangulum rectangulum cujus area sit numerus quadratus. Hujus demonstrationem existimat author Commercii dedisse in pagina sui libelli ultima : sed ne hic quidem demonstrationem ullam deteximus. Supponit quippe pro medio demonstrationis theorema sequens : Differentia duorum quadratorum atque eorumdem medius proportionalis non possunt esse plani similes : quod nihil aliud est quam obscurum per obscurius aut saltem æque obscurum probare. Licet enim verum nobis esse constet theorema illud suppositum, cur tamen illud non demonstraverit author non video, cum non minorem ipsius demonstratio, quam demonstratio theorematis, habeat difficultatem.

Vides itaque (Vir Clarissime) quos evelli nostratibus scrupulos ab authore illo operæ pretium sit, ut omni ex parte victoriam consequatur. Major certe (3) viæ pars ab ipso jam peracta est, nec Philistinis ulla satis tuta latebra aut effugium est contra Samsonem. Effice (4) igitur (Vir Clarissime) ut tanti et tam celebres viri fractos jam et labantes adversarios ab his quatuor vix satis fidis propugnaculis actutum dejiciant, quo peracto plenæ vestratium victoriæ, consentientibus vel nostratibus, plenus etiam triumphus accedet. Nec addictum me minus aut jussis vestris obsequentem aut tu, Vir Illustrissime, aut ipsi quoque in posterum experientur. Vale.

A l'illustrissime et clarissime Sir Kenelm Digby.

Grâce à vous, nous avons enfin entre les mains ce *Commercium epistolicum* qui soulève une première question, à savoir si des lettres particulières auraient dû être livrées au public non seulement sans l'aveu

(1) Lisez *attigerint*.
(2) indicasse I.
(3) certæ I.
(4) Effige I.

de leurs auteurs, mais même à leur insu et avant qu'ils en eussent conçu le moindre soupçon; personne ne pourra contester à juste titre que dans cette occasion le droit des gens n'ait au moins subi une certaine atteinte. Mais il ne faut peut-être pas mêler des questions morales à des sujets mathématiques; souffrons donc une pareille licence à une illustre et savante nation, qui n'a pas voulu limiter sa gloire par des barrières trop étroites. C'est l'amour de la patrie qui l'a emporté; les bons citoyens désirent à tout prix étendre sa renommée et consacrent leurs efforts à ce but. Mais a-t-il été, dans ce cas, complètement atteint? Nos compatriotes semblent quelque peu en douter et, quoique avec hésitation et sans assurance, se rappeler ces vers du poète :

> Mais parfois le courage revient au vaincu,
> Et le Grec triomphant succombe à son tour.

Peuvent-ils renouveler la lutte ou, pour quelque motif au moins, éviter le déshonneur de la défaite? Il vous appartiendra d'en juger, quand vous aurez lu ces quelques lignes.

Ce qui, jusqu'à présent, a été proposé à vos compatriotes peut être aisément distingué en deux classes de questions : d'une part, les problèmes particuliers, de l'autre, les théorèmes ou problèmes universels et généraux. Dans la première classe rentrent les problèmes des parties aliquotes et les cas particuliers de la question sur les carrés diminués de l'unité. Nous avons reçu d'Angleterre une solution légitime pour tous les problèmes de cette classe; cependant elle avait été précédée par l'opuscule de M. F(renicle), grâce auquel il était très facile d'analyser les nombres qu'il avait donnés et de déduire ainsi sans aucune peine le mode et le procédé de construction. On peut donc suspendre son jugement et afin d'écarter tout scrupule, s'il en reste, réclamer à bon droit de vos compatriotes les démonstrations des théorèmes généraux qui constituent la seconde classe des questions proposées et pour lesquels ils n'ont eu de notre côté ni modèle ni secours. Or qu'ont-ils tenté ou produit à ce sujet? Je vais le dire.

Le principal théorème était le suivant : Étant donné un nombre

entier non carré, on peut déterminer une infinité de carrés entiers, tels que le produit de chacun d'eux par le nombre donné, après addition de l'unité, fasse un carré. J'ajoute ici le mot *entiers;* quoiqu'en effet, d'après ce qui précédait dans l'écrit de notre ami (Fermat), il soit plus clair que le jour que la question portait seulement sur les nombres entiers, je n'ai aucune raison pour ne pas écarter désormais toute ambiguïté. Or l'auteur du *Commercium* affirme, pages 82 et 83 (1), qu'il peut facilement démontrer ce théorème; bien plus il fait entendre que la démonstration est expressément contenue dans ce passage; mais nos analystes ne peuvent en reconnaître aucune trace.

Le second théorème était celui-ci : Aucun nombre cube ne peut être partagé en deux cubes rationels. Dans l'opuscule qu'il a publié en 1657, F(renicle) n'a pas donné la démonstration de ce théorème; cependant il y a proposé une question analogue en ces termes : Trouver deux, trois ou quatre, etc. hexagones centraux, tels que leurs côtés diffèrent seulement d'une unité et que leur somme soit égale à un cube (2). Cette question peut en effet se ramener au problème précédemment énoncé, partage d'un cube donné en deux cubes rationels, pourvu que l'on ne compte pas l'unité parmi les hexagones centraux, ainsi qu'au reste l'entend F(renicle) d'après sa définition de l'hexagone. Vos compatriotes auraient donc dû s'attacher aussitôt à chercher la démonstration désirée; mais je ne sais comment il se

(1) *Voir* ci-avant pages 433 à 435.

(2) Frenicle entend par hexagone central de côté n, le nombre

$$1+\sum_{1}^{n} 6(n-1) = n^3 - (n-1)^3.$$

La somme de p hexagones centraux consécutifs (des côtés n à $n+p-1$) sera donc

$$(n+p-1)^3 - (n-1)^3.$$

Demander qu'elle fasse un cube, revient donc à proposer de résoudre en nombres entiers l'équation

$$(n+p-1)^3 = (n-1)^3 + q^3.$$

Frenicle exclut naturellement la solution $n=1$, $p=q$.

fait qu'ils aient absolument négligé les questions pour lesquelles ils n'ont pas été devancés par les nôtres.

Le troisième théorème général, qui peut être conçu sous forme de problème, était le suivant : Tout nombre donné somme de deux cubes peut être partagé en deux autres cubes; ou si vous préférez la proposition comme problème général : Un nombre somme de deux cubes étant donné, le partager en deux autres cubes. Nous pouvons faire varier ce partage à l'infini. Or pour ce problème aucune règle générale n'a été fournie, comme nous le demandions, et dans le cas particulier du nombre donné 9, au lieu de le donner comme somme, ce qui demande une profonde et abstruse recherche, il n'a été donné que comme différence; chose à laquelle ni Viète ni Bachet sur Diophante n'ont trouvé aucune difficulté, tandis qu'ils n'ont pas même abordé notre problème, qu'au contraire ils semblent l'avoir trouvé très difficile.

Enfin il y avait un quatrième théorème général négatif : Il n'y a en nombres aucun triangle rectangle dont l'aire fasse un nombre carré. L'auteur du *Commercium* estime qu'il en a donné la démonstration à la dernière page de son Livre [1]; mais nous n'avons pas davantage pu y découvrir aucune démonstration. Il suppose, en effet, comme moyen de démonstration le théorème suivant : La différence de deux carrés et leur moyen proportionel ne peuvent être des plans semblables [c'est-à-dire des nombres dans le rapport de deux carrés entiers]. Mais ce n'est là que prouver ce qui est obscur par une autre assertion encore plus obscure ou au moins aussi obscure. Nous reconnaissons à la vérité comme exact ce théorème supposé, mais je ne vois pas pourquoi l'auteur du *Commercium* n'en a pas donné la démonstration qui certainement présente autant de difficulté que celle de l'énoncé proposé.

Vous voyez ainsi quels scrupules cet auteur doit encore écarter pour remporter sur les nôtres une victoire complète. Sans aucun

(1) Lettre XLIV, page 600.

doute il a déjà accompli la plus grande part de la route et, contre ce Samson, les Philistins n'ont plus ni cachette ni refuge assez sûr. Obtenez donc que des héros aussi justement célèbres délogent encore, de ces quatre derniers retranchements à peine solides, leurs adversaires déjà épuisés et chancelants; cela fait, les vôtres auront pleine victoire et plein triomphe, de l'aveu même des nôtres. En tous cas vous me trouverez toujours aussi dévoué et obéissant à vos ordres et je ne le serai pas moins à l'égard de nos adversaires.

ERRATA.

Tome I.

Avertissement, page XII, ligne 20 : La lettre en question porte seulement l'intitulé : « Clarissimo Gassendo P. F. S. T. » ; le nom de Fermat n'est donc indiqué que par la phrase de Sorbière citée Tome II, page 268, note.

Avertissement, pages XIX et XX, *voir* Tome III, Avertissement, pages IX-XV.

Page 237, note (1), *voir* Tome III, page 203, note (1).

Tome II.

Page 25, ligne 6 : *au lieu de* B et C, *lire* D et C.

» 26, ligne dernière de la note 2 : *au lieu de* Nicalaus, *lire* Nicolaus.

» 151, titre courant : *au lieu de* XXX, *lire* XXIX.

» 180, ligne dernière : *au lieu de* $3 - \sqrt{18}$, *lire* $3 - \sqrt{8}$.

» 272, ligne 12 : *au lieu de* B ad O, *lire* O ad B.

» 346 : *ajouter à la lettre* LXXXIV le *Post-scriptum*, Tome III, page 421.

» 359, note 1 : le passage de Galilée dont il s'agit se trouve à la première page de la quatrième journée dans le Dialogue des *Massimi Sistemi*.

» 407, ligne avant-dernière : *corriger* quartam (*texte de Wallis*) *en* quintam.

Tome III.

Page 78, ligne 10 en rem. : *au lieu de* RAB, *lire* RAC.

» 119, ligne 7 : *au lieu de* par, *lire* pour.

» 124, titre courant : *au lieu de* [135, 137], *lire* [136, 137].

» 415, ligne 10 : *au lieu de* il, *lire* Elle.

» 427, ligne 9 : *au lieu de* 1er octobre, *lire* 1er décembre.

FIN DU TOME TROISIÈME.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
20660 Quai des Grands-Augustins, 55.

DATE DUE

GAYLORD			PRINTED IN U.S.A.